Ministero della Pubblica Istruzione

Direzione Generale Istruzione Classica

Direzione Generale Istruzione Elementare

Unione Matematica Italiana

QUADERNI 23

ARITMETICA

Seminario di formazione per Docenti

Istruzione Elementare

Liceo Scientifico Statale "A. Vallisneri" Lucca

Novembre 1996 - Febbraio 1997

DOCUMENTI DI LAVORO

Quaderni ed Atti pubblicati dal Ministero della Pubblica Istruzione

Direttore: G. Trainito
Direttore editoriale: L. Catalano
Coordinatore editoriale: A. Portolano
Editing: A. R. Cicala, E. Giansanti, G. Zito, P. Manzioli
Grafica: F. Panepinto

Nota editoriale
In questo quaderno sono raccolti i materiali che costituiscono lo specifico dei Seminari di formazione per Docenti degli Istituti afferenti alla Direzione classica, scientifica e magistrale.
Essi sono stati prodotti da corsisti e relatori nella forma finale, con la collaborazione scientifica del Comitato di redazione. Altri pur pregevoli contributi individuabili nel Programma non vengono qui raccolti, in quanto la loro ricaduta formativa si esplica in un ambito più generale e, pertanto, in tutto o in parte, sono già stati divulgati. Essi sono, comunque, disponibili presso la Direzione Generale dell'Istruzione Classica Scientifica e Magistrale.

Ministero della Pubblica Istruzione
Direzione Generale Istruzione
Classica Scientifica e Magistrale
Direzione Generale Istruzione Elementare
Unione Matematica Italiana

ARITMETICA

Seminario di formazione per
Docenti Istruzione Elementare

Liceo Scientifico Statale
"A. Vallisneri" - Lucca
Novembre 1996 - Febbraio 1997

LA SERIE "DOCUMENTI DI LAVORO" DEI NOSTRI QUADERNI

La collana "Quaderni" della Dirclassica si arricchisce di una nuova "serie": essa porta quali suoi "segni" grafici distintivi il dorso rosso della copertina e la dizione "documenti di lavoro" che vi compare in aggiunta a quelle che contrassegnavano i "tradizionali" fascicoli "verdi" e "grigi". Ogni nuovo nato è testimonianza di vitalità. E difatti questa nuova serie risponde a una triplice esigenza di sviluppo.

In primo luogo, quella di dare tempestiva comunicazione del lavoro che la nostra Direzione viene compiendo – a ritmi di costante accelerazione – sul terreno della formazione e dell'aggiornamento degli operatori scolastici. Il numero crescente delle nostre iniziative richiede non solo un allargamento degli strumenti, ma pure un utilizzo delle forze e delle risorse disponibili che sappia farsi via via più articolato e diffuso.

In secondo luogo, alcuni seminari – per la loro peculiare natura di essere finalizzati a discutere questioni di pressante attualità – richiedono che gli esiti di lavoro trovino una disseminazione nella nostra realtà scolastica al possibile immediata e richiedono, pertanto, un taglio delle pubblicazioni che sappia privilegiare – rispetto alle altre serie – non solo la rapidità dei tempi, ma anche la caratteristica di indispensabile supporto informativo e documentario.

Infine – last but not least – *la scuola dell'autonomia richiederà sempre di più ai nostri presidi e ai nostri docenti la capacità di "volare da soli": questa terza serie, infatti, continuerà sì a essere il frutto di un dialettico rapporto di collaborazione tra "centro" e "periferia" e potrà ancora contare su un momento di editing teso a uniformare i criteri generali dell'intera collana, ma – in pari tempo – vedrà sempre più accentuato il responsabile ruolo delle singole scuole nella produzione di questo peculiare "prodotto" culturale.*

In tal modo, ritengo che non solo aumenteranno le frecce al nostro arco, ma riusciremo pure – questi almeno sono l'impegno e la speranza – a garantire alla collana grigia e a quella verde lo spazio temporale e la disponibilità umana per il lavoro legato alle scansioni necessariamente più dilatate dell'approfondimento tematico di alcune questioni di fondo.

Luigi Catalano

INDICE

Claudio Bernardi - Lucia Ciarrapico
Presentazione .... Pag. 7

Mario Ferrari
Aritmetica .... » 11

Lucilla Cannizzaro
Approccio al concetto di numero .... » 34

Pier Luigi Ferrari
Logica e teoria degli insiemi nella didattica dell'aritmetica .... » 67

Margherita Fasano
L'aritmetica e l'informatica nell'educazione matematica primaria .... » 90

Maria Sainati Nello
Il ruolo dei modelli primitivi delle operazioni aritmetiche
nella risoluzione dei problemi verbali .... » 97

Brunetto Piochi
Metodi elementari per la soluzione dei problemi di minimo .... » 105

Umberto Bottazzini
Definizione di continuità .... » 112

Elenco dei partecipanti .... » 117
Volumi della collana Quaderni già pubblicati .... » 118

PRESENTAZIONE

Claudio Bernardi
Presidente della Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica (*).
Lucia Ciarrapico
Dirigente superiore per i servizi ispettivi.

Questo volume raccoglie materiale elaborato in occasione del Terzo Corso in Didattica della Matematica, organizzato dal Ministero della Pubblica Istruzione e dall'Unione Matematica Italiana.

Alla fine del 1993 il Ministero della Pubblica Istruzione e l'Unione Matematica Italiana hanno sottoscritto un Protocollo d'Intesa, per promuovere «programmi comuni per la ricerca e la diffusione di metodologie didattiche, adeguate ai recenti sviluppi scientifici e tecnologici, nel campo della matematica e delle sue applicazioni». Nel quadro di una collaborazione fra mondo della Scuola e Università volta a realizzare forme di aggiornamento, il Protocollo prevede che il Ministero e l'Unione Matematica Italiana organizzino congiuntamente ogni anno un Corso residenziale di due settimane, su temi di didattica della matematica. Nel 1994 si è svolto il Primo Corso, dal titolo «L'insegnamento dell'Algebra fra tradizione e rinnovamento» per docenti delle Scuole Superiori; nel 95-96 si è tenuto il Secondo Corso, dedicato all'«Insegnamento della Geometria» e rivolto sia a docenti delle Scuole Medie sia a docenti delle Superiori.

Il Terzo Corso in Didattica della Matematica si è svolto a Viareggio in due settimane separate, dal 18 al 22 novembre 96 e dal 24 al 28 febbraio 97. Per consentire l'ammissione al Corso di un maggior numero di persone, è stato deciso di articolare anche il Terzo Corso in due Sezioni, una rivolta ai docenti delle Scuole Superiori e l'altra, per la prima volta, ai docenti delle Scuole Elementari. Come tema del Corso è stato scelto «Aritmetica» per la Sezione Elementari, e «Didattica dell'Analisi Matematica» per la Sezione Superiori.

Anche se durante il Corso ci sono stati momenti di confronto ed attività comuni fra tutti i docenti (in particolare, una conferenza sui «Progetti Multimediali del MPI» e una tavola rotonda sulle «Innovazioni legislative per la Scuola»), nella stesura degli Atti è sembrato preferibile presentare separatamente i

(*) La Commissione Italiana per l'lnsegnamento della Matematica è una commissione permanente dell'Unione Matematica Italiana, che si occupa specificamente dei problemi di carattere didattico.

testi relativi alle Scuole Elementari e i testi relativi alle Superiori, in modo da ottenere due volumi tipograficamente più agili e didatticamente più mirati.

Le domande di partecipazione sono state numerosissime, più di 2000 per le due Sezioni. E' stato possibile ammettere solo 40 docenti di ruolo nelle Scuole Elementari e 48 docenti di ruolo nelle Superiori, scelti sulla base dei titoli presentati e in modo da rappresentare le varie Regioni; a questi docenti sono stati affiancati 10 neo-laureati.

Nella Sezione "Elementari" si sono svolti 4 cicli di lezioni con esercitazioni, conferenze, e lavori di gruppo. Come appare dai testi, in cui sono sinteticamente riportati i vari momenti di lavoro (lezioni teoriche, esemplificazioni, proposte didattiche), si è cercato di affrontare l'argomento tenendo presenti sia le indicazioni fornite dalla ricerca didattica, sia spunti suggeriti dalle scienze dell'educazione, sia ancora elementi di storia della matematica. Naturalmente, è stato dato risalto ai legami che l'Aritmetica presenta con altri settori matematici, come la logica e la teoria degli insiemi, facendo sempre riferimento ai programmi scolastici.

Questo libro si propone come strumento didattico per attività di studio, di aggiornamento e anche di prima formazione. L'efficacia di un Corso di didattica si misura dalla sua ricaduta: ci auguriamo che il libro permetta a molti di coloro che non hanno potuto partecipare al Corso, di usufruirne, sia pure a distanza di tempo, e possa anche costituire una fonte di suggerimenti per Enti e Associazioni che vogliano contribuire con iniziative locali alla formazione dei docenti.

Un sentito ringraziamento va rivolto a quanti hanno reso possibile la realizzazione dell'iniziativa:
– alla Direzione Generale dell'Istruzione Classica Scientifica e Magistrale, che ha curato l'organizzazione del Corso,
– alla Direzione Generale dell'Istruzione Elementare, che ha contribuito alla realizzazione del Corso,
– al Preside Giuseppe Ciri del Liceo Scientifico "Vallisneri" di Lucca, che ha diretto il Corso, e al personale dello stesso Liceo, che ha offerto un efficace sostegno amministrativo e di segreteria,
– ai relatori, per la loro competenza e disponibilità,
– ai docenti partecipanti, che hanno dato contributi preziosi grazie alla loro preparazione e alla loro esperienza concreta.

PROTOCOLLO DI INTESA M.P.I. - U.M.I
SEZIONE ISTRUZIONE PRIMO GRADO
3° CORSO MPI-UMI IN DIDATTICA DELLA MATEMATICA
“ARITMETICA”

Programma

Cicli di lezioni:

A **Mario Ferrari -** Università di Pavia
Divisibilità - Numeri primi - Sistemi di Numerazione

B **Umberto Cattabrini -** Presidente dell’IRRSAE Toscana
Aspetti pedagocici

C **Lucilla Cannizzaro -** Università di Roma “La Sapienza”
Approccio al concetto di numero (commento ai programmi, difficoltà di apprendimento, confronto di itinerari didattici, …)

D **Pier Luigi Ferrari -** Università di Torino - sede Alessandria
La logica e la teoria degli insiemi nella didattica dell’aritmetica

Conferenze:

Margherita Fasano - Università della Basilicata
Legami fra aritmetica e informatica

Maria Sainati Nello
Il ruolo dei modelli primitivi delle operazioni aritmetiche nella risoluzione dei problemi verbali

Mario Fierli - Dirigente superiore per i servizi ispettivi
Riscoprendo la geometria del triangolo

Brunetto Piochi - Università di Siena
Problemi di minimo e massimo risolti senza derivate

Umberto Bottazzini - Università di Palermo
Definizioni di continuità

STAFF DI GESTIONE DEL CORSO

Direttore: Giuseppe Ciri

Relatori:
Umberto Bottazzini
Lucilla Cannizzaro
Umberto Cattabrini
Margherita Fasano
Mario Ferrari
Pier Luigi Ferrari
Brunetto Piochi
Maria Sainati Nello

Segreteria organizzativa:
Francesca Antonelli, Ilaria Ercoli, Cesare Matteoni, Maria Luisa Radini, Giovanni Romani.

La curatela del presente volume è stata seguita da Giuseppe Ciri.
La revisione scientifica dei testi è stata curata da Lucia Ciarrapico, Claudio Bernardi, Paolo Nardini

ARITMETICA

Mario Ferrari
Dipartimento di Matematica “F. Casorati” - Università di Pavia

Capitolo 1 GLI INSIEMI NUMERICI

1. Gli insiemi numerici della scuola elementare.

Nella scuola elementare, secondo i programmi del 1985, si “incontrano” diversi “mondi numerici”.

1.1 Il mondo dei numeri naturali. I numeri naturali sono i più familiari ed i meglio studiati nella scuola elementare. Sono i numeri che servono per contare, per esprimere la “quantità” degli elementi di un insieme, per misurare certe grandezze. Ci sono, però, anche altri usi sociali dei numeri naturali: per il telefono, per le targhe automobilistiche, per i numeri civici delle case, per i canali televisivi, ecc..

1.2 Il mondo dei numeri interi relativi. Sono i numeri formati da due elementi: con segno distintivo *(+, -)* ed un numero naturale. Nella scuola elementare sono stati introdotti dai programmi del 1985. Questi numeri servono per esprimere i fenomeni nei quali c’è un elemento di separazione fra un “prima” e un “dopo”, fra un “sopra e un “sotto”. Nella scuola elementare si usano, soprattutto, per le temperature.

1.3 Il mondo dei numeri razionali. I programmi parlano solo di frazioni, ma il passo per arrivare ai numeri razionali è breve. Basta introdurre la nozione di frazioni equivalenti e costruire le classi delle frazioni equivalenti. Ogni classe è un numero razionale. Nella scuola elementare ci sono tutti gli strumenti per introdurre i numeri razionali, ma è meglio non farli perché ritengo che sia molto difficile, a questa età, accettare che un numero sia “fatto” da infinite frazioni. I numeri razionali servono in questioni di ripartizione, di suddivisione, di misura, di probabilità, di statistica (percentuali). Nella vita sociale, oltre che in matematica, usiamo soprattutto il “sottomondo dei numeri decimali finiti”.

1.4 Il mondo dei numeri reali. È il mondo più difficile da costruire, ma di tutti, è il più completo. È il normale ambiente in cui lavorano i matematici. All'Istituto magistrale si studiano poco i numeri reali. Nella scuola elementare si "incontrano" pochi numeri reali. Il più famoso è π (pi greco) di cui, di solito, si dà una approssimazione decimale per difetto: $3,14$. Altri numeri reali sono i cosidetti numeri fissi, tranne quello del quadrato. I numeri reali servono soprattutto per la misura. I numeri reali hanno una scrittura decimale con infinite cifre dopo la virgola e non sono periodici.

Osservazione 1. Nel secolo XVI i matematici hanno incominciato a costruire un nuovo mondo numerico nel quale hanno diritto di cittadinanza anche le radici quadrate di numeri negativi come $\sqrt{-1}$. Questi numeri, che non sono né positivi né negativi, furono chiamati all'inizio "radici silvestri", poi "immaginari" e, infine "complessi". Noi non parleremo di questo mondo numerico.

2. Alcune caratteristiche comuni.

I 4 mondi numerici presentati prima, pur essendo diversi fra di loro, hanno delle caratteristiche comuni che danno a tutti il diritto di chiamarsi "numeri". È una specie di "zoccolo duro", di "proprietà irrinunciabili" per avere il diritto di chiamarsi "mondo numerico".
Le elenchiamo:

2.1 In ciascuno di essi è definita, una operazione binaria interna, chiamata addizione, che ha queste proprietà:

associativa: dati tre numeri qualunque $a,b,c,$ si ha sempre:

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

Questa proprietà dà senso alla scrittura molto familiare $a + b + c$. Essa significa uno qualunque dei due membri della uguaglianza scritta sopra.

Commutativa: dati due numeri qualunque $a,b,$ si ha sempre:

$$a + b = b + a.$$

Esiste un numero, lo 0, che è **elemento neutro**, cioè per ogni a si verifica

$$a + 0 = 0 + a = a.$$

Osservazione: Non tutti gli autori considerano lo zero un numero naturale. Lo stesso Peano, in alcune edizioni del suo Formulario mathematico, propone di incominciare dal numero 1. Per tali autori la nostra terza proprietà non fa parte dello "zoccolo duro". Per noi, ovviamente, si.

2.2 In ciascuno di essi è definita, una seconda operazione binaria interna della moltiplicazione, che ha queste proprietà:

associativa: dati tre numeri qualunque $a,b,c,$ si ha sempre:

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c).$$

In forza di questa proprietà possiamo scrivere $a \times b \times c$ per indicare uno qualunque dei due membri della uguaglianza scritta sopra.

Commutativa: dati due numeri qualunque $a,b,$ si ha sempre:

$$a \times b = b \times a.$$

Esiste un numero, l'1, che è **elemento neutro**, cioè per ogni a si verifica:

$$a \times 1 = 1 \times a = a.$$

Di annullamento: dati due numeri qualunque $a,b,$ $a \times b = 0$ si verifica se e solo se $a = 0$ oppure $b = 0$. Il connettivo "oppure" è da intendersi nel senso di "vel", cioè di una disgiunzione inclusiva. La proprietà di annullamento contiene due affermazioni. La prima dice che se uno dei due numeri è zero, allora il prodotto è nullo; la seconda dice se il prodotto è nullo, allora almeno uno dei due numeri è zero.

Distributiva rispetto alla addizione: dati tre numeri qualunque $a,b,c,$ si ha sempre

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c).$$

Questa è una proprietà di collegamento fra la struttura additiva dei numeri e la loro struttura moltiplicativa.

Osservazione 3 Le proprietà associativa, commutativa e distributiva sono esplicitamente nominate dai Programmi, i quali parlano anche del ruolo dello zero. Nessun cenno, nei programmi e in questi appunti, alla "proprietà dissociativa" per il semplice motivo che essa non esiste. È vero che si trova in sussidiari e guide, ma questo non significa che esista. Trattandosi di matematica è meglio fidarsi dei matematici che degli autori di libri per la scuola elementare.

2.3 In ciascuno di essi è definita una **relazione di ordine**, indicata col simbolo $>$ (maggiore) che permette di confrontare due numeri qualunque per decidere, se sono diversi, quale è il maggiore. Questa relazione gode delle seguenti proprietà:
transitiva: dati tre numeri qualunque $a,b\ c,$ se $a > b$ e $b > c$ allora $a > b$;
tricotomica: dati due numeri qualunque $a,b,$ si verifica uno ad uno solo di questi tre casi: $a > b,\ a = b,\ b > a$;
di archimedeicità: dati a e b, con $b > 0$, esiste un numero naturale n tale che $nb > a$. In altre parole, nei numeri non esiste un "capo supremo", un numero maggiore di tutti gli altri.
compatibilità con l'addizione: dati a,b,c,d qualunque, se $a>b$ e $c>d$, allora $a+c > b+d$;
compatibilità con la moltiplicazione: dati a,b,c se $a>b$ e $c>0$ allora

$$a \times c > b \times c.$$

Queste due ultime proprietà descrivono "l'armonia" che esiste fra struttura di ordine e strutture algebriche (additiva e moltiplicativa). Le proprietà enunciate in questo paragrafo forniscono una descrizione della "vita sociale comune" dei vari mondi numerici.

3. Le proprietà distintive.

Ciascun mondo numerico, oltre allo "zoccolo duro" possiede proprietà sue proprie che lo distinguono dagli altri.

3.1 Numeri naturali. Una proprietà caratteristica dei numeri naturali riguarda l'ordinamento. La relazione di ordine che abbiamo indicato col simbolo $>$ è un buon ordinamento perché ogni sottoinsieme non vuoto di numeri naturali possiede un minimo cioè un numero che è più piccolo di tutti gli altri numeri dell'insieme.
Nei numeri naturali, inoltre, ogni numero x ha un **successivo**, che, di solito, si indica con $x + 1$. Forse ci conviene ricordare in modo esplicito la definizione:
un numero y è il successivo di x se

- y è maggiore di x
- non esiste nessun numero z che sia maggiore di x e minore di y.

Questa proprietà viene "ereditata" dai numeri interi relativi, ma non dai razionali.
Nei numeri naturali, inoltre, si definisce il concetto di numero primo, che vedremo a suo tempo, e quello di numero pari. Entrambi vengono "ereditati" dagli intero relativi, ma non dai razionali.

3.2 Numeri interi relativi. In questo mondo trova la sua collocazione naturale il concetto di precedente perché ogni numero ha un precedente.
L'addizione, inoltre, si arricchisce di una nuova proprietà:
ogni numero a possiede un opposto, che indicheremo con $-a$, tale che

$$a + (-a) = (-a) + a = 0.$$

Questa proprietà viene "ereditata" dai razionali. Per l'esistenza degli opposti, e per le altre proprietà ricordate prima, gli interi relativi rispetto alla addizione sono un gruppo.
Per questo è sempre possibile la sottrazione dato che, per definizione,

$$a - b = a + (-b).$$

3.3 Numeri razionali. L'ordinamento acquista la proprietà di densità perché tra due numeri razionali vi è sempre un numero razionale. Per questo non esistono più né il successivo, né il precedente di un numero.
Per fare un esempio: $\frac{4}{5}$ non è il successivo di $\frac{3}{5}$ perché compresi tra i due numeri ci sono altri numeri razionali come $\frac{7}{10}$ (è la loro media aritmetica).
La moltiplicazione, inoltre, si arricchisce di una nuova proprietà:
ogni numero $a \neq 0$ ha un reciproco, che indichiamo con $\frac{1}{a}$, tale che

$$a \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \times a = 1.$$

Per questo è sempre possibile la divisione (per un numero diverso da zero) dato che, per definizione,

$$a : b = a \times \frac{1}{b}.$$

I numeri razionali, per le proprietà possedute da addizione e moltiplicazione, formano un campo.

3.4 Numeri reali. Opposti, reciproci e densità vengono "ereditati" dai numeri reali, il cui ordinamento, inoltre, è <u>completo</u>. Intuitivamente questo significa che ai numeri reali non possiamo aggiungere nient'altro se vogliamo che valgano tutte le loro proprietà enunciate finora.

4. Qualche considerazione didattica.

4.1 Nella scuola elementare si dà un grande sviluppo alle operazioni ed alle tecniche per eseguirle. Va bene, ma non bisogna trascurare le proprietà delle operazioni che le caratterizzano e giustificano le tecniche. Le proprietà vanno sviluppate nel secondo ciclo ed io penso che in quinta si può giungere a scriverle in modo simbolico, cioè usando le lettere. Questo non è nella nostra tradizione, ma può entrarvi senza difficoltà. Se i bambini non hanno paura delle lettere in geometria, nello studio della quale presentiamo formule anche complicate, non vedo perché debbano averne in aritmetica. A meno che in questa situazione siano gli insegnanti.

4.2 Le tabelle delle operazioni, esaltate o vituperate a seconda dei tempi e delle ideologie, devono essere familiari agli alunni al termine della scuola. È importante, però, che i bambini imparino a "leggerle" per ritrovare proprietà delle operazioni, segreti dei numeri, armonie interne. È una buona attività per i lavori di gruppo.

4.3 La relazione d'ordine è spesso trascurata nella scuola elementare anche relativamente ai numeri naturali. Eppure sull'ordinamento si basa la filastrocca dei numeri, il conteggio, la sottrazione. I numeri naturali "hanno la caratteristica fondamentale di essere ordinati", ma non sono pochi gli insegnanti che non sanno dare una definizione matematicamente corretta di $a > b$ e men che meno di $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ con b e d positivi. Questo spiega la poca importanza attribuita in classe alle relazioni di ordine. Esse sono fortemente sottolineate dai programmi e devono avere un adeguato sviluppo nelle attività in classe.

4.4 Un lungo discorso meriterebbero i problemi.
Faccio solo qualche cenno:

– La scelta dei programmi è di un insegnamento per problemi.

- Ci sono problemi per allenarsi. Sono problemi di routine, richiedono poco sforzo e possono essere anche improvvisati. I sussidiari ne sono pieni.
- Ci sono problemi per ragionare, individualmente e collettivamente. Sono una sfida all'intelligenza degli alunni. Non possono essere improvvisati, ma devono essere pensati per fissare testo, prerequisiti, obiettivi; per prevedere le strategie risolutive degli alunni, le possibili difficoltà, gli eventuali ampliamenti. Non possono essere molti in un anno, anche perché abbisognano di una discussione collettiva, ma ci devono essere.

5. Il gioco degli incastri.

Abbiamo visto 4 mondi numerici, Ciascuno ha un suo simbolo:

- **N**: è il simbolo per l'insieme dei numeri naturali. È l'iniziale della parola "numero" e della parola "naturale". Qualche volta si usa anche la lettera **P** in ricordo di Peano.
- **Z**: è il simbolo per l'insieme dei numeri interi relativi. È l'iniziale della parola "Zahl" che in tedesco significa numero. Qualche volta si usa anche la lettera **I** iniziale di "integer" che in inglese significa intero.
- **Q**: è il simbolo dell'insieme dei numeri razionali. È l'iniziale della parola "quoziente" e allude al fatto che un razionale è il quoziente di due interi.
- **R**: è il simbolo dell'insieme dei numeri reali. È l'iniziale della parola "reale".

Ora ci poniamo la domanda: che rapporti ci sono fra questi 4 insiemi? Sono province staccate, compartimenti stagni oppure sono fra loro interrelati? E se si, in che modo lo sono?

Partiamo dall'insieme **N** che è il "più piccolo" dei mondi numerici.

5.1 Con i numeri naturali si costruisce l'insieme **Z**. Il modo più tradizionale è di considerare gli elementi di Z come <u>coppie ordinate</u> formate da un segno (di solito + o -) e da un numero naturale.

Esempi: $+3$; -4; -7; $+15$ ecc..

È chiaro che i numeri naturali non sono numeri interi relativi. Fra questi, però, ci sono i numeri non negativi, cioè lo 0 e quelli che sono preceduti dal segno $+$, come $+1$, $+2$, $+3$, ecc.
Possiamo indicare con Z^+ l'insieme di tutti questi numeri.
Tra N e Z^+ noi possiamo stabilire una corrispondenza biunivoca come quella rappresentata qui sotto

$$
\begin{array}{cccccccc}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5\ \ldots & & n\ \ldots \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow \\
+0 & +1 & +2 & +3 & +4 & +5\ \ldots & & +n\ \ldots
\end{array}
$$

Indicando con f questa corrispondenza si ha

$$f(n) = +n$$

Inoltre questa corrispondenza trasforma la somma di due numeri naturali nella somma dei loro corrispondenti in Z^+.

Esempio: $f(2+3) = f(5) = +5 = (+2) + (+3) = f(2) + f(3)$

In generale: $f(m+n) = f(m) + f(n)$.

Anche per il prodotto succede la stessa cosa.

Esempio: $f(2x3) = f(6) = +6 = (+2)\ x\ (+3)$.

In generale: $f(m\ x\ n) = f(m)\ x\ f(n)$.

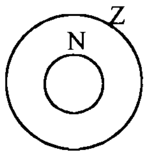
Anche per l'ordinamento succede lo stesso fenomeno.

Esempio: $5 > 3$, ma anche $+5 > +3$ e viceversa.

In generale: $m > n$ se e solo se $f(m) > f(n)$.

In altre parole: i due insiemi N e Z^+ si comportano allo stesso modo rispetto alla addizione, alla moltiplicazione e all'ordinamento.
Per questo i matematici dicono che i due insiemi sono isomorfi.
Siccome N è isomorfo a Z^+, cioè a un sottoinsieme di Z, si usa dire, con un abuso di linguaggio, che N è un sottoinsieme di Z e rappresentare

questa situazione con il diagramma di Eulero-Venn



Questo è il motivo per cui spesso i numeri interi non negativi si scrivono come numeri naturali, tralasciando il segno $+$.

5.2 Usando i numeri interi relativi si costruisce l'insieme $\mathbf{Q}$. Una strada è questa. Si considerano le coppie ordinate (a,b) con $b \neq 0$ di numeri interi relativi (si pensi alla frazione $\frac{a}{b}$).

Si definisce questa relazione di equivalenza:

(a,b) equivalente a (c,d) se e solo se si verifica

$$a \text{ x } d = b \text{ x } c$$

(è la definizione di frazioni equivalenti).
Si considerano le classi formate dalle infinite frazioni fra loro equivalenti. <u>Ognuna di questa classi è un numero razionale</u>.
È chiaro che i numeri interi relativi <u>non</u> sono numeri razionali, ma fra questi ci sono quelli che hanno come seconda componente 1, cioè quelli del tipo $(a,1)$ (si pensi alla frazione $\frac{a}{1}$).
Li possiamo chiamare <u>razionali interi</u> e indicarli con Q_i.
Tra i due insiemi Z e Q_i possiamo stabilire una <u>corrispondenza biunivoca</u> come quella visualizzata qui sotto:

...	-3	-2	-1	0	+1	+2	.....	+n	...
	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$		$\updownarrow$	
	$\frac{-3}{1}$	$\frac{-2}{1}$	$\frac{-1}{1}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{+1}{1}$	$\frac{+2}{1}$	.....	$\frac{+n}{1}$	...

(Per il dominatore abbiamo usato la convenzione descritta nelle ultime righe di **5.1.**)

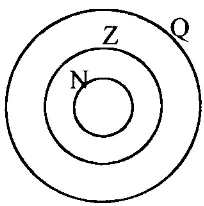
Inoltre, in questa corrispondenza

- alla somma di due numeri di Z corrisponde la somma dei corrispondenti in Q_i
- al prodotto di due numeri di Z corrisponde il prodotto dei corrispondenti in Q_i
- l'ordine che vale fra due numeri di Z è la stessa che vale fra i corrispondenti in Q_i e viceversa.

In una parola: i due insiemi sono <u>isomorfi</u>.

Siccome Z è isomorfo a Q_i, cioè a un sottoinsieme di Q, si usa dire che Z è un sottoinsieme di Q. Per questo spesso, al posto di scrivere il numero razionale $(a,1)$ (con la frazione rappresentativa apparente $\frac{a}{1}$) scriviamo semplicemente a.

La rappresentazione con i diagrammi di Eulero-Venn è la seguente

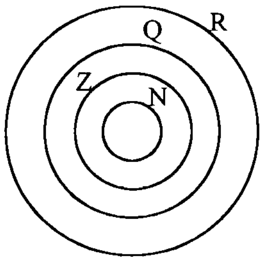


5.3 Con i numeri razionali si costruisce l'insieme $\mathbf{R}$. I modi sono molti, ma tutti abbastanza difficili, e non è il caso di parlarne.

I numeri razionali <u>non</u> sono numeri reali, tuttavia c'è un sottoinsieme di R che è formato dai <u>reali razionali</u> (gli altri sono i reali irrazionali come $\sqrt{2}$, π, ecc).

L'insieme dei reali razionali si comporta come Q rispetto a $+, x, >$, cioè i due insiemi sono <u>isomorfi</u>. Per questo si usa anche dire che Q è un sottoinsieme di R.

La rappresentazione con i diagrammi di Eulero-Venn è la seguente:



6. Note storiche.

Nessun insieme numerico è nato adulto.
Ognuno ha avuto una storia, spesso lunga e travagliata.
L'origine dei numeri naturali si perde nella notte dei tempi.
Le prime teorizzazioni si trovano nella matematica greca.
Euclide, per esempio, definisce numero "una molteplicità di unità". Quindi, per lui, uno non è un numero e non sono numeri né gli interi (negativi), né i razionali, né i reali.
La definizione di Euclide ha percorso tutta la storia della matematica fino al secolo scorso anche se, sulla scorta di Newton, dal secolo XVIII in poi diventa prevalente la definizione di numero come rapporto fra grandezze omogenee.
Acquistano, così, dignità di numeri i razionali ed i reali positivi, ma non i negativi.
La prima sistemazione assiomatica dei numeri naturali risale al 1889 ed è dovuta a Giuseppe Peano (1858-1932).
I numeri interi relativi fanno la loro comparsa in India nel VII secolo d. C..
Ignorati dagli Arabi, li ritroviamo in Europa dal XIII secolo in poi.
Qui troviamo matematici che li utilizzano senza problemi, altri che li usano a malincuore chiamandoli "numeri ficti" e "radici false", altri ancora che li dichiarano inesistenti o impossibili. Solo nella seconda metà del secolo scorso acquistano diritto di cittadinanza fra i mondi numerici.

C'è poco da dire dei numeri razionali. Hanno seguito un po' la storia dei numeri naturali. C'è da notare che solo nel secolo XVI incominciano ad essere usati sistematicamente le frazioni decimali.
La nascita dei numeri reali irrazionali, se è vero che furono scoperti dalla scuola pitagorica, fu traumatica per la scuola stessa perché fece crollare tutta la sua impalcatura filosofica. Pure comunemente usati, furono guardati anche con differenza come "numeri evanescenti" perché la loro rappresentazione decimale era infinita e non periodica.
La loro sistemazione razionale avvenne nella seconda metà del secolo scorso ad opera di Dedekind e di Cantor.

Capitolo 2 DIVISIBILITÀ E DINTORNI

1. Introduzione.

La divisibilità è presente in tutti i programmi di matematica, dalle elementari alle superiori.
Si tratta di un concetto dalla **lunga storia** perché è presente già negli Elementi di Euclide.
È un concetto **fecondo** perché ad esso sono legati altri concetti come quello di divisione, di numero primo, di massimo comun divisore, di classi di resto.
È un concetto **pervasivo** perché lo si trova nei numeri naturali, negli interi relativi, nei polinomi, nelle grandezze omogenee, negli anelli euclidei.
Anche questo concetto, come tanti altri, affonda le sue radici nell'esperienza, si basa su problemi reali.

2. I problemi di partenza.

I problemi concreti che stanno alla base del concetto di divisibilità sono quelli riguardanti la ripartizione, la suddivisione di un certo numero di "oggetti" fra un certo numero di "soggetti". Problemi di questo tipo hanno dei limiti intrinseci, che è bene esaminare in classe, anche per vedere come procede la matematica.
Anzitutto un problema concreto ha senso quando ci sono degli "oggetti" da distribuire. Se non ci sono "oggetti" il problema neppure si pone. Quindi il "dividendo", lo indicheremo con a, deve essere maggiore di zero: $a > 0$.

In secondo luogo, ci devono essere dei "soggetti" fra i quali ripartire gli "oggetti". Quindi anche il "divisore", che indicheremo con b, deve essere maggiore di zero: $b > 0$.
Se gli "oggetti" non possono essere rotti, allora il loro numero deve essere maggiore o uguale a quello dei "soggetti", cioè: $a \geq b$.
La soluzione del problema consisterà in un certo numero di "oggetti" per ciascun "soggetto".
Questo numero è il "quoziente" e lo indichiamo con q. Deve essere $q \geq 1$.
Infine ci possono essere degli "oggetti" che non possono più essere distribuiti. Il loro numero è il "resto" e lo indichiamo con r. Deve essere $0 \leq r < b$.

3. La matematizzazione.

3.1 Matematizzare un problema vuol dire tradurre in linguaggio matematico i dati del problema, le relazioni fra essi e l'eventuale soluzione o le eventuali soluzioni.
Quando un problema viene matematizzato, subisce necessariamente un processo di idealizzazione, di astrazione, di generalizzazione.
La matematica affonda le sue radici nell'empiria, come diceva Von Neumann, e si basa sulla intuizione, ma tende sempre a superare l'una e l'altra eliminandone, fin dove è possibile, i vincoli ed i limiti.
Anche nella matematizzazione dei problemi di ripartizione succede lo stesso fenomeno.
Gli "oggetti" ed i "soggetti" diventano semplicemente dei numeri naturali e numeri naturali sono anche gli "oggetti" che, eventualmente, rimangono e quelli assegnati a ciascun "soggetto".
È per questo che nel teorema che fra poco enuncerò non ci sarà più la condizione: $a > 0$. In matematica si divide anche quando il dividendo è zero. La matematica supera la realtà.
Anche la condizione $a \geq b$ non è più necessaria: è una conseguenza del superamento del primo limite.
Potremmo anche lasciar cadere la condizione sul resto: $r < b$, ma verremmo a trovarci nella spiacevole situazione di avere più coppie quoziente-resto. Quindi preferiamo mantenerla. Assolutamente ineliminabile è la condizione sul divisore: deve essere, nel nostro ambiente matematico,

maggiore di zero. Altrimenti avremmo infinite coppie quoziente-resto, con il resto sempre maggiore (o uguale) del divisore.

3.2 Il problema matematico.

Dal punto di vista matematico i problemi di ripartizione, ponendoci nei numeri naturali, si traducono in questo problema:
dati due numeri naturali a e b con $b > 0$ esiste una coppia di numeri naturali q ed r con $0 \leq r < b$ n modo che valga

$$a = bq + r\ ?$$

Se si, di tali coppie q ed r quante ne esistono?

4. La soluzione.

Alle domande che ci siamo posti c'è una risposta positiva data dal seguente

Teorema 1:
Per ogni ordinata (a, b) di numeri naturali, con $b > 0$, esiste una ed una sola coppia ordinata (q, r) di numeri naturali, con $0 \leq r < b$, tali che

$$a = bq + r.$$

Alla dimostrazione premettiamo qualche esempio numerico. Se $(32,5)$ è la coppia dividendo-divisore allora $(6,2)$ è la coppia quoziente-resto perché $32 = 5 \times 6 + 2$; se la coppia dividendo-divisore è $(115,7)$, allora la coppia quoziente-resto è $(16,3)$ perché $115 = 7 \times 16 + 3$. Per noi è spontaneo, perché frutto di una lunga abitudine, ricorrere all'algoritmo della divisione per trovare la coppia quoziente-resto, ma questa non può certo essere la strada per dimostrare l'esistenza. Per determinare la coppia $(16,3)$, per esempio, possiamo procedere in questo modo:

- **prima tappa:** calcolare i successivi multipli di 7, cioè $7x2$, $7x3$, ecc., fino a trovarne uno, nel nostro caso $7x17$, che supera 115;
- **seconda tappa:** considerare il più grande multiplo di 7, nel nostro caso $7x16$, che non supera 115;
- **terza tappa:** scrivere 115 come somma di $7x16$ e della differenza fra 115 e $7x16$.

Sarà proprio questa l'idea-guida della dimostrazione del teorema, che dividiamo in due parti: nella prima dimostriamo l'**esistenza** della coppia (q, r), nella seconda la sua **unicità**.

DIMOSTRAZIONE

Prima parte
Le idee cui facciamo ricorso sono

- la definizione di ordinamento in N: $a > b$ se e solo se esiste $c \neq 0$ tale che $a = b + c$;
- il fatto che questo ordinamento è archimedeo ed è un buon ordinamento.

Siccome $b > 0$, esiste un numero naturale n tale che $nb > a$. Ovviamente questo n non è unico perché anche $n + 1$, $n + 2$, ecc., verificano la disuguaglianza, e non è necessariamente il più piccolo. (Per rifarci all'esempio di prima: n può essere 20 perché $7x20 > 115$; oppure anche $21, 22,$ ecc.; qui 20 non è il più piccolo numero che moltiplicato per 7 supera 115).
Poiché l'insieme B dei numeri naturali per cui vale $nb > a$ non è vuoto allora ammette un minimo che chiamiamo m. (Nell'esempio $m = 17$). Ovviamente $mb > a$, mentre $(m - 1)\, b \leq a$. (Nell'esempio $16x7 \leq 115$). Ci sono due possibilità:

- $(m - 1)\, b = a$. Allora $a = qb + r$, dove $q = m - 1$ e $r = 0$;
- $(m - 1)\, b < a$.

Allora, $a = (m - 1)\, b + r$ con $r > 0$. Ponendo $m - 1 = q$ si ottiene

$$a = qb + r.$$

Resta da far vedere che $r < b$. Se, infatti, fosse $r = b$ si avrebbe

$$a = (m - 1)\, b + b = mb \text{ mentre è } mb > a.$$

Se fosse $r > b$ avremmo addirittura $a > mb$.

Seconda parte
Dimostriamo, ora, che la coppia (q, r) così trovata è unica. Ragioniamo per assurdo, cioè supponiamo che ci sia un'altra coppia (q', r') con le stesse caratteristiche di (q, r), cioè

$$a = bq + r = bq' + r' \text{ con } 0 \leq r < b \text{ e } 0 \leq r' < b$$

Se fosse $q = q'$, sottraendo $bq = bq'$ da $bq + r = bq' + r$ resterebbe $r = r'$, cioè le due coppie (q, r) e (q', r') sarebbero uguali.

Se fosse $r = r'$, da $bq + r = bq' + r'$ risulterebbe $bq = bq'$ e, semplificando per b, avremmo $q = q'$, cioè le due coppie sarebbero uguali.

Supponiamo quindi $q \neq q'$. Sarà $q > q'$ oppure $q' > q$. Supponiamo $q > q'$, cioè $q = q' + h$ con $h > 0$. Risulta

$$bq' + r' = bq + r = b\,(q' + h) + r = bq' + bh + r$$

Sottraendo bq' dal primo e dall'ultimo membro otteniamo $r' = bh + r$ cioè $r' \geq bh + r$.

Siccome $h \geq 1$, allora $bh \geq b$ da cui $r' \geq b + r$.

Si conclude che $r' \geq b$ contro l'ipotesi $r' > b$. In modo analogo si ragiona se fosse $q' > q$.

Conclusione: $q' = q$ da cui subito $r' = r$, cioè la coppia (q, r) è unica e il nostro teorema risulta completamente dimostrato.

5. Un caso particolare

Quando $r = 0$ si ha la divisione esatta della quale, nella scuola elementare, si studia la tabella.
La uguaglianza $a = bq + r$ diventa $a = bq$. Si dice, allora, che a è **divisibile** per b e che b è **divisore** di a. Si dice anche che a è **multiplo** di b e questo è **sottomultiplo** di a.
Il simbolo più usato, almeno nell'Europa continentale, per indicare la divisione è "**:**" e fu introdotto nel 1684 da Gottfried W. Leibniz (1646-1716).
Nei paesi anglosassoni, invece, per indicare la divisione si usa il simbolo $\div$ introdotto per la prima volta nel 1659 dallo svizzero H. Rahn (1622-1676).
Anche a scuola è bene studiare il comportamento "schizofrenico" dello zero nella divisione.

- 0 è **divisibile** per ogni numero $b \neq 0$ perché $0 = b \times 0$;
- 0 **non è divisore** di alcun numero $a \neq 0$ perché non esiste nessun numero q tale che $a = 0 \times q$;

- La situazione $0 : 0$ è un po' anomala perché come risultato possiamo prendere qualunque numero n in quanto $0 = 0\ n$. Siamo di fronte, quindi, ad un caso di indeterminazione.

6. Un nuovo ordinamento

La divisione introduce in N una relazione di divisibilità che spesso viene indicata con il simbolo |. La scrittura $b|a$ significa b **divide** a o anche b è **divisore** di a. Per esempio $2|30$, $5|15$, $7|21$, ecc.. Si tratta di una relazione interessante per le proprietà che possiede.
Essa, infatti, è:

- **riflessiva:** perché ogni numero divide se stesso: $a|a$;
- **transitiva:** perché se $a|b$ e $b|c$ allora $a|c$;
- **antisimmetrica:** perché se $a|b$ e $b|a$ allora $a = b$.

In forza di queste proprietà, la relazione di divisibilità è una relazione di **ordine largo**.
A differenza della relazione >, però, non è di ordine totale perché ci sono coppie di numeri diversi (come $(2,3)$, $(4,5)$, $(3,7)$ ecc.) in cui nessuno divide l'altro, cioè sono inconfrontabili.
Per questo la divisibilità è un **ordine parziale**.
In questo ordinamento il numero 1, siccome è **divisore** di ogni numero, è il **minimo**, mentre lo 0, siccome è **divisibile** per ogni numero, è il **massimo**.

7. Un mondo affascinante e misterioso: i numeri primi.

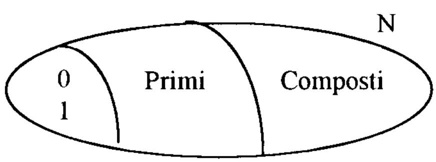
La definizione è ben nota ed è legata alla divisibilità

DEFINIZIONE.

Un numero $p > 1$ è **primo** se ha esattamente due divisori, 1 e p.

Un numero $m > 1$ è **composto** se ha più di due divisori.

Per la definizione data l'insieme N viene suddiviso in tre sottoinsiemi come mostra questo diagramma di Eulero-Venn:



Sempre in forza della definizione il numero *1* non è primo. Le ragioni di questa esclusione sono, sostanzialmente estetiche.
I numeri primi, infatti, obbediscono "alla legge del due":

- hanno solo due schieramenti;
- compaiono solo due volte nella tabella della moltiplicazione;
- sono multipli solo di due numeri *(1* e *p)*;
- hanno solo due divisori *(1* e *p)*;
- nella tabella della divisione sulla loro riga compaiono solo due risultati *(p* e *1)*;

Il numero *1* non obbedisce a nessuna di queste leggi e, quindi, è meglio escluderlo.
Anche nella scuola elementare si studia "a che cosa servono" i numeri primi. In quarta ed in quinta, infatti, si sviluppano attività di decomposizione di un numero composto nel prodotto di numeri primi.
Essi sono i "mattoni" con i quali, usando come "cemento" la moltiplicazione, si costruiscono i numeri composti.
Questo è il contenuto intuitivo del Teorema fondamentale dell'aritmetica.

Teorema 2
Ogni numero composto a si può decomporre nel prodotto di numeri primi

$$p_1, p_2 \dots p_m \text{ cioè } a = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_m.$$

Inoltre questa decomposizione è unica, se si prescinde dall'ordine dei fattori. Anche se ci fosse solo questo risultato sui numeri primi, sarebbe sufficiente per giustificarne l'esistenza e lo studio anche nella scuola elementare.

Oltre che "a che cosa servono" possiamo anche domandarci "quanti sono" i numeri primi. La risposta è stata data da Euclide più di duemila anni fa e noi la esprimiamo con il seguente

Teorema 3
I numeri primi sono infiniti.

DIMOSTRAZIONE

È una classica dimostrazione per assurdo che si basa sul teorema 2 e può essere sviluppata in poche righe.
Per rimanere in un "ambiente familiare" pensiamo i numeri scritti in base dieci, ma la cosa non è essenziale.

Supponiamo, per assurdo, che l'insieme dei numeri primi sia finito e disponiamoli in ordine di grandezza crescente: $2, 3, 5, 7, \ldots, p$.
Consideriamo il numero

$$m = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times \ldots \times p + 1$$

Essendo $m > 1$ sarà primo o composto.

- Se m è primo il teorema è già dimostrato perché $m > p$ e quindi non sta nell'insieme finito di partenza.

- Se m è composto allora dobbiamo poterlo scrivere come prodotto di numeri primi che abbiano a disposizione. Ora il 2 non può essere fattore di m perché dividendolo per 2 otteniamo 1 come resto; la stessa cosa vale per tutti gli altri numeri $3, 5, 7, 11, \ldots, p$.
  Quindi m non si può fattorizzare mediante numeri primi se essi sono solo $2, 3, 5, \ldots, p$. Assurdo per il teorema 2.
  La conclusione è che ci sono altri numeri primi oltre a quelli "proposti", cioè $2, 3, 5, \ldots p$.

Sui numeri primi si potrebbero dire tante altre cose interessanti, ma mi limito a ricordare due problemi che possono essere proposti anche alla scuola elementare.

Il primo va sotto il nome di "Congettura" di Cristian Goldbach (1690-1764).
Giocando con i numeri egli si era accorto che poteva scrivere i numeri pari maggiori di 2 come somma di due numeri primi.
Ecco alcuni esempi:

$4 = 2 + 2;$	$6 = 3 + 3;$	$8 = 3 + 5;$	$10 = 7 + 3;$
$12 = 7 + 5;$	$14 = 7 + 7;$	$16 = 13 + 3;$	$18 = 11 + 7;$
$20 = 13 + 7;$	$22 = 11 + 11;$	$50 = 3 + 47;$	$60 = 53 + 7;$
$70 = 67 + 3;$	$90 = 83 + 7;$	$100 = 3 + 97.$	

I bambini potrebbero fare questa scoperta utilizzando il crivello di Eratostene.
Goldbach continuò il suo gioco saggiando i numeri pari sino a *1.000.000* e riuscendo sempre nel suo intento.
Enunciò allora la proposizione, nota ora come congettura di Goldbach, "ogni numero pari maggiore di *2* si può scomporre nella somma di due numeri primi", ma fallirono tutti i suoi tentativi di dimostrarla.
A tutt'oggi nessuno ha dimostrato che **ogni** numero pari maggiore di *2* si può scomporre nella somma di due numeri primi e nessuno ha trovato un controesempio.

Il secondo riguarda i "numeri primi gemelli".
Essi sono le coppie di numeri primi del tipo $(p, p + 2)$ la cui differenza è *2*, come *(3,5)*, *(5,7)*, *(11,13)*, *(17,19)*, *(29,31)*, ecc..
Osservando una tavola di numeri primi ci si accorge immediatamente che i numeri primi gemelli, procedendo nella successione numerica, pur aumentando globalmente di numero, diventano sempre più rari.
Mentre, per esempio, tra *1* e *100* ci sono *8* numeri primi gemelli, tra *9.750* e *10.000* ce ne sono *3*.
Con l'aiuto di calcolatori si sono trovati numeri primi gemelli grandissimi come

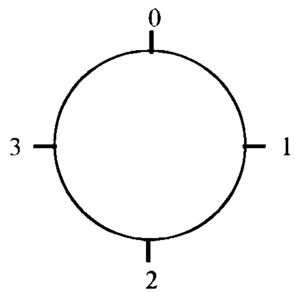
$$(1.000.000.009.649, \quad 1.000.000.009.651).$$

Il problema è di sapere se, pur rarefacendosi, i numeri primi gemelli continuano sempre, cioè sono infiniti, oppure se a un certo punto si fermano, cioè sono in numero finito.
I matematici propendono per la prima alternativa, ma questo è un fatto di cuore e non di ragione. Il problema dell'infinità o meno dei numeri primi gemelli è ancora insoluto.
Illustrare questi problemi a scuola, anche nelle elementari, contribuisce a "smitizzare" la matematica o meglio a ridare alla matematica "il suo volto umano". Essa come le altre scienze, nella sua lunga storia ha registrato vittorie folgoranti e sconfitte cocenti, forse temporanee o, forse, definitive.

8. Aritmetiche finite

Sono quelle legate a fenomeni periodici e che utilizzano un insieme finito di "numeri". Sono ben note l'aritmetica della settimana, l'aritmetica

dell'orologio e quella delle stagioni.
Discutiamo brevemente quest'ultima.
Alle quattro stagioni, incominciando dalla primavera, possiamo assegnare, rispettivamente, i numeri $0, 1, 2, 3$.
Siccome le stagioni si ripetono possiamo rappresentarle su una "linea dei numeri" circolare:



Il problema è di definire addizione e moltiplicazione in modo che il risultato sia sempre uno dei quattro numeri.
Ci viene in soccorso la linea dei numeri.
Fissato il senso orario, l'addizione è un procedere con passi di lunghezza 1 a partire dal primo addendo.

Esempio: calcolare $3 + 2$.
Si parte da 3 e si fanno 2 passi di lunghezza uno in senso orario. Si arriva a 1. Quindi

$$3 + 2 = 1$$

Per la moltiplicazione si hanno dei "salti" a partire da 0.

Esempio: calcolare $3 x 2$
Si parte da 0 e si fanno 3 salti di lunghezza 2. Quindi

$$3 x 2 = 2$$

Le tabelle della addizione e della moltiplicazione si costruiscono immediatamente.

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

x	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

Possiamo arrivare agli stessi risultati senza disturbare la linea dei numeri, ma applicando il teorema di divisibilità.

Per definire nell'insieme $A = \{0, 1, 2, 3\}$ una addizione che sia interna basta fare così:

- si sommano due numeri "more solito": $3 + 2 = 5$;
- alla coppia $(5,4)$ [4 è il numero delle stagioni] si applica il teorema di divisibilità: $5 = 4 \times 1 + 1$;
- si prende il resto come risultato della nuova addizione.

Per la moltiplicazione si procede allo stesso modo.
Le tabelle che si ottengono sono quelle di prima.

I matematici procedono in modo più formale.
Fissano un numero $m > 1$ e lo chiamano **modulo**.
Definiscono due numeri a e b **congrui** fra loro **modulo** $\boldsymbol{m}$ se divisi per m hanno lo stesso resto.
Mettono nella stessa classe i numeri congrui fra loro modulo m e definiscono l'addizione e la moltiplicazione sull'insieme di queste classi.
Esse sono sempre in numero finito perché nella divisione per m i possibili resti sono $0, 1, 2, \ldots (m - 1)$ e cioè m.
Nel caso $m = 4$ i possibili resti sono $0, 1, 2, 3$ e abbiamo l'aritmetica costruita prima.
Questo argomento non fa parte dei programmi, ma potrebbe essere proposto ai più bravi almeno nella versione "linea dei numeri".

Bibliografia

1. BAZZINI L. - FERRARI M., *Il mondo dei numeri naturali*, SEI, Torino 1986. Sviluppa con linguaggio comprensibile l'aritmetica dei numeri naturali sottolineando soprattutto gli aspetti concettuali. È un libro di studio. Ogni capitolo si chiude con alcune riflessioni didattiche e con proposte di esercizi e problemi quasi tutti risolti.

2. ARTUSI-CHINI L., *Numeri e operazioni nella scuola di base*, Zanichelli, Bologna 1985. Sono gli atti di un convegno internazionale. Molto interessanti.

3. AUTORI VARI, *Aritmetica*, Centro Ricerche Didattiche Ugo Morin, 1993. È un quaderno equamente suddiviso fra teoria e parte didattica. Di facile lettura e indubbia utilità.

APPROCCIO AL CONCETTO DI NUMERO

Lucilla Cannizzaro
Dipartimento di Matematica, Università "La Sapienza", Roma

1. L'esperienza, la matematica e la psicologia: tre componenti essenziali del numero naturale.

1.A. L'esperienza

Riflettiamo prima su alcuni esempi d'uso del numero naturale con l'obiettivo di togliere la patina di 'naturalezza' con la quale la consuetudine porta a coprire il lavoro di costruzione di molti aspetti del concetto di numero.

Situazione numero 1: ordinale o cardinale?

Il ventunesimo secolo comincerà con il 1° Gennaio 2000 oppure con il 1° Gennaio 2001? La questione non è dettata da curiosità estrosa. Potrebbe essere posta per ogni anno di storia individuale e non solo collettiva. L'essenza della questione, ed il motivo per il quale a noi interessa, è se con la data si designi un numero cardinale oppure un numero ordinale. L'esempio è autorevole, infatti, è citato da F. Enriques in 'Questioni riguardanti le matematiche elementari', (edizione 1924-1927, p. 251) all'interno di un saggio in cui l'autore analizza per il numero naturale la duplicità di aspetto cardinale e ordinale. Enriques riconosce l'importanza delle esperienze concrete e attribuisce la chiave della soluzione di dualismi di tale genere a criteri esterni alla matematica; nel nostro caso, demanda alla storia il compito di sciogliere la questione.

Seconda situazione: due modi di contare.

Noi usiamo il verbo "contare" sia in modo transitivo che in modo intransitivo. Se esplicitiamo l'azione di contare oggetti, il numero finale ci dice quanti sono gli oggetti in gioco. Ma abbiamo anche la capacità di contare per contare, cioè di recitare la filastrocca dei numeri. Esperienze di azioni ripetute, o di azioni legate a ritmi e a sequenze ordinate di suoni hanno maturato tale abilità. Il contare in senso intransitivo si basa sull'idea che ogni numero ha un successivo e, probabilmente, l'idea di infinito scatta in questo contesto. Questo secondo modo di contare è più vicino al significato ordinale dei numeri: non si contano oggetti per stabilire quanti sono. Pensiamo al modo nel quale vengono assegnati i numeri civici di una strada. Le conte per filastrocche oppure l'uso delle lettere dell'alfabeto greco (e l'esempio è storicamente fondato) hanno la stessa funzione; tengono solo conto di una azione che dà una organizzazione ed un ordine ad un insieme sulla base di una sequenza ordinata di suoni. In questo secondo modo di contare vale un principio dell'ordine stabile: i nomi dei numeri nella loro successione sono usati come contrassegni per gli elementi di una collezione, non hanno una valenza di cardinalità.

D'altra parte, quando si conta in senso transitivo, cioè, si contano oggetti per stabilire quanti sono, l'ordine nel quale si identificano gli elementi con una sequenza ordinata di numeri è irrilevante, ovvero, vi è una identità nel risultato qualunque siano le etichette che si assegnano ai singoli elementi. In questa ottica, da un punto di vista cognitivo l'aspetto ordinale del numero precede l'aspetto cardinale, che viene identificato con l'etichetta utilizzata nel contrassegnare l'ultimo degli elementi.

Riflettiamo sulla azione del cassiere di banca che conta un pacchetto di soldi; nella sua azione si coordinano il contare intransitivo e transitivo.

Terza situazione: il problema dell'ordine.

Andrea è un bambino di quattro anni. Un giorno Andrea contava così i suoi gettoni colorati : "sette, sei, cinque, ..." "Ma , Andrea?" osserva la madre. "Sbagli tutto. Si conta a partire da 1. Così: 1, 2, 3, ... Il primo numero è 1, poi viene 2, poi 3, ... " "No, rispose Andrea. A volte il primo numero è 1, a volte è 7." La madre lo guarda perplessa. Poi lo prende per mano e lo prepara per la passeggiata. Nell'ascensore che scende dal settimo piano, Andrea indica alla madre i numeri." Vedi, mamma che ho ragione io. A volte si incomincia da 7 e a volte a 1. Tu hai ragione quando si sale".

Come per l'adulto, anche per il bambino una moltitudine di esperienze suggerisce la varietà dei diversi aspetti del numero. I riferimenti mentali di volta in volta stimolati hanno radici nelle esperienze più remote: nel ritmo di una filastrocca, nella regolarità di una decorazione periodica, nelle quantità di oggetti raccolti, nei numeri che si accendono nel quadro luminoso di un ascensore. Queste esperienze tessono la trama sulla quale costruire il concetto di numero e rappresentano il collegamento tra apprendimento pre ed extra scolastico ed apprendimento scolastico.

Quarta situazione: numeri e percezione.

Elementi di organizzazione percettiva, oltre che motoria e verbale e cioè, aspetti cognitivi generali intervengono quando si associa un numero a certe disposizioni spaziali o "agglomerati" di elementi senza procedere ad un conteggio diretto; è, ad esempio, il caso delle tessere del domino o delle carte da gioco.

Una componente percettiva, o meglio di stabilità percettiva, è alla base delle capacità di assegnare ad un simbolo la rispettiva quantità ovvero, di associare numeri e numerali. Per il bambino è più semplice decodificare la scrittura 2, che non la scrittura DUE.

Vi è una componente percettiva nel processo che porta alla maturazione del concetto di unità, di entità non ulteriormente divisibile e della capacità di porre in corrispondenza biunivoca. La concettualizzazione dell'unità indipendentemente da caratteristiche qualitative, da posizione spaziale e da spazio occupato è uno degli elementi che fanno superare la difficoltà indicata da ben noti studi di Piaget sulla conservazione della quantità. Vedremo come questa concettualizzazione inevitabile, auspicabile, precoce e forte rappresenta una base ma anche un ostacolo epistemologico per il successivo sviluppo del concetto di numero razionale.

Quinta situazione: Numeri e numerali, ovvero verso il numero inteso come codice.

La prima distinzione che possiamo fare è quella tra segno linguistico (significante) e concetto-oggetto simboleggiato (significato). La lingua inglese (e la francese) prevede accanto a "number" anche il sostantivo "numeral". Il primo è una idea astratta, un concetto mentre il secondo si riferisce ad un segno grafico o ad un insieme di segni (cifre) che denotano il concetto; è il nome di un numero. Ancor più possiamo distinguere tra parole-numero del linguaggio naturale come "tre" oppure "novantuno" ed i numerali del linguaggio matematico "3" e "91". La distinzione appare più chiara se pensiamo ai numeri decimali finiti ed ai decimali illimitati: le parole-numero assumono tutt'altro aspetto ed i segni costituiti da cifre non bastano. In questi casi i matematici usano come numerali segni di altri linguaggi, è il caso, ad esempio di π oppure del numero e.

I simboli 5 nella consueta scrittura decimale, V nella numerazione romana e 101 in numerazione binaria sono tre numerali distinti per un unico numero, per un unico oggetto inserito in tre sistemi di notazione diversi; sono sinonimi. Da un punto di vista cognitivo risolviamo, in tali situazioni, problemi più generali di percezione del simbolo, di riconoscimento di simboli equivalenti. La semantica dello schema della scrittura posizionale in base dieci fa si che uno stesso simbolo abbia significati diversi (omonimi) per effetto del complesso di simboli in cui è inserito: 21, 12, 101 base due.

Sottolineiamo qui, ancora, che alcune proprietà sono intrinseche al numero, mentre altre riguardano la sua scrittura: ad esempio, 100 è un numero pari, e resta pari se lo scriviamo come "cento"; invece, dire che "100 ha tre cifre" riguarda il simbolo più che il numero: se scriviamo "cento" troviamo, in luogo delle tre cifre, cinque lettere. Così, non ha senso dire "numero binario' e si dovrebbe dire 'numero scritto in binario' oppure "numero espresso con numerali del sistema binario'. Ed ancora dire che 'un numero è pari se finisce con 0,2,4,6,8' appartiene al livello linguistico dei significanti, è come dire che Roma è una parola di quattro lettere. Vale se i numeri sono scritti in base dieci, non vale se sono scritti, ad esempio, in base tre. Allo stesso ambito di commistione di piani appartengono alcune regole d'uso come la famosa: "per moltiplicare un numero per 10 si aggiunge uno zero in fondo al numero!" (e questa espressione è vera al mutare della base scelta per scrivere i numeri!). Da un punto di vista matematico, è interessante sottolineare che la nostra numerazione posizionale permette di ritrovare nei numerali proprietà dei numeri: ad esempio, i criteri di divisibilità dei numeri interi come il criterio di divisibilità per 9. Del resto, anche i consueti algoritmi in colonna per le operazioni si riferiscono ai numerali.

Ma anche in uno stesso sistema di rappresentazione esistono più nomi per lo stesso numero-concetto; 7, 3+4, √64-1, etc. hanno lo stesso referente (in numero astratto sette). Hanno lo stesso referente ma, invero, un diverso senso.

L'uso di sinonimi è legato al concetto di identità, di uguaglianza; che è uguaglianza simmetrica di due denominazioni dello stesso oggetto. Se consideriamo: 5(base 10) = 10(base 5) abbiamo due segni grafici diversi per indicare uno stesso numero ma con senso diverso! Sotto questo profilo l'aritmetica può essere considerata come la scienza della identificazione di numerali e l'algebra come quel settore della matematica che usa le lettere dell'alfabeto come numerali generici.

I ragazzi ed, invero, i calcolatori (così come noi tutti in molte occasioni!) fanno uso del significante "=" in senso asimmetrico, non come esprimente una uguaglianza di denominazione ma come esprimente il risultato di una operazione di trasformazione, come risultato di una manipolazione.

Sesta situazione: 'altri numeri' ovvero, numeri come codici.

Nei numeri usati parzialmente o totalmente come codici, le cifre hanno ruoli diversi e non uniformi: la linea di autobus 137 non indica che vi sono almeno 137 linee diverse né che quella in questione è una linea ad un certo posto di un particolare elenco complessivo; la linea 137 è una delle linee che collegano due settori della città, uno codificato con 1 ed uno codificato con 7. Il numero di telefono non indica mai il risultato di una iterazione di passi +1, ma un percorso di nodi nella rete telefonica organizzata in centrali, cabine principali e cabine locali.

1.B. Aspetti di storia ed epistemologia della matematica.

Alla varietà di esperienze appena delineate fanno riscontro i risultati delle analisi sul concetto di numero svoltesi nella seconda metà del secolo scorso tendenti a derivare l'intero edificio della matematica dai numeri naturali. Certamente il dibattito sui fondamenti della matematica e del numero naturale ha influenzato e influenza l'ambiente culturale in cui hanno svolto e svolgono la loro attività psicologi, cognitivisti, psichiatri, didattici ed insegnanti; ed ovviamente è vero anche il viceversa.

Nella seconda metà del secolo scorso il programma di aritmetizzazione della matematica dà vita al tentativo di derivare l'intero edificio della matematica dai numeri naturali; in particolare i vari sistemi numerici (naturali, interi relativi, razionali, reali, complessi) vengono ad essere ricavati con successivi ampliamenti a partire dall'insieme dei numeri naturali. All'interno di tale tentativo si possono individuare tra gli altri quattro atteggiamenti diversi per i quali possiamo assumere come prototipiche le opere di altrettanti matematici.

Un primo atteggiamento, che possiamo far risalire a G. Peano (Sul concetto di numero, 1891 e Formulario di aritmetica, 1895), tende ad assumere i numeri naturali come prodotto di un'intuizione primaria, non ricavabile (e non interessa di ricavare) da nozioni più elementari. L'insieme dei numeri naturali è definito formalmente a partire dall'idea di zero e di successivo di un numero attraverso un insieme di assiomi tra i quali il principio di induzione. E' un atteggiamento che privilegia l'aspetto ordinale del numero naturale, con valenza ricorsiva e iterativa. Assumere il numero come concetto primitivo è posizione molto vicina a quella di identificare il numero con il segno che lo rappresenta. Come osserva Zariski (1926) nella nota IV al testo in italiano di Dedekind alcuni allievi di Peano scivolano verso questa interpretazione: i simboli forniscono la possibilità di avere una visione immediata e una immagine concreta del concetto intuitivo.

Il secondo atteggiamento, che possiamo fare risalire a G. Frege (I fondamenti dell'aritmetica, 1884), mira a fondare la nozione di numero naturale sulle nozioni primitive di insieme e di corrispondenza biunivoca tra insiemi. Due insiemi (finiti) di oggetti sono concretizzazioni dello stesso numero naturale (cardinale) se è possibile definire una corrispondenza biunivoca tra essi. L'aritmetica è considerata un ramo della logica perchè riconducibile a concetti e principi puramente logici.

Rispetto all'essenza del concetto di numero naturale Dedekind (1872) appare avere una posizione intermedia e per certi versi contraddittoria. Egli formula un sistema per molti aspetti analogo a quello di Peano tanto da fare nascere questioni di priorità e considera esplicitamente i numeri come *"un prodotto immediato delle pure leggi del pensiero"; "... libere creazioni dello spirito umano; ... indipendente dalle intuizioni di spazio e di tempo ..."* (prefazione alla prima edizione, p. 1-20). In altri punti, però, della stessa opera, propende verso una origine sperimentale dell'aritmetica ed ammette che nella attività di contare cose si riferiscono oggetti ad oggetti e che tale facoltà di base viene esercitata continuamente fin dalla nascita e su di essa si fonda la creazione dei numeri. E aggiunge: *"Mediante questo esercizio, spesso inavvertito e la formazione di giudizi e deduzioni con esso collegata, noi ci procuriamo un tesoro di verità aritmetiche, al quale più tardi si riferiscono i nostri primi maestri, come qualcosa di semplice, di evidente per sé, di dato per intuizione interna, e così accade che concetti effettivamente complessi, come quello di numero di oggetti, vengano erroneamente ritenuti semplici."* (1872, prefazione alla prima edizione, p.13).

Il terzo atteggiamento, che possiamo caratterizzare come atteggiamento geometrico, può essere riferito alla teoria delle grandezze commensurabili e si innesta sulla tradizione euclidea, trova sistemazione con la Teoria delle Grandezze, coinvolge la nozione di confronto tra grandezze omogenee e la nozione di unità convenzionale. In tale filone si inserisce la trattazione di Enriques (1924-1927).

Un quarto atteggiamento approda alla considerazione del numero sotto il profilo di codice pur prendendo forma da concezioni molto diverse tra loro. Riprende il problema della identificazione del concetto con il segno che lo evoca e della ricerca di una immagine concreta ed immediata per identificare il concetto primitivo di numero. Tale posizione si radicalizzò fino a concepire le operazioni come semplici combinazioni di figure e vide nei segni il mezzo per ridurre al finito, immediatamente percepibili e presenti all'intuizione alcuni fatti aritmetici.

Il dibattito scientifico fu vivace e pose la questione della priorità logica di una impostazione sulle altre fino a collocare l'aritmetica all'interno della teoria degli insiemi.

Una analisi critica ed una puntualizzazione della situazione viene fatta da Natucci al Primo Congresso dell'Unione Matematica Italiana nel 1939. Sono esistite posizioni pragmaticamente concilianti come quella di Dantzig secondo il quale è innegabile che ovunque esista una tecnica numerica si ritrovino compresenti tanto l'aspetto cardinale che l'aspetto ordinale. Ma grandi personalità hanno preso posizioni nette espresse anche con durezza. H. Weyl (1949) ha negato la priorità all'aspetto cardinale affermando che (trad. ital. 1967, p.41-42) *"Il criterio dell'equivalenza numerica fa uso della possibilità di costruire delle coppie: ma questa possibilità può essere verificata solo se le operazioni di correlazione sono eseguite una dopo l'altra nel tempo, e quindi dando un ordine agli elementi dell'insieme".*

Potendo e volendo sbilanciarmi ritengo come prioritario da un punto di vista epistemologico il terzo atteggiamento perché possiamo considerare gli altri basati su di esso da un punto di vista pratico e operativo. L'attività di contare è una attività di misura, di misura di una grandezza; la grandezza 'numerosità' di un insieme. L'attività di contare una quantità discreta di elementi é una attività di valutazione di una estensione: l'estensione nel tempo e nello spazio del gesto monico di considerare, vedere, chiamare ogni entità come unità separata in un contesto di altre grandezze (v. Bernardi, Cannizzaro, 1993). L'accezione di numero come misura di numerosità corrisponde forse più da vicino alla così detta definizione elementare, alla definizione empirica che porta ad assumere come primo modello rudimentale per trasferire e per registrare misure i gesti associati ad un ricordo (ritmo o aspetto figurale) prima, e le dita delle mani poi. Una sorta di iterazione pensata come sempre e ovunque ripetibile, di iterazione in potenza.

Naturalmente le varie accezioni di numero portano con sé differenti definizioni delle operazioni elementari.

Assumere come fondamentale uno o l'altro degli atteggiamenti dipende dalla concezione generale della matematica alla quale ciascuno si riferisce. Sul versante della epistemologia della matematica quindi il dibattito tra le varie posizioni non si è risolto in favore di un atteggiamento tra gli altri.

Una via di uscita dalla situazione di stallo fu tratteggiata da Piaget che assunse come punto di partenza, come 'assioma' per le sue ricerche in epistemologia genetica la perfetta coincidenza dei meccanismi di sviluppo della scienza al livello individuale e storico. In sostanza è come se il problema epistemologico dei numeri naturali fosse stato traslato nel problema di gestire tecnicamente rilevazioni empiriche sulla psicogenesi del concetto di numero. Il problema è poi stato quello della concezione della matematica alla quale Piaget ha aderito.

Vorrei qui accennare ad un mutamento generale di impostazione epistemologica e filosofica della matematica. Possiamo descriverlo in modo espressivo e, per ciò stesso, approssimato come il passaggio da Bourbaki a

Lakatos, dalla matematica come logica alla matematica come scienza per certi versi empirica, dalla conoscenza matematica intesa come scoperta di una realtà oggettiva alla matematica come costruzione di modi di interagire con la realtà. Il mutamento di rotta si è concretizzato nel cambiamento dei riferimenti fondamentali assunti per analizzare ed osservare i processi evolutivi delle conoscenze e delle competenze in matematica. Per tali motivi, oggi, accanto alle conoscenze matematiche, vengono pariteticamente considerati l'esperienza extra-scolastica, alcuni procedimenti generali di acquisizione delle conoscenze (analizzati anche in situazioni di patologia) e le specificità dell'apprendimento scolastico.

1.C. Il contributo della psicologia

Come abbiamo già accennato, alle ricerche sui fondamenti logico-epistemologici della nozione di numero, fecero eco le ricerche di epistemologia genetica di J. Piaget (Resnick-Ford, 1981). Obiettivo di tali ricerche era di rintracciare i fondamenti psicologici della nozione di numero, cioè quelle esperienze che, nello sviluppo mentale del bambino, precedono la nozione di numero e ne favoriscono l'acquisizione.

Riallacciandosi alla genesi logica proposta da Frege, Piaget indicò la nozione di insieme e di corrispondenza tra insiemi come fulcro delle esperienze che presiedono alla formazione del concetto di numero, conseguentemente, nella genesi del numero l'aspetto cardinale viene privilegiato rispetto a quello ordinale. In realtà, Piaget, già nel volume con Szemiska (1941) sulla genesi del concetto di numero, precisa che la priorità indicata è di tipo logico e non temporale e nel 1972 al 2nd ICME di Exeter, Piaget sottolinea di ritenere indissolubili, al finito, aspetto ordinale ed aspetto cardinale.

Tra il 1965 ed oggi vengono condotte da scuole diverse varie ricerche sulla formazione del concetto di numero naturale. Per tutte, eccezion fatta per quelle svolte nell'ambito della Activity Theory, il quadro di riferimento è piagetiano o perché ne approfondiscono tematiche o perché ne rettificano risultati o aspetti metodologici oppure perché elaborano quadri di riferimento alternativi. Un esempio è fornito dalle ricerche di C. Brainerd (Le origini del concetto di numero, in Le Scienze, giugno 1973, p. 84-93) che hanno rilevato, una priorità della genesi ordinale su quella cardinale e della abilità di maneggiare i numeri sul concetto stesso di numero cardinale.

Ma con le concezioni dello sviluppo cognitivo che si richiamano a Vygotskij lo sviluppo spontaneo perde di centralità ed il punto di osservazione si sposta dalla conoscenza in astratto (dai concetti) alla attività di interazione ed alla attività verbale che serve a concettualizzarla. I materiali, le rappresentazioni, la verbalizzazione, la familiarizzazione diventano elementi essenziali delle varie tappe dello sviluppo cognitivo in quanto coinvolti nel processo di contatto con il mondo esterno.

Anche alcune ricerche di ispirazione e metodologia piagetiana ponendosi in un quadro complessivo più ampio da un punto di vista cognitivo, riconducono aspetti dell'apprendimento del numero a problemi comuni con sistemi di tipo linguistico, con l'evolversi di capacità della percezione del simbolo, con il riconoscimento di simboli equivalenti. Per H. Sinclair (1988), ad esempio, affinché il codice digitale dei numeri sia fattivamente utilizzato occorre che pensiero simbolico sia attivo ed una attività cognitiva molto complessa per il bambino al suo ingresso nella scuola elementare (e per l'umanità stessa!) è mettere in relazione il sistema di segni (le cifre) con i numerali dei numeri. La Sinclair evidenzia anche come la interpretazione semantica dei numeri intervenga nella costruzione stessa del codice numerico, testimoniando che le ricerche in campo educativo e cognitivo tengono sempre più in conto il fatto che la comprensione è dinamica ed i processi cognitivi sono non lineari e complessi.

Su tale problema intervengono alcune ricerche che fondendo ispirazione costruttivista di tipo piagetiano, aspetti di teoria comportamentista e aspetti di teorie dell'istruzione, mirano a suggerire interventi didattici specifici. Davis nel 1986 riconosce ai materiali strutturati (ad esempio i Blocchi Aritmetici Multibase) una specifica funzione cognitiva. Essi hanno la funzione di sviluppare nella mente dei bambini, attraverso attività di manipolazione, paradigmi di assimilazione che permetteranno di passare all'uso di simboli scritti come mezzo per registrare azioni realmente eseguite ma soprattutto che consentiranno di riconoscere nuove situazioni come situazioni in qualche modo già note. Le procedure convenzionali hanno la funzione di incapsulare e rappresentare azioni liberando così 'spazio della memoria di lavoro.

La prospettiva della vivacità e della varietà delle ricerche psicologiche svolte al di fuori o intorno al lavoro della scuola di Ginevra può essere testimoniata dai risultati ottenuti da Hughes (1986) e Donaldson (che criticano "...le affermazioni di Piaget, secondo cui i bambini in età prescolastica (3-5 anni) sarebbero .. incapaci di pensiero logico e privi di un concetto coerente di numero." sulla base di prove che, secondo i due ricercatori, consentono di rendere manifesto quello che Piaget non aveva potuto vedere. I risultati ottenuti da Hughes documentano come il sistema simbolico formale (numerali, segni delle operazioni, sistema di scrittura posizionale) si frapponga come un diaframma tra le competenze numeriche extrascolastiche del bambino e lo sviluppo istituzionale delle stesse.

In ogni caso, il linguaggio assume un ruolo fondamentale perchè è elemento di fissazione di esperienza di natura percettiva e determina schemi di riferimento con valore evocativo; perchè il confronto tra schemi di tipo linguistico già costituiti e nuove esperienze determina un processo di riorganizzazione; perché, infine,. le espressioni linguistiche, superano la funzione di "linguaggio interiore" o "per se stessi" e divengono mezzo per comunicazioni interpersonali.

Senza dubbio il dibattito tra queste diverse impostazioni ha avuto il merito di richiamare sulle esperienze del bambino, più che sulla matematica, l'attenzione di chi ha il compito di provvedere alla sua formazione.

L'osservazione del comportamento di molti bambini nella loro attività di contare e la constatazione che per il bambino avere contato gli elementi dell'insieme non equivale a sapere quanti gli elementi siano, ha convinto Gelman e Gallistel (1978) a cercare le radici cognitive della attività di contare intesa sia in senso transitivo che in senso intransitivo. Molti bambini contando, per esempio, un insieme di sei elementi ripetono la parola "sei" due volte ed anche con intonazione di voce diversa. La prima volta serve loro per dare un nome all'ultimo elemento conteggiato, ha una accezione ordinale, è l'etichetta dell'ultimo elemento. Il secondo 'sei', invece si riferisce al numero totale di elementi presenti ed ha una accezione cardinale, e si riferisce ad un insieme di elementi. Gelman e Gallistel propongono cinque principi fondamentali per leggere il modo nel quale evolve nei bambini la concezione di numero. I primi tre principi descrivono il procedimento con il quale avviene il conteggio (il come):

1. Il contare intransitivo, contare per contare, recitare la filastrocca dei numeri è un'abilità connessa ad esperienze di azioni ripetute. Nell'espletare correttamente tale attività vale un 'principio di iniettività': i nomi dei numeri nella loro successione vengono usati come indicatori; lettere dell'alfabeto del loro ordine o le dita di mani e piedi in un certo ordine, hanno la stessa funzione. Due i requisiti essenziali: operare una partizione che distingua gli elementi già contati da quelli ancora da contare e coordinare questa operazione con l'insieme fonte delle etichette.

2. Il Principio dell'ordine stabile al quale si è già fatto riferimento illustrando la Seconda Situazione.

3. Il Principio di cardinalità è quello che consente di assegnare come proprietà ad un insieme l'ultima etichetta usata per identificare i suoi elementi. E quando le etichette saranno i numerali o le parole-numero nella corretta successione, partendo dalla prima si avrà l'atto di contare come

viene espletato dagli adulti.

4. Il Principio di astrazione fissa cosa contare: le tre attività soggiacenti ai principi precedenti possono essere applicate a una qualunque collezione di entità, anche insiemi di oggetti eterogenei, anche oggetti solo pensati.

5. Il Principio di irrilevanza dell'ordine, non interessa quale elemento riceve quale etichetta.

1.D. Proviamo una sintesi

Di fatto, oggi, l'espressione "Numero nella scuola elementare" rinvia ad una pluralità di concezioni, di approcci, di attività, di schemi, di linguaggi e si possono evidenziare nel numero naturale almeno i seguenti aspetti diversi:

- un aspetto verbale che si basa sull'abilità di recitare la sequenza dei numeri e sulla ripetizione scritta dei simboli;
- un aspetto insiemistico nel quale i numeri non hanno un'esistenza concreta autonoma come gli oggetti che ci circondano, ma sono proprietà di collezioni, di insiemi di oggetti;
- un aspetto ordinale che si richiama alla fondazione del numero naturale sulla relazione di ordine e sulla attività di contare (intransitivo) e tiene conto di esperienze di iterazione;
- un aspetto procedurale legato ad elementi iterativi ma anche percettivi, simbolici e di 'subitizing'.

L'acquisizione del concetto di numero sul piano cognitivo viene associata ai seguenti fatti: 1. i processi di acquisizione dei concetti di numero, delle conoscenze sui numeri e delle competenze su di essi sono processi complessi e non lineari; 2. è determinante la considerazione di una varietà di contesti particolari d'uso e tra questi i materiali concreti, le rappresentazioni iconiche e grafiche, i termini linguistici, i simboli; 3. la comprensione relazionale (sapere cosa fare e perché) è un processo dinamico; le conoscenze, gli schemi di riferimento, il linguaggio si sviluppano, si modificano per adattarsi alle necessità ed agli scopi e se l'adattamento non avviene si ha comprensione di tipo strumentale.

Una costruzione così complessa, pregnante e fruttuosa tanto storicamente che individualmente, giustifica il fatto che i ragazzi manifestino, durante le estensioni del concetto di numero, fenomeni di stabilità delle caratteristiche dei numeri naturali, assimilano il linguaggio ed i comportamenti di numeri relativi e razionali (ad esempio) a quelli dell'insieme dei naturali Questi comportamenti vengono focalizzati da Davydov (1972) per le prime età scolari all'interno di problemi di sviluppo delle capacità di generalizzazione; sono vasti, profondi e spesso riemergenti non appena l'attenzione è assorbita da qualche nuovo compito cognitivo e si ripresentano anche in età più elevate e in situazioni matematicamente meno elementari.

2. Sulla influenza reciproca tra conoscenza ed uso dei numeri.

La conoscenza dei numeri ed il loro uso in situazioni specifiche si influiscono reciprocamente. Anche se sul piano teorico questa osservazione può sembrare scontata sul piano dell'insegnamento gli insegnanti sanno bene quanto sia difficile trovare un effettivo alternarsi dei due momenti ed una proficua realizzazione didattica.

Per uso dei numeri intendiamo, come già sottolineato, l'attivazione di manipolazioni su di essi in ambiti significativi e motivanti sia di tipo reale che di tipo aritmetico. Le tecniche stesse delle operazioni sono nate all'interno di questo contesto e andrebbero ricollocate propriamente in esso.

Il rapporto interattivo tra uso e conoscenza dei numeri verrà affrontato tornando al problema della misura e della significatività dei contesti d'uso, esplicitando cosa intendiamo per 'senso' del numero ed accennando al problema del calcolo mentale.

E interessante registrare, prima di procedere, la posizione di Enriques circa il gioco tra esperienze vissute nella pratica ed esperienze solo immaginate a proposito dei numeri: *"Operando sopra oggetti e gruppi di oggetti materialmente dati non si arriva <in fatto> che a numeri non troppo grandi: ... Bisogna dunque ammettere che la conoscenza di cui si tratta non deriva dalla pura esperienza bruta del conteggio su classi di oggetti..... Pertanto la nostra mente supplisce alle esperienze effettuate con esperienze immaginate, la cui possibilità di ripetizione indefinita ci porge la costruzione ideale di una serie infinita di numeri."* (1924-1927, p. 252).

2.A. Il numero come modello per gestire la realtà.

Il numero viene usato come vero e proprio modello in situazioni per le quali in realtà è sufficiente considerare soltanto una parte delle sue caratteristiche; il problema è allora come mettere a tacere le proprietà sovrabbondanti e il complesso di quelle che da esse derivano.

Esemplificativo è il problema delle scale e delle misure.

I numeri con i quali vengono contraddistinti gli atleti di una olimpiade sono usati in funzione di designazione, sono pure etichette, servono per individuare gli atleti. Potrebbero essere sostituiti dalle lettere di un alfabeto o meglio da un codice alfabetico. I numeri che poi vengono usati per designare i giocatori di una squadra di palla a nuoto sono in parte usati sfruttando le potenzialità di relazioni d'ordine parziali (uno è il portiere, etc.), non certo con valenza cardinale, infatti, il numero quindici in piscina non indica che la squadra ha quindici giocatori impegnati nel gioco. Non ha senso valutare differenze o fare somme!

Consideriamo ora la durezza delle matite o la grandezza degli ami per la pesca o le taglie degli abiti. Nella assegnazione dei codici numerici l'ordinamento secondo grandezza viene fatto corrispondere ad un ordinamento degli oggetti in base al fatto che essi possiedano una maggiore o minore intensità della proprietà che interessa. Essere maggiore, minore ed "essere tra' sono espressioni del codice numerico che hanno un rispettivo nella realtà studiata non ha senso fare somme e differenze o medie. Un codice alfabetico lessicografico sarebbe equivalente. Il sistema di valutazione dell'apprendimento che fa uso delle lettere o dei numeri appartiene a questo gruppo.

Le temperature o i giorni dell'anno costituiscono, invece, scale per le quali gli intervalli tra due valori numerici hanno un ben preciso corrispettivo ed ha senso parlare di uguaglianza di intervalli o di confronto in grandezza tra intervalli; posso fare somme e differenze: ha senso parlare di media di valori e non solo di valore mediano ed ha ora senso parlare di intervallo doppio di un altro. La stessa situazione si verifica dal fornaio o in banca quando si prende il numero.

Lunghezze, pesi, densità sono invece misurati con scale nelle quali si riconoscono gli elementi, ha senso metterli in ordine, possiamo parlare di intervalli, di uguaglianza di intervalli, e uguaglianza tra rapporti e quindi si possono fare trasformazioni di scale (da chilometri a miglia, da chilometri a centimetri per le mappe topografiche, etc.). La scala che misura la numerosità di aggregati, di insiemi di unità è di questo tipo; i numeri naturali sono una scala per misurare la grandezza fisica numerosità'.

Il diverso grado di intensità della analogia tra le grandezze fisiche o gli oggetti in esame ed i numeri (con la proprietà archimedea, etc.), le loro leggi di composizione, la proprietà di ordine regola l'intensità di utilizzazione del modello dei numeri naturali. Vi sono operazioni che si applicano a quantità aventi lo stesso referente e conservano il referente, per esempio, addizione e sottrazione. Ma vi sono anche operazioni che si possono applicare a quantità aventi referente diverso e che lo trasformano; è il caso di alcune moltiplicazioni e divisioni (per esempio, il prodotto di tempo e velocità è uno spazio).

2.B. Il senso del numero

L'attività di addizionare oggetti è diversa da quella di sommare numeri scritti o detti. Contare oggetti 2+3, è diverso da ricordarsi che 2+3 è 5 oppure dall'essere sicuri che 5 è 2+3; è diverso dal dimostrare che 2+3 = 5 dentro uno specificato sistema formale.

Queste differenze sono state analizzate a partire dal fenomeno di assegnare parola-numero a piccole collezioni di oggetti, a configurazioni piccole tanto in numero quanto in spazio occupato. Emblematico è il caso delle tessere del Domino o delle carte da gioco; si riesce a stabilire il loro valore anche se non si vede alcuna delle cifre e non si vedono tutti gli elementi del seme, cioè anche se non si può procede al loro conteggio diretto.

Questo fenomeno di subitizing interessava l'ambito della lingua parlata. Prima ancora di avere sviluppato, in qualsiasi forma, il concetto di numero il bambino può dire correttamente e velocemente le parole-numero di fronte a determinare configurazioni. E' comunque importante che il bambino scopra che l'associazione tra la parola-numero e la cifra non può essere verificata, mentre la corrispondenza tra parola-numero (o cifra) e le unità nella configurazione può essere verificata si tratta non di una pura corrispondenza tra codici ma attinge significato dall'esperienza.

Un altro ambito per noi interessante riguarda le osservazioni sui procedimenti di contare tutto (counting all) e contare in avanti (counting on) messi in atto dai bambini di fronte alla richiesta di dare risposta a piccole addizioni. Si registrano modalità diverse di attuazione della procedura di conteggio e fenomeni di abbreviazione del processo per un solo addendo e solo successivamente per entrambi fino alla esecuzione della somma senza alcun processo di counting.

Attualmente si stanno studiando fenomeni di subitizing legati ad aspetti concettuali. Spostare la maestria degli alunni dalla procedura di conteggio diretto verso procedure più sintetiche, verso processi aritmetici contribuisce a fare maturare il concetto di numero che è sintesi di aspetti procedurali e aspetti concettuali. Senza forme di subitizing mentale non si hanno veri progressi in aritmetica; è in questo ambito che prende significato l'espressione: 'senso del numero".

Il senso del numero si evidenzia in attività significative (di tipo concreto e di giochi con numeri) nelle quali occorre calcolare, misurare, confrontare, fare stime. Avere familiarità con i numeri, è mettere in relazione numeri con la propria esperienza, ma anche instaurare estensioni, prolungamenti di tale esperienza attraverso i numeri; è saper calcolare anche usando algoritmi non standard, di tipo locale o legati a particolari contesti concreti (monete) o particolari numeri (calcolo mentale).

Calcolare in un contesto aiuta a fare una stima preventiva del risultato e ad interpretare il risultato di un algoritmo vagliandone la ragionevolezza.

Calcolare in un contesto, però, non risulta sufficiente a sviluppare una competenza numerica generale. Osservazioni condotte sul comportamento di bambini brasiliani evidenziano che calcolare per uno scopo, in un contesto (calendario, monete, etc.) matura una accuratezza nel calcolo contestualizzato superiore a quella manifestata nella applicazione di algoritmi di calcolo scritti ed addirittura indipendente da essi. Inizialmente i bambini non riescono a ragionare sui numeri se non in presenza di una rappresentazione delle specifiche numerosità coinvolte e le rappresentazioni non si equivalgono.

L'adulto possiede rappresentazioni mentali di tutta una serie di azioni concrete. Al bambino va offerta la possibilità (tempi ed occasioni) di crearsele e le prime rappresentazioni sono ottenute attraverso attività di conteggio; giudizi di uguaglianza o non uguaglianza di quantità, da richieste di addizionare, di sottrarre, di mettere in moto strategie di soluzione di compiti.

I ragionamenti numerici dei bambini non fanno uso delle proprietà formali delle operazioni aritmetiche. I numeri dei bambini non godono delle usuali proprietà. La commutatività dell'addizione nasce dalla fusione del principio di irrilevanza dell'ordine nel conteggio e da credenze e concezioni sull'addizione sviluppate in attività di tipo concreto; una sorta di 'protocommutatività' nasce dalla osservazione degli effetti pratici nella inversione dell'ordine con cui vengono eseguite certe operazioni concrete. Per Verganud (1986) nella azione pratica si manifestano dei veri e propri 'teoremi in atto' inconsapevoli.

Il senso del numero è una caratteristica circa la quale ci possiamo esprimere in termini evolutivi. L'evoluzione di tecniche di conteggio e una loro standardizzazione non esauriscono tale evoluzione e talvolta la bloccano. Il dibattito sul rapporto tra conoscenze concettuali e conoscenze procedurali è vivace e vede posizioni contrapposte ben analizzate da Carpenter (1986). Secondo Carpenter il fatto che il bambino non commetta quando lavora al livello concettuale e di significato tanti errori come quando lavora al livello di esecuzione di procedure mostra che le competenze procedurali si fondano su quelle concettuali ma anche che le sole conoscenze concettuali non portano a completa maturazione la destrezza nell'uso di procedure.

Il primo tentativo consapevole e dichiarato di riconoscere al senso del numero lo status di competenza cognitiva viene da Greeno (1991) attraverso una metafora ambientale. Il dominio concettuale dei numeri e delle quantità è come un ambiente concettuale nel quale ciascuno dovrebbe sapere ed imparare come trovare risorse ed usarle per attuare progetti e risolvere problemi. L'attività di una persona in questo 'ambiente' viene descritta come quella di un cuoco in una cucina.

La attività di soluzione di problemi, le strategie per risolverli possono essere considerate come una attività contestualizzata, attività all'interno di 'campi di esperienza' ben caratterizzati (Boero, 1990). Prendiamo in esame il campo di esperienza delle monete.

Contando le monete il bambino prende familiarità con una situazione ricca dal punto di vista della convenzione sociale, basti pensare al fatto che il valore è praticamente indipendente dalla grandezza, dalla pesantezza, dal materiale. Ma il campo di esperienza delle monete è anche ricco da un punto di vista matematico; nel conteggio dei pezzi usati il numero ha talvolta un valore ordinale (se l'azione è una azione ben pianificata) e cardinale ma solo sul numero dei pezzi, 2.500 lire è oggetto diverso dal numero 2.500.

Nel conteggio dei valori i bambini hanno da lavorare su numeri dei quali conoscono il suono o la scrittura ma forse solo come codice numerico non ancora associato al sistema posizionale di scrittura; di tali numeri conoscono alcune composizioni ricorrenti riferite alle parole-valore ed ai pezzi-moneta.

2.C. Il senso del numero ed il calcolo mentale

Molte difficoltà, anche in successivi livelli scolari, sono legate al comportamento anomalo del numero 0. Per evitare che lo 0 sia visto con sospetto, è bene che compaia spesso negli esercizi proposti, sia fra i dati sia come risultato: dopo tutto, anche se molte fra le antiche civiltà non disponevano in proposito di un nome o di un simbolo, il numero 0 va senz'altro accettato come numero naturale.

Non si deve escludere la possibilità di parlare di misura 0: l'area di un segmento è 0, così come un segmento che si riduce ad un punto ha lunghezza 0.

Nel cammino verso una progressiva conquista del mondo dei numeri come enti che sono nello stesso tempo risultati e operatori di procedimenti di calcolo è possibile introdurre attività di calcolo attraverso il gioco o la gara, sollecitare più modalità diverse di calcolo rapido per uno stesso esercizio ed individuare schemi grafici, diversi dai consueti algoritmi in colonna, da potere, poi, utilizzare come organizzatori mentali del calcolo rapido.

3. Le operazioni

3. A. Le operazioni fra numeri naturali intesi come cardinali oppure come ordinali.

I vari approcci all'aritmetica portano con sé congruenti definizioni per le operazioni, in particolare per la somma ed il prodotto. La situazione si può schematicamente riassumere nel seguente quadro:

1a. Definizione tradizionale di addizione: la somma di due numeri a e b è quel numero a cui si arriva contando b unità a partire da a.

1b. Definizione insiemistica di addizione: per determinare la somma di due numeri a e b si considerano due insiemi A e B disgiunti (cioè senza elementi in comune), che abbiano rispettivamente a elementi e b elementi. Il numero degli elementi dell'unione $A \cup B$ è la somma cercata.

2a. Definizione tradizionale di moltiplicazione: il prodotto di due numeri a e b si ottiene sommando tanti addendi uguali ad a quante sono le unità di b.

2b. Definizione insiemistica di moltiplicazione: per determinare il prodotto di due numeri a e b si considerano due insiemi A e B, che abbiano rispettivamente a elementi e b elementi. Il prodotto cercato è il numero degli elementi del prodotto cartesiano AxB, cioè il numero delle coppie ordinate che si possono formare prendendo il primo elemento in A e il secondo in B. (Questa volta non è necessario che i due insiemi siano disgiunti).

Entrambe le definizioni di addizione e di moltiplicazione andrebbero precisate. Nel primo caso bisogna chiarire che cosa si intende per unità, nel secondo dobbiamo dimostrare che cambiando la scelta degli insiemi A e B, fermo restando il numero dei loro elementi, giungiamo allo stesso risultato.

Dal punto di vista didattico, comunque, entrambe le definizioni sono accettabili e proponibili ed è importante tenerle presenti entrambe. L'interpretazione del prodotto tra numeri naturali che evoca il prodotto cartesiano di insiemi si presta bene al disegno di schemi (con una chiara valenza percettiva) ma ha veramente senso come modello solo quando il problema, di per sé, attribuisce un significato alle coppie ordinate. Tale interpretazione consente sì di giustificare la proprietà commutativa ma nasconde un problema infatti, si allude al fatto che il numero delle coppie di AxB è uguale al numero delle coppie di BxA ma si tace che AxB è diverso da BxA. Tale diversità è sottolineata dal ricorso alla sfera dei significati: comprare tre confezioni di cinque fazzoletti non è sempre uguale a comprarne cinque di tre fazzoletti anche se il numero totale dei fazzoletti è identico. L'interpretazione insiemistica, inoltre, presenta qualche svantaggio organizzativo rispetto alla interpretazione ingenua infatti, non appena i fattori hanno due cifre, è noioso contare tutte le coppie ordinate per ottenere il prodotto. Entrambe, inoltre, si rivelano inadatte al passaggio dal prodotto tra numeri naturali al prodotto tra frazioni e tra numeri razionali.

Da un punto di vista strettamente matematico entrambe le definizioni hanno 'estensioni' significative: quella insiemistica consente di estendere il discorso ai numeri cardinali infiniti, mentre la definizione elementare si trasforma, in logica e in informatica, in una definizione induttiva.

Ma per maggiori dettagli sulla definizione induttiva di operazioni ed in particolare del prodotto rinvio all'intervento di P. L. Ferrari contenuto in questo stesso volume.

3.B . Le operazioni fra frazioni e numeri razionali.

Che i comportamenti e le proprietà in aritmetica siano indotte da esempi e vero con particolare forza per i più giovani. Sul modello della torta per sommare 1/7 a 2/7 basta sommare i numeratori. Analogamente, non sarà difficile avere successo nella esecuzione di sommare 1/2 ad 1/4; il bambino può portare positivamente a termine questa somma senza nulla conoscere dell'algoritmo di calcolo fra frazioni e del massimo comune denominatore; può farlo guidato dalla interpretazione geometrica. La difficoltà a considerare la frazione come numero 'per sé' emerge chiaramente in errori tipici; ad esempio, l'operazione (1/2) + (2/3) potrà dare come risultato 3/2, oppure 3/3, oppure 3/5 trattando il numeratore come nell'esempio precedente e scegliendo per il denominatore uno dei tre sull'onda di singole decisioni. Si perde di vista che nessuna delle tre composizioni rispetta un principio di coerenza dei 'significati': come è possibile che due quantità, entrambe non inferiori ad un mezzo, messe insieme risultino a mala pena completare un intero?

In sostanza il fenomeno di stabilità delle caratteristiche dei numeri naturali e di assimilazione di altri insiemi numerici a questi ultimi risulta più vasto e profondo (ed anche in età insospettatamente elevate) di quanto si sia disposti ad ammettere a priori. Ma gli algoritmi per le operazioni vanno completamente modificati, a conferma che passare dai naturali alle frazioni non è una semplice estensione di un concetto, ma una vera e propria riformulazione concettuale.

Una corretta gestione delle definizioni formali delle operazioni tra razionali viene raggiunta solo dopo la conquista del concetto di frazioni equivalenti, e quindi del fatto che ogni singolo numero razionale va inteso come l'insieme di tutte le frazioni tra loro equivalenti: 3/2, 6/4, 9/6, 12/8, ..., 90/60; producono lo stesso effetto se applicate alla stessa quantità perchè, rappresentano un unico numero razionale.

Il passaggio dalla moltiplicazione come somma ripetuta basata sulla attività elementare del contare alla moltiplicazione come operatore che può far diminuire e che diviene fulcro del ragionamento proporzionale non può essere ricondotto alla semplice estensione di concetti precedenti, viene richiesta in questo caso una vera e propria riconcettualizzazione.

Soffermiamoci su una questione differente, quella delle proprietà delle operazioni.

In generale un messaggio implicito ma fortissimo che raggiunge i ragazzi è che tutte le operazioni aritmetiche sono associative e commutative e che le due proprietà sono strettamente correlate. Come vedremo successivamente l'uso della calcolatrice può contribuire a mettere in risalto aspetti inerenti le regole d'uso delle operazioni, ovvero inerenti alla sintassi che le governa: nell'insieme dei numeri macchina non vale la proprietà associativa della somma. Possiamo provare, a livello adulto, a rintracciare esempi di operazioni aritmetiche non associative e commutative, oppure non commutative ed associative, oppure, infine, né associative né commutative. Il problema didattico è se, con quali esempi od in che forma proporre ai ragazzi questo punto di riflessione che, comunque è opportuno venga acquisito al livello di docenti.

3.C. Il prodotto tra numeri, ovvero la storia di 'un mutante'.

Da un punto di vista didattico l'avvio alla moltiplicazione può anche essere fatto attraverso i cosiddetti schieramenti che interpretano una somma ripetuta in forma percettivamente evidente e con una organizzazione e struttura dei dati essenziale. Le esperienze dello scendere le scale a due a due, quello di disporsi in fila per tre sono familiari al bambino. Uno schieramento si presta poi ad essere rappresentato simbolicamente in modi diversi: $2+2+2+2+2+2$, $6+6$, $2\cdot 6$, $6\cdot 2$, rinforzando l'idea che lo stesso risultato si ottiene con procedimenti diversi.

La moltiplicazione, come concetto e come termine linguistico, significa ripetere, riprodurre, partire da un dato per avere uno maggiore. Non potrebbe essere altrimenti, ma, proprio in questo ha sede una tra le radici più salde delle difficoltà che si incontrano nel considerare prodotti che coinvolgono almeno un numero decimale o una frazione ed a maggior ragione, un numero decimale o una frazione inferiore ad uno, casi nei quali il risultato è inferiore ad almeno uno dei due numeri di partenza. L'idea o il modello di 'schieramento' può essere, per così dire, estesa a semplici casi nei quali è coinvolto un numero razionale o due semplici numeri razionali: 'mezzo' (cioccolato, biscotto, ...) ripetuto tre volte; oppure, il tre ripetuto mezza volta! Ma è assolutamente impensabile gestire geometricamente o per calcolo mentale il prodotto di 11/4 per 5/31, così come 11.567 per 564. Gli algoritmi di calcolo nascono proprio per gestire tali situazioni.

Come già accennato, il campo dei significati della moltiplicazione non si esaurisce con il riferimento alla somma ripetuta. Vi è una interpretazione della moltiplicazione che coinvolge anche un cambiamento 'dimensionale', di grandezza fisica. Ne sono esempi il calcolo della spesa totale sapendo la spesa unitaria e la quantità acquistata, oppure, il calcolo dello spazio percorso conoscendo la velocità oraria ed il tempo di percorrenza. Possiamo pensare anche al calcolo dell'area di un quadrato di lato assegnato ed alla costruzione di un quadrato di area doppia di quella di un quadrato assegnato.

Ma la accezione di moltiplicazione come "fattore di scala" come "rapporto di trasformazione" (per esempio: 1 a 2 oppure 2 a 1) non è legato alla considerazione di enti geometrici. Possiamo pensare in termini economici quali, ad esempio, a incremento dei prezzi, a sconti per liquidazioni, a inflazione, etc. o in termini demografici, per esempio, a variazione di popolazioni. L'ambito geometrico rimane, secondo noi, la fonte privilegiata di rappresentazioni mentali di riferimento.

Da un punto di vista matematico si tratta di ordinarie moltiplicazioni tra numeri razionali o reali e le difende sono pertinenti solo al piano dei significati. In situazioni come queste nasce la questione delle marche che possiamo considerare tipica dell'allontanamento dai significati.

4. La famiglia degli insiemi numerici

I vari sistemi numerici ovvero i numeri interi relativi, i numeri razionali, i numeri reali ed i complessi vengono ad essere ricavati con successivi ampliamenti a partire dall'insieme dei numeri naturali (si veda il contributo di M. Ferrari in questo volume). Una effettiva successione 'storica' dovrebbe considerare gli insiemi dati 'in potenza', con l'attenzione posta su singoli elementi; o caratteristiche comuni a più di essi; in tale prospettiva i numeri con segno sono nati dopo le frazioni unitarie, ad esempio. La successione degli ampliamenti $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ risponde ad esigenze di tipo algebrico-strutturale e considera gli insiemi numerici dati nel loro complesso, 'in atto'. Tale costruzione rientra nel tentativo di derivare l'intero edificio della matematica dai numeri naturali che ha preso vita nella seconda metà del secolo scorso e si basa sul Principio di Permanenza delle Proprietà Formali di Peacock (1834). Tale principio di tipo logico richiede che in ogni ulteriore passo dell'estensione si debbano ritrovare le caratteristiche del passo precedente. Da un punto di vista cognitivo è possibile enunciare un omologo Principio di Permanenza che è pertinente a fenomeni di generalizzazione così come descritti da Davydov per la costituzione di prototipi e per la estensione di essi a nuovi oggetti. In sostanza, i fenomeni di stabilità delle caratteristiche dei numeri naturali e di assimilazione di comportamenti in altri insiemi numerici a questi ultimi sono più vasti e profondi di quanto si sia disposti usualmente ad ammettere. Cambiare ottica, abbandonare gli schemi precedenti, abbandonare le caratteristiche di lavoro con i numeri naturali significa approdare ad un nuovo concetto, identificare nuovi comportamenti, operare nuove classificazioni, stabilire nuove relazioni. Si pongono in campo processi di vera e propria riconcettualizzazione più che di 'prolungamento' concettuale. Sui due principi di permanenza è possibile ancorare due diverse strategie didattiche.

4.A. Da situazioni concrete alle frazioni ed ai numeri razionali

Ci limitiamo a frazioni e numeri assoluti, mettendo per ora da parte le difficoltà che si incontrano con l'estensione ai numeri con segno.

A buona ragione le frazioni costituiscono un problema didattico ed è opportuno moltiplicare le occasioni d'uso in contesti differenziati, senza pretendere chiarezza immediata e sicurezza nella verbalizzazione o nelle operazioni, senza, soprattutto, introdurre gli algoritmi formali di calcolo sulle frazioni.

Soffermiamoci ora sulla molteplicità di interpretazioni 'concrete' legate al concetto di frazione, ovvero, sui possibili approcci al concetto di frazione e di numero razionale.

Una frazione può indicare una relazione tra parte e tutto (due cittadini italiani su cinque dichiarano di apprezzare la matematica, 2 bambini sui 15 della prima classe ..., 2 doppioni su dieci figurine; 2 casi favorevoli su 6 casi possibili nel lancio di un dado); la stessa idea viene espressa assumendo come tutto il valore convenzionale di cento e parlando così di percentuali (nella situazione di prima, il 20% della popolazione italiana dichiara di apprezzare la matematica).

Ma una frazione indica anche il rapporto tra due quantità omogenee ovvero, tra due parti di uno stesso universo (ogni due italiani che apprezzano la matematica, tre la detestano, nella classe il rapporto tra maschi e femmine è di 3 a 2, etc.).

Sempre con una frazione si indica il rapporto tra quantità non omogenee; è il caso di 80 chilometri percorsi in 2 ore per il quale calcoliamo di avere viaggiato alla velocità di 40 chilometri l'ora; è il caso della densità di popolazione come rapporto tra numero di abitanti e superficie della regione abitata. In tale accezione, il rapporto inverso non è usualmente considerato, spesso non ha senso e non ha nome; nulla vieta di pensare alla superficie media disponibile pro capite o al tempo impiegato a percorrere l'unità di misura per le lunghezze di fatto, però, non viene introdotta alcuna grandezza che corrisponda, ad esempio, al rapporto fra tempo e spazio.

Il ricorso alle frazioni per parlare di densità (di popolazioni, di sostanze, etc.) suggerisce la possibilità di proporre ai ragazzi situazioni che anticipino nascostamente concetti rispetto ad una loro trattazione sistematica come elementi di una struttura numerica.

Ma come sappiamo, il concetto di frazione non si esaurisce qui. Vi sono accezioni delle frazioni più lontane da interpretazioni concrete o meglio, per le quali il riferimento sono numeri. La frazione può indicare un quoziente, ovvero, una divisione indicata (è l'accezione classica mediante la quale si amplia l'insieme dei numeri naturali e interi all'insieme dei numeri razionali, imponendo che equazioni del tipo $2x = 3$ siano sempre risolubili); teniamo presente, però, che 4/2 oppure 11/8 sono per un bambino oggetti molto diversi sul piano cognitivo: nel primo caso si rimanere, da un punto di vista operativo, nell'ambito dei numeri naturali, mentre nel secondo caso si deve estendere l'ambiente di operatività costruendo un insieme numerico diverso.

La frazione (ad esempio, 2/3) è uno dei possibili nomi di una classe di frazioni, la classe di equivalenza corrispondente a 2n/3n al variare di n nei naturali; ma anche, può indicare un operatore moltiplicativo. La frazione è la trascrizione di un numero decimale (0,5 è la frazione 1/2); inoltre, si può intendere come coordinata di un punto sulla retta graduata (punti tra due punti a coordinate intere, ma anche punto tra due punti a coordinate frazionarie. La frazione è un elemento di un insieme dotato di una relazione d'ordine (confronto tra frazioni) ma può essere considerata anche come elemento di una struttura algebrica, con operazioni e loro proprietà (frazioni complementari rispetto all'unità, frazioni inverse rispetto all'unità, ..).

La molteplicità, la complessità e la non linearità nelle quali immergiamo, oggi, il concetto di frazione danno maggior conto della instabilità tipica delle abilità di lavoro con le frazioni (variazioni di contesto, di accezione, di rappresentazione, di simboli determinano cambiamenti e capovolgimenti di prestazioni). In questa stessa ottica appare accettabile l'ipotesi che un intreccio tardivo delle diverse accezioni blocchi la maturazione del concetto e consenta solo un uso forzato, improduttivo ed egualmente instabile degli aspetti formali. E' allora interessante proporre di anticipare concetti o singole accezioni di concetti: è il caso della densità per le frazioni, introdotta da alcuni ricercatori attraverso esempi concreti quali la dolcificazione del tè, la farcitura di dolci con uvetta passa, l'intensità del gusto di una bibita di succo di arancia ed acqua.

Vale la pena di registrare altre due difficoltà insite nel concetto di frazione. Una prima difficoltà investe un concetto che potremmo dire primitivo: quello di unità. Con le frazioni, il numero 1 non è più l'elemento atomico, indivisibile: l'unità diviene divisibile. Il concetto di unità è inizialmente legato alla capacità di contare; quindi, con il sistema di scrittura posizionale, i bambini si abituano a considerare unità composte, non atomiche ma pur sempre costituite da più unità indivisibili. Con la comparsa delle frazioni si passa dal predominio del contare sul misurare (se ci limitiamo ai naturali il misurare si riduce al contare) al predominio del misurare sul contare. Ed in questa rielaborazione del concetto di unità vengono usati (a complicare le cose!) i vecchi numeri naturali, sia pure separati dal nuovo simbolo "/". Inoltre, con le attività di misura l'unità, ovvero ciò che viene considerato '1' si riveste di criteri di arbitrarietà; l'unità di misura si può scegliere, purché sia omogenea con la grandezza da misurare.

La seconda difficoltà riguarda il ruolo reciproco giocato dall'insieme dei numeri naturali e dall'insieme delle frazioni (e più tardi dei numeri razionali). L'insieme dei naturali funziona da sorgente e da trampolino per le frazioni e per i numeri razionali. Aspetti concettuali, simbolici ed algebrici vengono per così dire prolungati dall'insieme dei naturali alle frazioni ed ai razionali ma, nel contempo, subiscono una profonda "mutazione". E siccome i numeri naturali vengono riassorbiti all'interno dell'insieme dei razionali, la mutazione in un certo senso contagia gli stessi numeri naturali. Fra i numeri razionali, oggetti nuovi, ritroviamo oggetti simili (quasi uguali) ai numeri naturali, come le frazioni 6/2 oppure 12/3. Per ciascuno di questi disponiamo di molti simboli: per esempio 2/1, 4/2, 30/15, 34/17, ... sono nomi diversi dello stesso razionale, il razionale che si comporta come il numero naturale 2. Le frazioni appena citate e tutte le altre a loro equivalenti sono il numero razionale 2; quest'ultimo simbolo designa il nuovo oggetto (il razionale 2) rispetto a quello conosciuto prima (il naturale 2). Le operazioni nuove sui nuovi oggetti saranno definite in modo da non essere in contrasto con le operazioni vecchie sui vecchi oggetti: la somma di 4/2 (una frazioni che equivale al naturale 2) e di 6/3 (una frazione che equivale al naturale 3) dovrà essere una frazione che agisce come il 5 dei naturali. E così è. Questa esigenza, che investe allo stesso tempo la semantica (cioè il significato) e la sintassi (cioè il modo formale di trattare i simboli), viene soddisfatta dal ben noto procedimento per il calcolo della moltiplicazione tra frazioni.

Familiarità e dimestichezza d'uso con oggetti ancora non ripuliti influenzano positivamente una "riconcettualizzazione" corretta. Così si può suggerire, seguendo una ispirazione di tipo storico, di iniziare a lavorare (anche molto presto) come gli egiziani (Bunt et alii, 1980), che si limitavano alle cosiddette unità frazionarie (1/2, 1/3, 1/4, etc.). Si eseguiranno semplici confronti tra frazioni (in particolare con lo stesso denominatore) e semplici operazioni attraverso il gioco del "completamento ad 1". Si possono proporre somme e confronti di segmenti per trovare, in modo concreto e convincente, i risultati di somme e confronti di frazioni. Lavorando sull'orologio, si riescono a confrontare facilmente gli effetti prodotti da due rotazioni, da due eseguite una di seguito all'altra. E così per altri modelli o rappresentazioni, prestando attenzione al fatto che ogni modello o rappresentazione presenta pregi e difetti. Ma su questo punto torneremo in seguito.

4.B. Verso i numeri negativi.

Anche il passaggio dai naturali agli interi non è una semplice estensione di un concetto ma una vera e propria riformulazione concettuale. Tale riconcettualizzazione è testimoniata anche al livello matematico, per esempio, mentre l'insieme dei naturali ammette minimo, l'insieme degli interi non lo ammette; i due insiemi hanno ordinamenti di tipo profondamente diverso.

I ragazzi quando operano al di fuori di particolari contesti (temperature, biglie perse, denari chiesti in prestito o figurine scambiate), spesso ragionano come se il segno meno fosse elemento accessorio e separato dalla parte numerica vera e propria. E così, per i ragazzi, -12 è più grande di -3 perché 12 è più grande di 3. L'ambito delle temperature è di sostegno ad una corretta concettualizzazione, mentre l'ambito dei risparmi e debiti o scambi di figurine non lo sono: un debito di venti è più grande di uno di cinque; ed anche storicamente il percorso è stato identico. In verità l'ambito dei numeri naturali, già noti, fornisce due indicazioni contrastanti ma non dello stesso peso; nella pratica è più forte l'indicazione non valida. Dal lavoro sui numeri naturali riaffiora che 12 è più grande di 3 più facilmente di quanto non riaffiori che dati due numeri possiamo sempre raggiungere il più grande aggiungendo 1 un numero sufficiente di volte al numero più piccolo.

E' da notare che di tale difficoltà si possono leggere le tracce anche al livello matematico: occorre definire nuovi enti, le coppie ordinate di naturali, definire una equivalenza di coppie, etc.

Anticipando quanto diremo parlando dei modelli annotiamo che il modello della retta graduata con i negativi interpretati come coordinate dei punti simmetrici dei positivi rispetto allo zero rinforza l'errore originario. D'altra parte passare dalla interpretazione di 3-2 come differenza tra 3 e 2 alla sua interpretazione sulla retta graduata come spostamento a partire dal punto 3 di due passi indietro e da quest'ultima alla interpretazione, sempre sulla retta graduata, di 3-2 come la traslazione +3 (ovvero spostamento di tre unità in senso positivo) composta con la traslazione -2 (ovvero spostamento in senso negativo di due) significa passare dal lavoro su numeri al lavoro su operazioni, dal lavoro su punti della retta al lavoro su traslazioni sulla retta.

Se si individuano e distinguono aspetti concettuali e aspetti di processo e trasformazione il simbolo -2 sarà al contempo indicatore di un processo e del risultato di esso. La ambiguità del simbolo rappresenta anche la sua flessibilità.

4. C. I decimali limitati: immobili in mezzo a venti contrapposti.

I numeri decimali limitati hanno uno strano destino. Dopo essere stati introdotti con una certa enfasi nelle Scuole Elementari, vengono usati più raramente nelle Medie, fino a scomparire o quasi nelle Superiori. I matematici indicano l'insieme dei naturali con $\mathbb{N}$, gli interi relativi con $\mathbb{Z}$, i razionali con $\mathbb{Q}$ ed i reali con $\mathbb{R}$, i reali con $\mathbb{C}$ ma non dispongono nemmeno di una lettera per indicare convenzionalmente l'insieme dei decimali limitati.

Per contro, i numeri decimali limitati ritornano spesso nell'uso corrente e in modo specifico nelle calcolatrici e la loro importanza pratica è ben motivata: con i decimali si riesce ad approssimare un qualunque numero reale (con l'approssimazione desiderata: a meno di 1/100 o di 1/1000, ecc.); inoltre, in un contesto di misura si considerano via via i vari sottomultipli decimali dell'unità ed è spontaneo il ricorso ai decimali. Nel passaggio naturali-decimali limitati gli algoritmi per le operazioni si generalizzano senza difficoltà; tutte le questioni su di essi si riportano facilmente ai naturali. Tali decimali limitati richiedono una riconcettualizzazione molto meno netta del passaggio naturali-frazioni. La stessa riconcettualizzazione dell'unità' nel caso dei decimali viene solo sostituita da un'unità di ordine inferiore.

L'introduzione dei decimali limitati non eguaglia, però, l'introduzione delle frazioni, non risulta arricchita la struttura algebrica degli interi: per rendere sempre possibile l'operazione di divisione (purché il dividendo sia diverso da 0) occorre considerare tutte le frazioni.

5. I modelli dei numeri e degli insiemi numerici

Noi trattiamo del concetto di numero attraverso la mediazione di sue rappresentazioni. Ciascuna ha una sua valenza specifica rispetto a singole caratteristiche concettuali, a caratteristiche, a proprietà delle operazioni, a relazioni d'ordine o d'altro tipo tra gli elementi.

I vari modelli non sono né intuitivamente, né didatticamente identici. Ogni modello porta con sé la necessità di aggiustamenti e talvolta, insieme a indubbi vantaggi (pratici, generali e didattici), anche veri e propri limitazioni e intralci. Ogni modello o rappresentazione presenta pregi e difetti.

Abbiamo incontrato o nominato modelli concreti come il quadrato dei cento numeri o i blocchi aritmetici multibase, ora ci soffermeremo su altri.

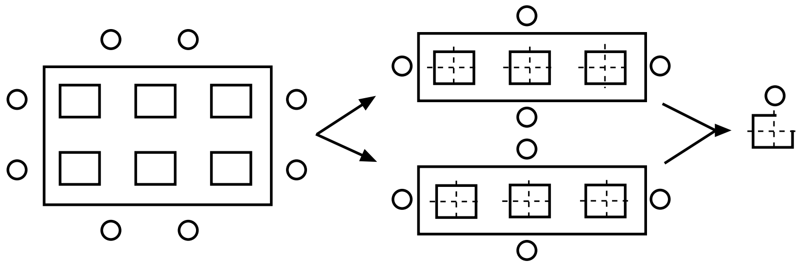
5.A. Rappresentando le frazioni

La classica rappresentazione di una frazione come parti di una figura piana (la classica torta!) ha certamente pregi di immediatezza e, con opportune cautele, è di facile manipolazione. Su un pentagono opereremo facilmente con 'i quinti' o anche con 'i decimi' di un intero' ma avremo problemi a lavorare con 'i settimi'. Tale situazione però, ha il difetto di legare saldamente l'idea di frazione a quella di parte inferiore all'intero, a quella di operatore che riduce la quantità sulla quale agisce. E' opportuno allora dare enfasi a frazioni maggiori di 1, a frazioni che 'aumentano' la quantità iniziale.

Nel modello della 'torta' vediamo intuitivamente come funziona" la somma di unità frazionarie con lo stesso denominatore, possiamo operare i primi confronti fra frazioni. La 'torta', il cerchio consentono tacitamente di scivolare su una rappresentazione 'proto-simbolica'.

Rappresentazioni diverse permettono di elaborare algoritmi pratici diversi. Ad esempio, con la rappresentazione lineare per costruire i 2/5 di un segmento è facile procedere, indifferentemente, prendendo prima il doppio del segmento dato e quindi dividerlo per 5: oppure, dividere per 5 e poi moltiplicare per 2. Situazioni di questo genere rinforzano l'idea che lavorare con le frazioni non vuol dire lavorare all'interno dell'unità e contribuiscono a fare assimilare il comportamento di operatori interi e frazionari che i ragazzi percepiscono spontaneamente come diversi. Ovviamente le due strategie non hanno uguale contenuto di immediatezza anche perchè è presente l'idea che non muta il risultato invertendo l'ordine delle operazioni concrete.

Naturalmente vi sono, poi, modelli legati a singole e concrete situazioni problematiche. Pensiamo di dovere distribuire 6 cioccolate tra 8 bambini. In figura è schematizzata la soluzione di un allievo che.... non si perde d'animo!



E' intrigante pensare al gioco incrociato di aspetti numerici e geometrici nella determinazione dell'insight del problema, nell'insorgere della intuizione della strategia risolutiva.

Analizziamo alcuni dei diversi modelli con i quali interpretare e dai quali estrarre il concetto di operatore frazionario Non tutti sono ugualmente proponibili ad età precoci. Possiamo vedere 1/4 come azione concreta da eseguire su un insieme di oggetti, su un quadratino di carta, etc. ed allora l'operatore divide il tutto in 4 parti e ne prende 1. Ma 1/4 è realizzabile sul piano del foglio come una particolare corrispondenza di una retta su di un'altra che contrae, che restringe i segmenti, portando il punto 4 sul punto 1, la lunghezza quattro sulla prima retta nella lunghezza uno sulla seconda.. Questo modello rende più semplice l'introduzione dell'idea di prodotto di due operatori, nel senso di due operatori applicati successivamente, e di operatore frazionario su una frazione ma, è piuttosto laborioso.

Uno schema combinatorio risulta sicuramente più adeguato per la rappresentazione del prodotto di operatori e può risultare intuitivo in situazioni come la seguente: vogliamo calcolare la probabilità che Paolo vada a sedersi in un certo posto nel laboratorio; vi sono sei tavoli di forma quadrata ed ogni tavolo prevede quattro posti. Paolo sceglie per primo e non ha preferenze. La rappresentazione della situazione con un diagramma ad albero ci fornisce un modello agile ed espressivo ed il prodotto di 1/6 per 1/4 viene eseguito senza alcuna conoscenza di algoritmi formali..

5.B. La retta graduata o linea dei numeri

Partiamo dal caso della retta graduata (o linea dei numeri) come modello dei numeri interi e delle frazioni e, più tardi, anche dei reali. Il lavoro sulla retta graduata si fonda e rinforza l'uso dell'unità di misura; si fonda e dà risalto della costruzione ricorsiva dei numeri naturali ed al loro ordinamento; ovviamente, non serve a spiegare o introdurre, per esempio, il sistema posizionale di scrittura dei numeri (struttura sovrapposta di tipo linguistico).

La rappresentazione dei naturali sulla retta graduata crea aspettative per una estensione degli insiemi numerici, apre la strada a battezzare nuovi punti ed a trovare per esempio, i numeri interi relativi ed a trovare 'molte' frazioni tra due frazioni date. Ecco allora possibile inserire una caratteristica nuova rispetto a quelle dei numeri naturali: tra due qualunque frazioni ve ne è sempre un'altra. Le frazioni sono dense mentre i naturali (così come gli interi relativi) erano disposti in modo discreto, cioè separati tra loro; tra i naturali 3 e 55 vi sono tanti naturali ma tra i naturali 3 e 4 non ne troviamo alcuno. Abbiamo ottenuto qualcosa di nuovo, ma abbiamo anche perso qualche cosa: nell'insieme delle frazioni è impossibile, meglio non ha senso, passare da una frazione data alla frazione successiva. Le frazioni non ci servono per contare. Nel modello della retta graduata è possibile evidenziare anche che vi sono tanti, infiniti nomi con i quali etichettare uno stesso punto.

Abbiamo visto che nell'introduzione dei numeri relativi, il segno meno e il segno più vengono percepiti come elementi accessori, in qualche modo separati dalla parte numerica vera e propria. Questo intralcio determinato dall'uso dei numeri assoluti (privi di segno) può venire scalfito facendo riferimento al modello della retta graduata con qualche accortezza. Se sulla retta i numeri negativi, o meglio, i punti a coordinata negativa vengono interpretati come i simmetrici dei punti a coordinata positiva rispetto al punto zero, la concezione scorretta che -3 sia più piccolo di -12 viene forse rinforzata. La modellizzazione che aiuta a superare questo problema è quella che considera numeri positivi e negativi come traslazioni sulla retta (inizialmente graduata solo a destra dello zero). Traslazioni verso destra, positive, sono associate a numeri con segno più e traslazioni verso sinistra sono associate a numeri con segno meno. Quest'ultima interpretazione però, coinvolge, come abbiamo visto, una riconcettualizzazione delle operazioni insieme a quella dei numeri.

Il modello della retta graduata risulta utile per rappresentare le operazioni di addizione e di sottrazione mediante scorrimenti nei due versi. La moltiplicazione, tra interi o tra frazioni non viene chiarita dal modello, infatti, moltiplicazione e divisione risultano associabili a dilatazioni o contrazioni della retta e si perde la sua carica di intuizione ed immediatezza.

5.C. Il modello degli 'Insiemi'

Prima di tornare a leggere i Programmi del 1985 per fare veramente tesoro del più recente passato nell'ottica di prenderne parzialmente le distanze ma anche di non rigettare proposte valide, è forse utile esplicitare che se è innegabile che il concetto di "due" nasca anche dall'osservare e confrontare insiemi con 2 elementi il ricorso, però, alla teoria degli insiemi per fondare didatticamente l'idea di numero naturale mostra oggi, limiti sia teorici sia didattici:

Innanzi tutto gli 'Insiemi' sono un modello per i soli naturali e non si adatta in alcun modo né agli interi negativi né alle frazioni. Inoltre:

1. dal punto di vista del rigore matematico, una tale introduzione dei numeri naturali non è soddisfacente: l'insieme di tutti gli insiemi con 2 elementi è così grande che dà luogo a situazioni molto complesse se non paradossali (il che contrasta in modo netto con il fatto che si intende definire semplicemente il numero 2).

2. in un'ottica più strettamente didattica ci appare oggi fuori misura intraprendere una strada certo di non facile comprensione per giustificare la parola "due", ben conosciuta e correttamente usata dai bambini che arrivano in prima elementare. Oggi, molto più che in passato siamo consapevoli di potere e dovere valorizzare le precedenti esperienze degli alunni.

3. il procedimento insiemistico, del resto, non è di alcun aiuto quando si vogliano introdurre e studiare numeri più grandi, come mille o un milione. Più in generale: può essere lecito sacrificare il rigore matematico per facilitare la comprensione di un concetto ma è ingiustificabile una trattazione complicata e al contempo non rigorosa di un concetto intuitivamente noto.

4. in una azzardata sintesi fra matematica moderna e insegnamento tradizionale, qualcuno parlava (e parla) di insiemi formati da non meglio precisate "unità". Ora, gli elementi di un insieme, come già sottolineava Cantor più di un secolo fa, devono essere ben distinti fra loro (per le loro proprietà, o per la loro posizione nello spazio, etc.), il che rende possibili, ad esempio, le operazioni di intersezione e di unione; considerare un insieme con gli elementi tutti uguali fra loro è matematicamente errato e didatticamente fonte di pericolose confusioni.

5. l'approccio insiemistico descritto è adatto per i numeri naturali, ma non è riproponibile per i numeri decimali, gli interi relativi, i razionali, i reali, ecc. Non che metodi generali siano per se stessi da prediligere; buoni metodi 'locali' non sono da eliminare ed inoltre, come vedremo più avanti, difficoltà nel generalizzare un approccio si ripresentano quasi inevitabilmente ogni volta che si estende il sistema numerico. La questione centrale è che di fatto manca una definizione generale di numero ed in qualche caso esplicitamente non interessa, come Peano stesso ammette lucidamente.

E per le operazioni abbiamo già esaminato alcune difficoltà matematiche e didattiche inerenti alla interpretazione del prodotto tra naturali come cardinalità dell'insieme 'prodotto cartesiano di insiemi'.

5.D. Le calcolatrici tascabili

Fra i vari ambienti concreti nei quali far lavorare i ragazzi non vanno dimenticate le calcolatrici tascabili: si tratta di strumenti ormai talmente diffusi in ogni famiglia da non poter essere ignorati a Scuola. Certo, non va incoraggiata la pigrizia intellettuale dei ragazzi che si illudono di non dover più imparare le tabelline, o che comunque ricorrono alla calcolatrice anche quando la complessità del calcolo non lo richiede: questi saranno, in seguito, proprio gli "utenti" più maldestri dello strumento.

Se è scontato anche per gli studenti che il ricorso alla calcolatrice evita calcoli noiosi o difficili, meno ovvio è che i ragazzi siano consapevoli della necessità di controllare, ogni volta, l'ordine di grandezza dei risultati (qualche errore nel digitare è praticamente inevitabile).

Per favorire e raffinare le capacità di calcolo, si possono organizzare giochi con la calcolatrice per esempio, come cercare per tentativi un numero (naturale) che moltiplicato per 23 dia come risultato un numero maggiore di 1000, ma il più piccolo possibile, oppure, .dire se è plausibile che 59.750:25 sia uguale a 2390 e poi andare a verificare con la calcolatrice.

L'uso della calcolatrice consente di fare maturare una sensibilità, un senso del numero anche su numeri grandi ed anche su numeri non interi. Si può, ad esempio, proporre di partire da 87 e sottrarre numeri non interi (non necessariamente uguali tra loro) per arrivare più vicino possibile a 23 in 4 passi; dopo un primo tentativo si può correggere la propria risposta in modo da ottenere un risultato migliore del precedente.

Si può pensare per esempio, di suggerire partite a due o gare lavorando sull'esercizio precedente oppure, per fare un secondo esempio, chiedendo di individuare un numero che moltiplicato per 11 dia come risultato un numero interno all'intervallo di estremi 560 e 595.

E' possibile con la calcolatrice raffinare la capacità a cercare esempi e controesempi, verificare senza troppa fatica, in un numero grande di casi e per numeri non banali, la plausibilità di ipotesi e congetture prima di arrivare a scrivere (e di potere scrivere) equazioni, prima di avere gli strumenti algebrici e dimostrativi per dimostrane la correttezza.

Una attività è, ad esempio, quella di sperimentare (in questo caso la verifica sperimentale è veramente prossima alla dimostrazione!) che l'ultima cifra del quadrato di un numero n dipende solo dalla cifra delle unità di n; e analogamente si può lavorare sull'ultima cifra dei cubi.

E' da notare che la semantica cui ci si riferisce lavorando con la calcolatrice è quella dei numeri stessi: ora il concreto è costituito dai numeri. Ma osserviamo che i numeri naturali della macchina non sono tutti i numeri naturali. Al pari del più sofisticato calcolatore, una calcolatrice accetta solo un numero finito di numeri. I numeri della macchina sono pochi ma per di più si comportano in modo difettoso.

L'insieme dei numeri macchina non è l'insieme dei numeri razionali, non è nemmeno l'insieme dei numeri decimali limitati, non è nemmeno un sottoinsieme nel quale vi sono caratteristiche algebriche affidabili e generalizzate.

L'uso della calcolatrice mette, anche, in risalto aspetti inerenti le regole d'uso delle operazioni. E' possibile verificare concretamente che mentre, anche per la macchina; 999 + (675+936) = (999+675)+936, per altre operazioni non si registra proprietà analoga.

Per alcune macchine, ad esempio, 10000000 + (0,9999999 + 0,0000001) è diverso da (10000000 + 0,9999999) + 0,0000001: i numeri macchina oltre che lacunosi sono difettosi! Nell'insieme dei numeri macchina la proprietà associativa della somma non vale universalmente, ma solo localmente.

Ed ogni macchina ha i propri 'difetti' legati a problemi di troncamento di cifre. E così nella stessa macchina: 10000000 + 0,1= 10000000 + 0,5 = 10000000 + 0,9 =10000000 + 0,9999999 = 10000000. Cioè esistono molti numeri indifferenti localmente; lo 0 rimane l'elemento neutro universale.

Ma nonostante tutti i guai segnalati ed altri immaginabili, le calcolatrici tascabili non sono un modello peggiore di altri: come ogni altro modello, ogni altro concreto presentano difetti. Questi difetti ci appaiono più vistosi perché li rileviamo in un modello che nella fantasia collettiva è infallibile e matematico 'per eccellenza'.

Sotto il profilo didattico, si può aggiungere che se l'insieme dei numeri usati dai bambini sono insiemi numerici lacunosi e difettosi non lo sono meno alcuni insiemi numerici sui quali lavoriamo con vantaggio e soddisfazione noi adulti cioè l'insieme dei numeri-macchina.

Per superare con i ragazzi la fase di esplorazione a pezzi dell'insieme dei numeri razionali si aspetterà la scuola secondaria superiore. Per l'insieme dei numeri reali si aspetterà l'università.

Queste considerazioni non tolgono importanza al fatto di lavorare con (e parlare di) alcune frazioni nella scuola elementare, con numeri razionali nella scuola media, con reali nella scuola secondaria. Altra questione è la conquista degli insiemi numerici come dati complessivamente e nella loro molteplicità di attribuzioni (algebriche, di ordine, di densità, di completezza,).

La calcolatrice, come strumento per lavorare, sottolinea il ruolo delle approssimazioni nel calcolo; i seguenti esempi (relativi a modelli fra i più diffusi) si prestano a semplici discussioni ad età appropriate:

10 000 000 + 0,1 = 10 000 000

(1/7)*7 = 0,9999997 0,000001*0,000001 = 0

Il calcolatore pare sostituire l'uso delle frazioni con un più generalizzato uso dei numeri decimali. In realtà viene esaltato l'uso di semplici e comode frazioni e la produttività del calcolo mentale con esse. Fare mentalmente un terzo (o i quattro terzi) di una quantità divisibile per tre è più facile e sicuro che non farlo usando il calcolatore con tutti i suoi 'difetti' di arrotondamento!

Dopo avere introdotto i numeri con segno almeno sulla retta e come passi orientati su di essa si possono proporre attività con la proibizione ad usare il tasto 'meno' e fare lavorare con i numeri con segno.

Alcune cautele di carattere didattico sono auspicabili vi sono, infatti, interrogativi ancora aperti come per esempio se la soluzione per tentativi ed errori interferisca con l'esecuzione dei procedimenti e riesca ad agganciare processi di metacognizione non riducendosi a reiterati tentativi casuali.

Indicazioni Bibliografiche

Bazzini, L., Ferrari, M., 1986, *Il mondo dei numeri Naturali*, SEI

Bernardi, Cannizzaro, 1993, C'è numero e numero. *La Vita Scolastica*, XLVII, 8, 24-34

Boero P., 1990, L'insegnamento della matematica nel progetto "Bambini, maestri, realtà", *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 13, 7-43.

Bunt, L.N.H.., Jones P.S. & Bedient J.D., 198), *Le radici storiche delle matematiche elementari*, Zanichelli

Bonotto, C., 1991, Numeri razionali. Approcci diversi e relative sperimentazioni didattiche, *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 14, 7, 607-638

Cannizzaro L:, 1996, dispensa ciclostilata su: Approccio al Numero Naturale, Seminario Nazionale di Ricerca in Didattica della Matematica, Pisa

D'Amore, B. & Oliva, P:, 1996, *Numeri. Teoria, storia, curiosità, giochi e didattica nel mondo dei numeri.*, Franco Angeli

Dantzig, T., 1939. Number: the language of science. Macmillan. traduzione italiana, (1965). Il *Numero: linguaggio della scienza.* La Nuova Italia

Davydov, V. V., 1972, (traduzione italiana 1979). *Gli aspetti della generalizzazione nell'insegnamento.* Giunti Barbera, (traduzione inglese del 1990, a cura del NCTM)

Dedekind, R., 1872, traduzione italiana e note storico-critiche di Zariski, O., 1926, *Essenza e significato dei numeri. Continuità e numeri irrazionali.* Stock

Dell'Aquila, G. & Ferrari, M., 1994, La lunga storia dei numeri interi relativi, (parte prima e seconda), *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 17, 3, 148-265

Enriques, F., 1924-1927. I numeri reali. Parte prima: I numeri naturali. In Enriques, F. (a cura di), *Questioni riguardanti le matematiche elementari*, 231-283. Zanichelli., ristampa anastatica, 1983, Zanichelli.

Frege G., 1884, *I fondamenti dell'aritmetica.*

Gelman R. & Gallistel C. R., 1978, The childs hunderstanding of numbers. Hontario University Press

Greeno J, 1991, Number sense as situated knowing in a conceptual domain. Journal for Reasearch in Mathematics Education, 22, 3, 170-218

Hart, K., 1986, Le frazioni sono difficili, in Chini Artusi, L., *Numeri e operazioni nella scuola di base*, Zanichelli

Hughes M., 1986, Children and Number, Basil Blackwell

Marchini, C., 1988, Sulle modalità di introduzione dei numeri naturali, *L'Educazione Matematica*, IX, II, vol. 3, n: 2, p. 77-96

Natucci, A., 1939. *Saggio di una classifica dei metodi usati nell'aritmetica generale.* In Atti del 1° Congresso dell'Unione Matematica Italiana, 512-520

Peano, G., 1891, Sul concetto di numero. *Rivista di Matematica*, 1, 87-102, 256-267

Peano, G., 1895, *Formulario di aritmetica.* Bocca

Piaget J.& Szeminska A., 1941, La Genèse du nombre ches l'enfant, Traduzione italiana 1968, La Nuova Italia

Resnick, L. B. & Ford, W. W., 1981. The psychology of mathematical instruction, LEA, Hillsdale, trad. italiana 1991, *Psicologia della matematica e apprendimento scolastico*, SEI

Vergnaud, G. (1986). Il campo concettuale delle strutture moltiplicative e i numeri razionali, in Chini Artusi L., *Numeri ed operazioni nella scuola di base*, Zanichelli

Weyl, H. (1949). Philosophy of mathematics and natural science. Princeton University Press. traduzione italiana (1967). *Filosofia della matematica e delle scienze naturali.* Boringhieri

LOGICA E TEORIA DEGLI INSIEMI NELLA DIDATTICA DELL'ARITMETICA

Pier Luigi Ferrari
Dipartimento di Scienze e Tecnologie Avanzate - Università di Torino, sede di Alessandria

IL LINGUAGGIO DEGLI INSIEMI

Gli insiemi possono assumere ruoli diversi nei curricula di matematica della scuola elementare: vi sono progetti che non li utilizzano per niente, altri che li usano come linguaggio per descrivere enti matematici (numeri, figure geometriche ecc.) già introdotti in diverso modo, altri ancora li introducono come elementi fondamentali per la definizione dei concetti matematici, a partire da quello di numero naturale. I programmi in vigore nella scuola elementare italiana sottolineano, da un lato, come "*... soprattutto nei primi anni di scuola, il linguaggio naturale ha ricchezza espressiva e potenzialità logica adeguate alle necessità di apprendimento.*", dall'altro che "*... la simbolizzazione formale di operazioni logico-insiemistiche non è necessaria, in via preliminare, per l'introduzione dei numeri naturali e delle operazioni aritmetiche.*".

Anche nelle ricerche sull'apprendimento matematico il ruolo degli insiemi, negli ultimi anni si è notevolmente ridotto. Se si esaminano, ad esempio, gli indici degli atti dei convegni internazionali organizzati dal gruppo di ricerca in psicologia dell'educazione matematica (PME), si vede che nelle ultime edizioni pochissimo spazio è stato dedicato a ricerche specifiche sull'idea di insieme, e che solo una piccola parte dei rapporti di ricerca fanno riferimento agli insiemi. D'altra parte, il linguaggio degli insiemi continua ad essere usato abbastanza largamente in matematica, anche se la teoria degli insiemi non ha più quella centralità che le si attribuiva qualche decennio fa.

Una continuazione della disputa 'insiemi sì/insiemi no' è quindi anacronistica e fuorviante. In questo ciclo di lezioni non si vuole suggerire un approccio piuttosto che un altro, ma fornire strumenti per una valutazione critica delle diverse proposte didattiche, per l'interpretazione dei programmi in vigore e per capire fino a che punto l'idea di insieme sia utilizzabile dal punto di vista didattico. Non è un mistero che in alcune scuole elementari italiane e in alcune case editrici gli attuali programmi sono stati interpretati, per quanto riguarda la matematica, come un incoraggiamento ad estendere il ruolo degli insiemi, trascurando così gli espliciti inviti alla cautela e le indicazioni di segno opposto.

Si cercherà soprattutto di mettere in luce alcune tipiche forzature, tradizionalmente presenti in libri e schedari, cercando di non limitarsi a rilevarle ma di coglierne le radici più profonde. Tali forzature sono dannose non tanto perché corrispondono a imprecisioni matematiche quanto perché contribuiscono a un rapporto equivoco con la matematica come disciplina.

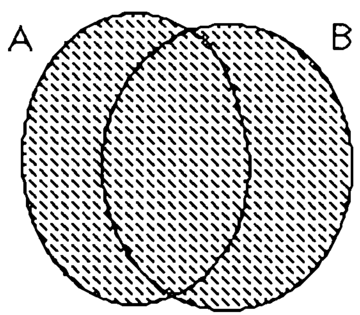
In questa traccia la trattazione della logica e della teoria degli insiemi è necessariamente affrettata e lacunosa. Si fa presente che alcune nozioni sono illustrate non in quanto ritenute didatticamente necessarie o rilevanti ma per consentire confronti critici fra i diversi approcci. Per maggiori informazioni e approfondimenti si consiglia di riferirsi a Bernardi et al. (1991b).

Operazioni booleane e connettivi proposizionali

Fra insiemi sono definite alcune operazioni (unione, intersezione, complemento, ...) e alcune relazioni (appartenenza, uguaglianza, inclusione, ...) che sono rilevanti anche da un punto di vista logico. Non è necessario sottolineare la differenza profonda fra le *operazioni* su insiemi, che hanno come argomenti insiemi e producono insiemi, e le *relazioni* fra insiemi, che hanno come argomenti insiemi e producono affermazioni, passibili di essere, fra l'altro, vere o false. Le operazioni di unione, intersezione, complemento corrispondono a operazioni linguistiche su proposizioni (operazioni logiche): disgiunzione, congiunzione, negazione.

Unione

Dati gli insiemi A, B, l'insieme unione di A e B è l'insieme che ha come elementi tutti gli elementi che appartengono ad A oppure appartengono a B. Nel diagramma di Venn a lato l'unione degli insiemi A, B è rappresentata dalla superficie tratteggiata.



In formula:

per ogni x, $x \in A \cup B$ se e solo se $x \in A$ o $x \in B$.

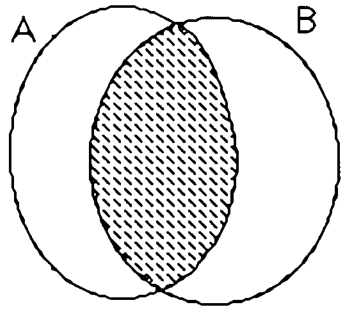
Il connettivo /o/ va interpretato in senso inclusivo: un elemento di $A \cup B$ può appartenere solo ad A, solo a B o a entrambi.

Questo uso della /o/ non è il solo, e nel linguaggio quotidiano si possono individuare altri usi, anche più comuni.

Intersezione

Dati gli insiemi A, B, l'insieme intersezione di A e B è l'insieme che ha come elementi tutti gli elementi che appartengono sia ad A sia a B.

Nel diagramma di Venn a lato l'intersezione degli insiemi A, B è rappresentata dalla superficie tratteggiata.



In formula:

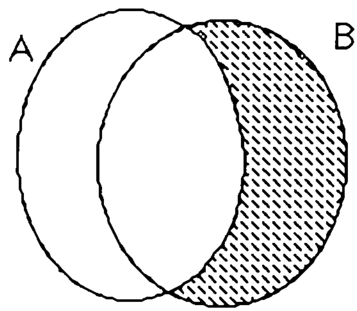
per ogni x, $x \in A \cap B$ se e solo se $x \in A$ e $x \in B$.

L'interpretazione della /e/ è meno problematica: un elemento di $A \cap B$ deve appartenere a entrambi gli insiemi A, B.

Ciò non toglie che nel linguaggio quotidiano la /e/ venga usata con vari altri significati, alcuni dei quali non riconducibili a un connettivo logico.

Complemento

Il complemento di un insieme è una costruzione un po' più delicata perché in generale è un'operazione binaria: il complemento di un insieme A rispetto a un insieme B è l'insieme degli elementi di A che non appartengono a B.



In formula:

per ogni x, $x \in \complement_B A$ se e solo se $x \in B$ e $x \notin A$.

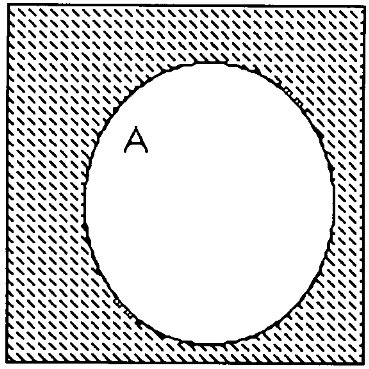
In molti casi, però, la si considera come unaria, in quanto l'insieme B che funziona da ambiente può essere fissato una volta per tutte.

In tal caso il complemento di A è semplicemente l'insieme degli elementi che non appartengono ad A.

In formula:

per ogni x, $x \in \complement_A$ se e solo se $x \notin A$.

Se si rappresenta l'insieme ambiente con un rettangolo, nel diagramma a sinistra la parte tratteggiata è il complemento di A.
Come per altri connettivi, anche per la negazione si possono trovare usi diversi nel linguaggio quotidiano.



Relazioni fra insiemi: appartenenza, inclusione, uguaglianza
La relazione di appartenenza è semplice e intuitiva solo in apparenza; a un primo livello viene interpretata come una relazione fra entità di natura diversa, gli elementi e gli insiemi (ad esempio, insiemi di numeri, di oggetti, di persone ecc.). Se si sviluppa la teoria degli insiemi, anche solo per definire i numeri naturali, diventa necessario abbastanza presto considerare insiemi di insiemi, creando situazioni nelle quali le interpretazioni intuitive di insieme come contenitore sono spesso inadeguate (si pensi agli insiemi che hanno come elemento l'insieme vuoto, ecc.).

In base alla relazione di appartenenza si definiscono altre relazioni importanti, come quella di inclusione fra insiemi. Si dice che un insieme A è incluso (o è contenuto) in un insieme B se tutti gli elementi che appartengono ad A appartengono anche a B.

In formula: $A \subseteq B$: per ogni x, se $x \in A$ allora $x \in B$.

La relazione di uguaglianza fra insiemi si definisce di solito a partire dall'inclusione. Si dice che due insiemi sono uguali se ciascuno dei due è incluso nell'altro (quindi: se hanno gli stessi elementi).

In formula: $A=B$: $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.

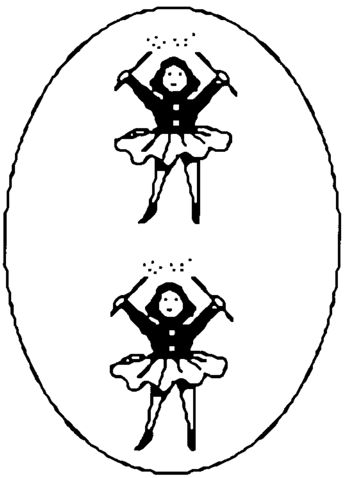
Da questa definizione di uguaglianza segue che un insieme è determinato solo dai propri elementi.

La distinzione fra le relazioni di appartenenza e quella di inclusione non è didatticamente semplice, anche perché in ambiti non scientifici non è sempre necessaria una caratterizzazione così fine e nel linguaggio quotidiano manca quindi una terminologia precisa che sia in grado di distinguerle nettamente.

Rappresentazioni di insiemi
Gli insiemi, in matematica, possono essere rappresentati in modi diversi. Quando un insieme è finito, si può dare l'elenco dei suoi elementi fra parentesi graffe. Ad esempio, {a, e, i, o, u} può rappresentare l'insieme

delle vocali dell'alfabeto italiano. In realtà, se dicessimo che a, e, i, o, u rappresentano numeri naturali, l'insieme dato rappresenterebbe un sottoinsieme di $\mathbb{N}$. Una rappresentazione simile, con l'aggiunta di puntini di sospensione può essere usata, quando non vi è pericolo di ambiguità, anche per alcuni insiemi infiniti. Ad esempio, $\{0, 2, 4, 6, \ldots\}$ rappresenta l'insieme dei numeri naturali pari. In molti casi l'insieme viene definito attraverso una proprietà che caratterizza i suoi elementi. Ad esempio, l'insieme dei numeri naturali pari può anche essere rappresentato da $\{x \mid x \in \mathbb{N}$ e x è multiplo di $2\}$. Naturalmente un insieme può essere rappresentato come il risultato di operazioni insiemistiche (unioni, intersezioni, complementi, prodotti cartesiani, ...) applicate ad altri insiemi.

Nella scuola primaria gli insiemi spesso vengono rappresentati materialmente, attraverso raggruppamenti di oggetti, o graficamente, attraverso diagrammi di Venn. In questi diagrammi l'appartenenza insiemistica viene rappresentata attraverso l'appartenenza spaziale di un elemento grafico a una regione del piano delimitata da una curva chiusa. Questo può creare ambiguità e spesso rappresenta una relazione diversa da quella desiderata.



Il fatto che si possano formare insiemi di ogni genere fa sì che, dato un diagramma di Venn, non sempre sia chiaro se gli elementi dell'insieme siano i segni tracciati sul foglio (ad esempio, i disegni) o gli oggetti rappresentati dai segni.

Per rendere la questione più concreta poniamoci questa domanda: quanti elementi ha l'insieme di sinistra? La risposta dipende da come si interpretano le rappresentazioni.

Che cosa rappresentano i due disegni 'uguali'? Se stessi (cioè, due disegni 'uguali')? Una medesima bambina? Due bambine realmente 'uguali' (come due gemelle)? Due bambine diverse ma rappresentate allo stesso modo per comodità?

In rappresentazioni di questo tipo le relazioni fra simboli e referenti dei simboli è mutevole. Ad esempio, è possibile che uno stesso simbolo (nel linguaggio quotidiano diremmo 'due simboli uguali') rappresenti oggetti diversi? In certe rappresentazioni grafiche (pittogrammi, ...) può accadere, in matematica normalmente è ritenuta una situazione da evitare. Un discorso analogo vale per la relazione di appartenenza: in qualche caso gli elementi dell'insieme sono disegni o simboli interni al diagramma di Venn, in altri casi (come nei diagrammi presentati per illustrare le operazioni su insiemi) si considera l'intera superficie delimitata.

Esistono altri modi di rappresentare insiemi: molti di essi sfruttano attività o rappresentazioni concrete (generalmente spaziali) per rappresentare un concetto che è estremamente astratto. Secondo alcuni autori il passaggio all'astrazione non richiede ulteriori mediazioni. La maggior parte dei ricercatori contemporanei ritengono tali posizioni inadeguate rispetto alla complessità dei processi di apprendimento della matematica. Queste divergenze sono in gran parte legate ai diversi ruoli che, nei processi di apprendimento, si attribuiscono ai significati .

Inserisco a questo proposito qualche considerazione sul ruolo del contesto nell'apprendimento della matematica nella fascia d'età interessata alla scuola primaria. Spesso approcci di natura diversa assumono implicitamente l'ipotesi secondo cui il comportamento dei bambini dipende essenzialmente dalla struttura (logica, matematica, o altro) dei problemi (nell'accezione più ampia del termine) che vengono loro presentati, e che i contesti in cui i problemi vengono inseriti abbiano soprattutto la funzione di stimolare l'interesse dei bambini ma non ne influenzino sostanzialmente le risposte. Esistono tuttavia esperienze che portano a conclusioni opposte. Il problema del trasferimento delle conoscenze e delle capacità di risolvere i problemi da un contesto all'altro si è rivelato problema di complessità maggiore rispetto alle ipotesi degli psicologi e degli educatori strutturalisti.

Logica e linguaggio quotidiano

Esistono notevoli differenze tra il linguaggio quotidiano e quello della logica matematica. Nel linguaggio quotidiano la situazione comunicativa e principi generali di economia e di pertinenza selezionano le frasi ammissibili, indipendentemente dalla loro verità. Una frase è caratterizzata non solo dal proprio contenuto ma anche dal fatto di essere stata detta o scritta. Occorre non dimenticare che viene pronunciata o scritta solo una minima parte delle frasi possibili. Una frase del tipo “Oggi è una bella giornata”, in molti contesti comunicativi, non serve tanto a comunicare un fatto, probabilmente già noto all'interlocutore, quanto a mostrare un atteggiamento non ostile, proporre l'inizio di una chiacchierata. Lo stesso scopo non sarebbe raggiunto da una frase come “Due più tre fa cinque”, che esprime un contenuto evidentemente vero ma provocherebbe seri dubbi sulla sanità mentale del pronunciante. Invece una frase come “Oggi Tizio non è arrivato a scuola in ritardo” comunica soprattutto l'informazione che Tizio normalmente arriva a scuola in ritardo, che è il motivo più naturale per cui la frase diventa degna di essere pronunciata. Inoltre nel linguaggio quotidiano la possibilità di verificare le affermazioni una per una ne mette spesso in secondo piano i legami reciproci. In molti contesti quotidiani si usano criteri di economia, quando si fa un'affermazione si cerca di dire più che sia possibile. Affermazioni come "Con un miliardo di lire posso comprare una caramella" esprimono indubbiamente relazioni vere ma al di fuori dei canoni di accettabilità della comunicazione quotidiana. Questo spiega anche la resistenza a chiamare 'rettangolo' un quadrato o ad accettare che la relazione '$2 \leq 100$' è vera alla stessa stregua di '$2 < 100$'.

Nel linguaggio matematico si presenta spesso l'esigenza di ricondursi a un numero limitato di proprietà (dati di un problema, assiomi di una teoria, ...) e quindi i legami tra le affermazioni diventano più rilevanti. Nella risoluzione di un problema, ad esempio, è necessario non solo esprimere delle relazioni vere, ma anche mostrarne i legami con i dati iniziali. Questo contribuisce a mettere in secondo piano i principi di economia. Un'altra differenza è data dal fatto che in logica matematica c'è una netta distinzione fra proposizioni false (come "$12 = 7+4$") e sequenze di simboli senza senso (come "$12+ = \cdot$"). Nel linguaggio comune si tende a confonderle: con 'frase senza senso' si etichetta talvolta una frase falsa o anche una frase vera ma non pertinente alla situazione comunicativa in atto.

Nel linguaggio quotidiano, poi, a differenza che nella logica, il fattore tempo è rilevante. Ad esempio, l'ordine temporale in cui pronunciamo una frase serve a trasmettere significati. In espressioni come "Il quadrilatero ABCD" l'ordine temporale in cui sono pronunciate le lettere A, B, C, D (o l'ordine spaziale in cui sono scritte) viene generalmente sfruttato per rappresentare un qualche ordinamento dei vertici corrispondenti. Inoltre, nel linguaggio quotidiano generalmente non si fa troppa differenza fra proprietà di singoli individui e proprietà dell'insieme da essi costituito. Frasi come "I moschettieri erano 4" e "I moschettieri erano coraggiosi" hanno strutture sintattiche simili ma esprimono nel primo caso una proprietà di un insieme nel secondo una proprietà degli elementi di quell'insieme.

Considerazioni di questo tipo si applicano anche all'uso dei connettivi: non è difficile trovare nel linguaggio quotidiano usi di /e/, /o/, /se... allora/ ecc. non corrispondenti alle tabelle di verità.

INSIEMI, NUMERI E OPERAZIONI

La costruzione insiemistica dei numeri e delle operazioni

Il punto centrale è la definizione insiemistica di numero, che si basa sulla relazione di *equipotenza* fra insiemi. Due insiemi A e B si dicono equipotenti se è possibile mettere i loro elementi in *corrispondenza biunivoca*, in modo che a ogni elemento dell'insieme A sia associato uno e un solo elemento dell'insieme B e viceversa. Il fatto che i due insiemi sono equipotenti non dipende da come viene realizzata la corrispondenza.

La relazione di equipotenza viene così definita senza far riferimento a quella di numero. Il numero viene definito come la proprietà comune a tutte le classi di insiemi equipotenti. Quindi il numero 3 è definito come la proprietà comune a tutti gli insiemi equipotenti a un insieme prefissato, costruito in modo che abbia tre elementi. Il numero associato in questo modo a ciascun insieme A viene chiamato la sua cardinalità (card(A)). Questa definizione funziona anche per insiemi infiniti. E' possibile precisare matematicamente, attraverso una costruzione insiemistica, che cosa vuol dire 'la proprietà comune a una classe di insiemi equipotenti', anche se questo va oltre gli obiettivi di questo ciclo di lezioni.

Vediamo, a titolo di esempi, la definizione insiemistica di somma e di prodotto.

La somma

La somma di due numeri viene introdotta attraverso l'operazione di unione insiemistica, già definita.

L'unione gode di questa proprietà notevole: se A e B sono insiemi disgiunti (cioè, che non hanno alcun elemento in comune) allora $card(A \cup B) = card(A)+card(B)$. In altre parole, il numero di elementi dell'unione di due insiemi disgiunti è pari alla somma dei numeri degli elementi dei due insiemi. Se i due insiemi non sono disgiunti, questo non è più vero: se $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$, allora $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $card(A \cup B) = 5 \neq card(A) + card(B) = 7$.

Si osservi che $A \cup B = B \cup A$.

Il prodotto

Il prodotto di due numeri viene introdotto attraverso l'operazione di prodotto cartesiano di insiemi, che è definita nel modo che segue:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$$

(il prodotto cartesiano di due insiemi A, B è l'insieme costituito dalle coppie ordinate che hanno come primo elemento un elemento di A e come secondo elemento un elemento di B).

Se $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{1, 2\}$, $A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$. Si osservi che $(a, 1) \neq (1, a)$ e anche che $A \times B$ e $B \times A$ sono insiemi diversi ma equipotenti.

Rappresentazioni simili vengono utilizzate per rappresentare punti del piano, di una mappa, nei giochi tipo 'battaglia navale'. Per introdurre il prodotto aritmetico, si sfrutta la seguente proprietà del prodotto cartesiano: dati due insiemi A e B, $card(A \times B) = card(A) \cdot card(B)$ (la cardinalità del prodotto cartesiano è pari al prodotto delle cardinalità degli insiemi fattori).

Non è difficile a questo punto ricavare le principali proprietà algebriche di somma e prodotto di numeri naturali.

Quelle che abbiamo appena visto sono rappresentazioni delle operazioni di somma e prodotto di numeri naturali che mettono in evidenza alcuuni aspetti e ne oscurano altri. Somme e prodotti introdotti in questo modo sono operazioni intrinsecamente commutative con simmetria fra gli argomenti (addendi o fattori). come vedremo, esistono significati di somma e prodotto che sono difficilmente rapresentabili in questi temini.

I SIGNIFICATI DEI NUMERI E DELLE OPERAZIONI

Scopo di questa sezione è di illustrare la varietà di significati che possono assumere i numeri e le operazioni in aritmetica, anche se ci si limita ai soli aspetti concettuali.

Esistono diverse classificazioni dei significati dei numeri e delle operazioni. Quello che è importante non è tanto adottarne una piuttosto che un'altra, ma rendersi conto che in ogni caso i significati di numeri e operazioni possono essere diversi e che gli insegnanti devono tener conto, nell'ambito dei loro piani di lavoro, di queste diversità. La classificazione che viene presentata in queste pagine è dovuta a Gerard Vergnaud.

Un numero può essere associato, come misura, a una grandezza 'statica' ("Anna ha 3000 lire"), a una trasformazione ("Quast'anno Paolo è cresciuto 8 cm") o a una relazione ("Carmela è alta 8 centimetri più di Antonio"). Inoltre un numero può rappresentare una posizione in una sequenza ordinata ("Giovanni abita al 6 di via Marco Federici", "Domani è il 26 febbraio"), un'etichetta (Per andare allo stadio bisogna prendere il 48") o un codice ("Il mio numero telefonico è 700007").

Problemi di addizione e sottrazione

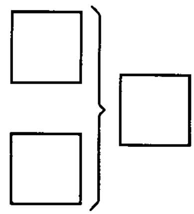
Le misure statiche sono generalmente rappresentate da numeri positivi o nulli, mentre trasformazioni e confronti possono essere rappresentati anche da numeri negativi. A partire da questo, otteniamo svariate situazioni di tipo additivo che, pur essendo equivalenti dal punto di vista matematico, hanno rappresentazioni e difficoltà diverse per i bambini. Vediamo alcuni esempi.

A. COMPOSIZIONE STATICA DI MISURE: misura-misura-misura. La composizione di due misure statiche dà come risultato una misura statica.

Esempi

"Carlo ha 3500 lire, Roberta ne ha 5000, insieme hanno 8500 lire"

"Il nonno ha comprato 3 kg di arance e 2 kg di mele, in tutto ha comprato 5 kg di frutta"

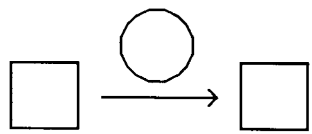


In queste situazioni il fattore tempo non è in gioco: l'operazione descrive una situazione in un certo momento fissato.

B. TRASFORMAZIONE FRA DUE MISURE: misura-trasformazione-misura. Una trasformazione applicata a una misura statica dà come risultato una misura statica.

Esempi

"Marco aveva 3500 lire, poi ne regala 2000 a Roberta, adesso Marco ha 1500 lire"
"Giovanni l'anno scorso era alto 130 cm, quest'anno è cresciuto 10 cm, adesso è alto 140 cm"



In queste situazioni il tempo è determinante: c'è un prima, un'azione e un poi.

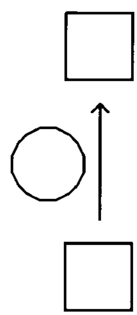
C. CONFRONTO FRA DUE MISURE: misura-relazione-misura. Una relazione collega fra loro due misure.

Esempi

"Marco ha 3500 lire, Roberta ha 1500 lire più di Marco, Roberta ha 5000 lire"

" Gaetano è alto 135 cm, Chiara è alta 10 cm meno di Gaetano, Chiara è alta 145 cm"

In queste situazioni il tempo non è un fattore in gioco, in quanto il confronto è effettuato in un momento fissato.

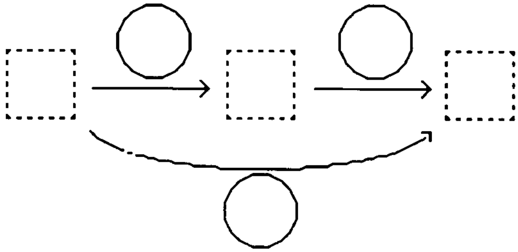


D. COMPOSIZIONE DI TRASFORMAZIONI: trasformazione trasformazione-trasformazione. La composizione di due trasformazioni dà come risultato una trasformazione. Le grandezze su cui operano le trasformazioni non sono direttamente rilevanti.

Esempi

"Raffaele stamane ha vinto 8 bilie, oggi pomeriggio ne ha perse invece 11, allora in tutto il giorno ha perso 3 bilie"

"Fra 4 giorni è la domenica delle Palme, dopo altri 7 giorni è Pasqua, Pasqua è fra 11 giorni"



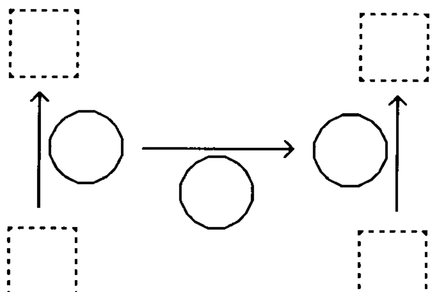
In queste situazioni il tempo in teoria non dovrebbe essere rilevante (trattandosi di una composizione) ma il fatto che gli argomenti siano trasformazioni (e quindi legati al tempo) può rimetterlo in gioco nelle rappresentazioni dei bambini.

E. TRASFORMAZIONE DI RELAZIONI: relazione-trasformazione-relazione. Una trasformazione applicata a una relazione dà come risultato una relazione. Le grandezze a cui si riferiscono le relazioni non sono rilevanti.

Esempi

"Viviana deve 3000 lire a sua sorella, oggi ne ha restituite 2000, adesso Viviana deve 1000 lire a sua sorella"

"Bugno aveva 3 minuti di vantaggio su Fignon, nella tappa di oggi ne ha guadagnati altri 2, adesso ha 5 minuti di vantaggio su Fignon"



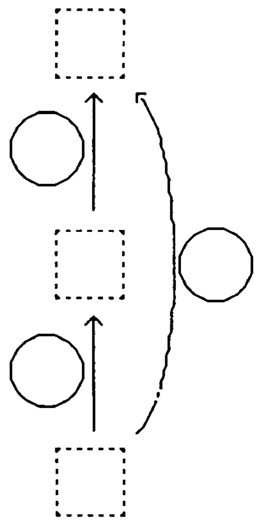
In queste situazioni il tempo è un fattore rilevante (trattandosi di una trasformazione).

F. COMPOSIZIONE DI RELAZIONI: relazione-relazione-relazione. La composizione di due relazioni dà come risultato una relazione.

Esempi

"Giorgio ha un anno più di Matteo, Matteo ha 2 anni più di Nicoletta, allora Giorgio ha 3 anni più di Nicoletta"

"Carla ha 3000 lire in meno di Sergio, Sergio ha 4000 lire in più di Daniela, allora Carla ha 1000 lire in più di Daniela"



In queste situazioni il tempo non è un fattore rilevante.

Più in generale, quando una trasformazione opera su argomenti di qualsiasi tipo il tempo è direttamente messo in gioco, mentre lo stesso non accade per i confronti o per le composizioni, che non sono direttamente legate al fattore tempo. Questo non è troppo chiaro nelle situazioni D, in quanto una composizione (di per sé statica) opera su trasformazioni (dinamiche).

Inoltre, quando operiamo confronti fra argomenti qualsiasi, non vi è una relazione parte/tutto fra gli elementi in gioco, mentre questo avviene per trasformazioni e composizioni.

Tutte queste situazioni possono dare luogo a problemi diversi a seconda della posizione del dato incognito; abbiamo così 18 diversi tipi di problemi, fra i quali anche i problemi risolubili con una sottrazione. Naturalmente questa classificazione non è né esaustiva (si possono sempre pensare situazioni più complicate) né rigida, e deve essere considerata soprattutto come una sequenze di esempi per mettere in luce la grande varietà delle situazioni additive. Naturalmente, non è stata pensata come un contenuto da insegnare ai bambini, ma solo come uno strumento in più nelle mani degli insegnanti. Purtroppo non sono mancati i libri di testo che hanno tentato di spiegare ai bambini classificazioni di questo tipo, con scelte didattiche aberranti.

Oltre al tipo di situazione e alla posizione del dato incognito, fattori rilevanti sono anche i valori numerici in gioco e la natura delle relazioni e delle trasformazioni in gioco, che può richiedere o meno la presenza di valori negativi (oppure, l'uso di sottrazioni per calcolare la relazione o la trasformazione composta). Ad esempio, nella situazione F (composizione di relazioni) il primo esempio si riferisce a un caso in cui le due relazioni sono concordi, per cui la relazione composta è data da una somma, mentre nel secondo esempio le relazioni sono discordi e la relazione composta è data da una differenza.

Tutti i fattori che abbiamo preso in considerazione possono influenzare il comportamento dei bambini. La letteratura in proposito è estremamente amplia, e talvolta anche contraddittoria, in quanto i risultati sono spesso condizionati da fattori non presi in considerazione o considerati ininfluenti.

Con tutto questo si è voluto dare un esempio della contrapposizione, frequente in matematica, tra le formalizzazioni, in cui tutti i concetti vengono organizzati gerarchicamente a partire da pochi concetti primitivi e i significati che assumono gli enti matematici nelle diverse situazioni d'uso. In questo caso possiamo confrontare l'impostazione insiemistica, che organizza tutta l'aritmetica sul concetto di insieme, con i significati che assumono numeri e operazioni (negli esempi, addizioni e sottrazioni). Molti dei significati e delle situazioni presentate sono difficilmente rappresentabili in termini di insiemi.

Ad esempio, un confronto di misure di lunghezza non ha molto a che fare con un confronto fra insiemi e le strategie messe in gioco sono sostanzialmente diverse. Ancora più evidente è il caso di addizioni o sottrazioni come trasformazioni 'unarie' rappresentate sulla linea dei numeri o sul calendario.

Con questo non si vuol sostenere semplicemente che la formalizzazione insiemistica non funziona e che bisogna cercarne una migliore: quello che è stato messo in discussione è il ruolo delle formalizzazioni nell'insegnamento della matematica e l'idea che all'organizzazione logica dei concetti matematici corrispondano percorsi privilegiati di apprendimento, la possibilità di coglierne l'essenza più profonda. Le esperienze condotte in questi anni hanno mostrato i fallimenti dei tentativi di organizzare l'insegnamento limitandosi ad applicare rigidamente paradigmi generali, da qualunque area disciplinare provengano.

RAPPRESENTAZIONI E MATEMATICA

Per rappresentare i numeri (ma quanto segue vale anche per molti altri concetti matematici) è possibile usare diversi linguaggi. Anche gli insiemi, come abbiamo visto, costituiscono un linguaggio che può servire a questo scopo ma ha il difetto di avere un rapporto ambiguo col linguaggio quotidiano e di mancare di una semantica adeguata al livello di età, per cui sull'uso consapevole di un linguaggio prevalgono gli stereotipi.

All'esame dettagliato del ruolo delle rappresentazioni in aritmetica premettiamo alcune considerazioni sulle rappresentazioni in generale. Anche se non sempre ne sono consapevoli, le persone umane usualmente comunicano e riflettono sulle loro conoscenze o esperienze attraverso rappresentazioni. Questo vale a maggior ragione quando sono in gioco conoscenze o esperienze matematiche. Nella matematica il ruolo delle rappresentazioni è particolarmente delicato per l'astrattezza dei concetti in gioco, che può rendere incerta la distinzione fra questi e le loro rappresentazioni standard; ad esempio, mentre è abbastanza naturale distinguere una persona dal suo nome (succede di conoscere una persona senza saperne il nome, o di sapere il nome di una persona che non si conosce), non lo è altrettanto distinguere il numero cinque dalle sue rappresentazioni usuali, o un triangolo dalla sua rappresentazione su un foglio di carta. Per questo non è banale separare le proprietà dei concetti matematici da quelle delle rappresentazioni (che per di più sono fortemente dipendenti dal quadro in cui si collocano), con conseguenze a tutti i livelli dell'educazione matematica, compresi quelli più elementari. Inoltre la matematica si occupa anche di algoritmi, cioè di procedimenti ordinati, basati sull'applicazione di regole che spesso dipendono dal particolare sistema di rappresentazione; ad esempio, la tecnica di calcolo delle operazioni aritmetiche in colonna funziona per tutte le rappresentazioni in base n (con $2 \leq n$) ma non per la scrittura romana o quella frazionaria dei numeri; la rappresentazione contribuisce quindi a determinare anche l'insieme degli algoritmi praticabili.

Il quadro teorico di questo paragrafo segue soprattutto quello proposto da Raymond Duval, seppur con qualche aggiustamento e integrazione. Le rappresentazioni sono costruite utilizzando sistemi semiotici che chiameremo sistemi (o registri) di rappresentazione. Le rappresentazioni semiotiche non sono soltanto essenziali per scopi di comunicazione, ma giocano anche un ruolo fondamentale:

- nello sviluppo delle rappresentazioni mentali, che si appoggiano sull'interiorizzazione delle rappresentazioni semiotiche;
- nel raggiungimento di diverse funzioni cognitive, come la reificazione (cioè, la possibilità di pensare a un processo o a una struttura complessa come a un singolo oggetto) e la manipolazione simbolica (trattamento), che possono essere svolte solo limitatamente dalle rappresentazioni mentali;.

Fra le attività semiotiche fondamentali ricordiamo le seguenti.

- Il riconoscimento di una rappresentazione come rappresentazione di un dato registro. Ad esempio, i bambini possono rendersi conto che 345 è la scrittura di un numero pur senza ancora essere in grado di attribuirvi un significato preciso.
- La costruzione di una rappresentazione riconoscibile come tale in relazione al registro prescelto. Questo avviene ad esempio quando si scrive in cifre sul quaderno un numero rilevato da una misurazione.
- Il trattamento, cioè la trasformazione di una rappresentazione all'interno del registro in cui è stata costruita. Nella rappresentazioni decimali dei numeri un tipico trattamento è il calcolo.

- La conversione di una rappresentazione è la sua trasformazione in una rappresentazione di un altro registro, in modo da conservare totalmente o parzialmente il contenuto iniziale. Questo avviene, ad esempio, quando si scrive in cifre decimali un numero rappresentato sull'abaco.

Il coordinamento di registri, che si manifesta attraverso la rapidità e la naturalezza dei processi di conversione, consente in primo luogo di svolgere i trattamenti nei registri di volta in volta più appropriati (economia di trattamento).

Altre rappresentazioni per i numeri
Le diverse rappresentazioni dei numeri possono essere divise in due classi: le rappresentazioni che conservano un qualche rapporto analogico col numero rappresentato e le rappresentazioni il cui rapporto con il numero rappresentato è di natura arbitraria. Alla prima classe appartengono ad esempio le dita delle mani, i regoli e gli istogrammi, le costellazioni. Alla seconda classe appartengono la rappresentazione usuale in base dieci e più in generale tutte le rappresentazioni polinomiali, in qualunque base maggiore di 1. Dovrebbe essere chiaro che cosa si intende con la contrapposizione analogico/arbitrario: nel primo caso le rappresentazioni conservano alcune delle proprietà dei numeri che rappresentano, nel secondo non necessariamente. Se pensiamo ai regoli, si ha che un numero maggiore è rappresentato da un regolo più lungo. Invece, in base dieci, questo non accade: ad esempio, 8 è minore di 9 ma il simbolo /8/ non è più piccolo del simbolo /9/.

Rappresentazioni analogiche

Le dita delle mani
Le dita delle mani costituiscono uno dei primi sistemi di rappresentazione e comunicazione a disposizione dei bambini (e dell'umanità nella sua storia e preistoria). Per molti bambini le dita sono il primo modo di rappresentare i numeri che riescono a padroneggiare. Esse funzionano sia da supporto ad attività di conta sia come rappresentazioni vere e proprie dei numeri. Proprio per questo sono considerate da molti studiosi un sistema di rappresentazione fondamentale per il passaggio dal numero-conta al numero-oggetto. Va rilevato come, in problemi di addizione e sottrazione, le dita possono giocare ruoli diversi, in combinazione con la rappresentazione verbale dei numeri. I trattamenti disponibili in questo registro sono legati ai processi di conta e ai movimenti delle dita (dito sollevato o abbassato). Le dita mettono in luce l'operatore di passaggio al successivo e la struttura additiva dei numeri naturali. La componente analogica in queste rappresentazioni è data dal fatto che per rappresentare numeri più grandi occorrono più dita (finché è possibile, naturalmente). In questo sistema di rappresentazione i numeri cinque e dieci hanno un

ruolo privilegiato, il che suggerisce l'uso di strategie particolari (raggruppamenti per cinque o per dieci, completamenti ecc.).

Da un punto di vista didattico non va dimenticato che le dita sono importanti per il loro appartenere all'esperienza corporea dei bambini e che pertanto è assolutamente fuori luogo vincolarne l'uso (ad esempio, obbligando i bambini a rappresentare il quattro in un modo piuttosto che in un altro.

Regoli e istogrammi

Adesso parliamo di tutte quelle rappresentazioni in cui ciascun numero è rappresentato da una striscia di larghezza costante e di lunghezza multipla di un'unità di misura fissata. Se la striscia è un oggetto materiale (di legno, cartone, plastica, ...) parliamo di regoli, se è rappresentata su un foglio di carta parliamo di (colonne di) istogrammi. In tutte queste situazioni la rappresentazione dei numeri è basata sulle misure delle lunghezze. In genere viene reso possibile il riconoscimento del numero rappresentato attraverso la conta delle unità di misura contenute nel regolo o nella colonna di istogramma. Questo viene facilitato dall'impiego di carta quadrettata per gli istogrammi e di accorgimenti analoghi per i regoli. In alcuni materiali diffusi soprattutto all'estero la 'lettura' del numero si fa non attraverso la conta delle unità di misura (i quadretti) ma attraverso una scala graduara esterna (in genere riportata su un foglio di carta. L'uso del colore, in entrambi i casi, può avere una funzione di rendere le rappresentazioni più gradevoli (specie se, come nel caso degli istogrammi o dei regoli costruiti in proprio col cartoncino, sono i bambini a sceglierlo). Non dovrebbe avere una funzione semiotica fondamentale, o comunque troppo rigida, come nei regoli Cuisenaire (noti anche come 'numeri in colore'), in cui ciascun numero è associato fin dall'inizio a un colore, in base a criteri ispirati alle proprietà di divisibilità. I trattamenti disponibili sono basati sulla conta dei quadretti o sulla corrispondenza numeri/lunghezze. La somma di due numeri può essere rappresentata componendo due regoli o due colonne di istogramma, i confronti fra numeri si possono fare confrontando le lunghezze, e così via. Va rilevato che rappresentazioni di questo tipo si prestano non solo per rappresentare operazioni e confronti, ma anche per scomposizioni additive (numeri amici, ecc.).

Costellazioni

Con questo termine si indica la rappresentazione di numeri relativamente piccoli (al massimo, fino a dieci) mediante configurazioni di punti, così come sono solitamente rappresentati i numeri nei dadi, nel domino e nelle carte da gioco. Il riconoscimento dei numeri può avvenire attraverso la conta, ma soprattutto attraverso il riconoscimento di una forma, di una configurazione geometrica. Questa rappresentazione consente di riconoscere i numeri fino a dieci con un colpo d'occhio (non a caso è stata diffusa soprattutto nell'ambito di giochi che venivano praticati anche fra le classi meno istruite. Come trattamenti disponibili, oltre a quelli basati sulla conta dei punti, vi sono composizioni e scomposizioni di forme geometriche (ad esempio, il sette come composizione di un cinque e un due, e così via).

L'abaco

Si tratta di una rappresentazione più decisamente 'matematica': mentre le rappresentazioni viste finora si appoggiavano su pratiche sociali (la conta) o su proprietà spaziali (lunghezza, forma), l'abaco si basa sulla rappresentazione gerarchica dei numeri, che è un prodotto di un momento relativamente evoluto dello sviluppo della matematica. L'abaco rappresenta una forma strutturata di raggruppamento per dieci, in quanto un elemento di una qualsiasi colonna rappresenta una decina di elementi della colonna immediatamente alla sua destra (se ne esistono). I trattamenti disponibili collegano forme di manipolazione con le tecniche tipiche del calcolo in colonna (somma gerarchica, riporti, 'prestito', ...). Va osservato che l'abaco è un oggetto relativamente astratto, in quanto non collegato a pratiche sociali diffuse, a differenza di altre forme di rappresentazione.

Le monete

I conti economici sono uno dei settori di impiego della matematica più diffusi nella società dall'antichità ai giorni nostri. Le monete offrono una rappresentazione gerarchica dei numeri che si appoggia su pratiche sociali largamente condivise (la conta gerarchica, il resto del negoziante, la divisione di partizione o di contenenza), pongono il problema della rappresentazione dei numeri 'grandi' e suggeriscono molteplici attività di scomposizione e ricomposizione. Una trattazione approfondita delle potenzialità di questa o di altre rappresentazioni va al di là degli scopi di questo ciclo di lezioni.

La linea dei numeri

La linea dei numeri, come i regoli e le colonne di istogramma, utilizza la corrispondenza fra numeri e lunghezze. La differenza è data dal fatto che i segmenti che rappresentano i vari numeri sono presi sulla medesima retta. Quindi il segmento associato al numero tre è necessariamente una parte del segmento associato al numero cinque. Questo rende meno praticabili alcuni dei trattamenti disponibili nel caso degli istogrammi (ad esempio, quelli eventualmente basati sulla corrispondenza biunivoca fra i quadretti) ma rende molto più evidente e pregnante l'ordinamento totale dei numeri naturali: dati due numeri, il maggiore è quello che occupa la posizione più a destra (secondo la convenzione usuale), e due numeri sono uguali se e solo se occupano la medesima posizione. Con questa rappresentazione le operazioni di somma e differenza assumono una netta connotazione di operazioni unarie: calcolare 3+2 sulla linea dei numeri più che una composizione di misure può essere interpretato come una trasformazione che il secondo addendo provoca sul primo.

La rappresentazione in base dieci e le altre rappresentazioni polinomiali

La rappresentazione in base dieci, che è stata affrontata in uno dei cicli di lezioni precedenti, si basa sulla proprietà matematica seguente: la rappresentazione di ciascun numero con un polinomio del tipo $a_0+a_1\cdot10+a_2\cdot10^2+a_3\cdot10^3+...$ in cui i coefficienti $a_0, a_1, a_2, ...$ sono scelti fra i numeri interi 0, 1, 2, ..., 9 (le cifre decimali) è unica. In altre parole, dato un qualunque numero naturale n, esiste una e una sola sequenza di coefficienti $a_0, a_1, a_2, ...$ tali che $m =a_0+a_1\cdot10+a_2\cdot10^2+a_3\cdot10^3+...$. Una rappresentazione di questo tipo presenta un elevato grado di arbitrarietà nei legami fra simboli e riferimenti, una certa rigidità nelle regole sintattiche che regolano la costruzione delle espressioni e l'elevata efficienza dal punto di vista computazionale. Le regole di scrittura e alcune delle principali proprietà non dipendono dalla scelta del numero dieci come base ma valgono per rappresentazioni polinomiali in cui la base è un qualunque numero intero b, $b\geq2$. Da un punto di vista strettamente matematico le diverse basi sono nella sostanza equivalenti, visto che le regole di scrittura sono le stesse e che molte proprietà si conservano da una base all'altra (possono cambiare, invece, i criteri di divisibilità). Dal punto di vista dei significati non si può dire la stessa cosa, in quanto la base dieci ha un uso sociale molto più vasto delle altre. La convinzione che attraverso l'utilizzo didattico di basi differenti si possano direttamente acquisire le idee fondamentali della notazione polinomiale (e di quella in base dieci come caso particolare) è legata quindi a un'interpretazione della matematica che privilegia gli aspetti di struttura rispetto a quelli semantici. Un'interpretazione più legata alla semantica e quindi anche agli usi sociali punterà soprattutto all'acquisizione di concetti e procedimenti in ambiti significativi, privilegiando la base dieci rispetto alle altre.

Tecniche di calcolo mentali e scritte

Con le sezioni precedenti abbiamo messo a confronto la ricchezza dei significati dei numeri e delle operazioni con la formalizzazione insiemistica, nella quale alcuni significati vanno persi. Un altro modo (storicamente anteriore) di interpretare l'aritmetica che ne ha appiattito i molteplici significati è l'identificazione delle operazioni aritmetiche con le rispettive tecniche di calcolo. Queste ultime in passato sono state insegnate e apprese in modo mnemonico, come tecnica operativa, senza preoccuparsi di capirne il significato. Questo poteva essere motivato, molti anni fa, da esigenze pratiche di calcolo e dalla brevità del periodo trascorso dai bambini nella scuola, quando solo una minoranza andava oltre la licenza elementare. Lo sviluppo dei mezzi di calcolo e l'estensione dell'obbligo scolastico impongono di riesaminare il ruolo delle tecniche di calcolo scritto e mentale: mentre da un lato le tecniche di calcolo (soprattutto le tecniche di calcolo scritto) non sono più necessarie dal punto di vista operativo, dall'altro offrono potenzialità notevoli anche dal punto di vista logico. Il loro insegnamento dovrebbe quindi puntare di meno a efficienza, velocità, ordine e di più alla comprensione dei passaggi che si eseguono. Questo comporta anche una ricollocazione delle tecniche di calcolo nel curriculum: non più passaggi obbligati (o addirittura prerequisiti) per la risoluzione dei problemi di aritmetica ma occasioni per approfondire i significati delle operazioni e del formalismo aritmetico. Didatticamente si tratta non di pretendere che i bambini padroneggino formalmente i legami fra le proprietà delle operazioni e le tecniche di calcolo, ma ne comprendano i significati, anche attraverso attività che modellizzino in modo sensato la rappresentazione decimale dei numeri e le relative tecniche (ad esempio, attività con l'abaco o le monete).

Le tecniche di calcolo mentale di solito appoggiano molto meno sulla rappresentazione decimale dei numeri. Probabilmente per sapere che 1 milione + 2 milioni = 3 milioni non è nemmeno necessario sapere come si scrive '1 milione' in base dieci. Da un certo punto di vista sono persino più importanti di quelle scritte, perché consentono il controllo sulla sensatezza dei risultati (anche se trovati con l'ausilio di una calcolatrice ecc.) e sulle strategie risolutive dei problemi. Se i bambini sono costretti a ricorrere a carta e penna o anche alla calcolatrice per tutti i calcoli che incontrano in un problema, la loro attenzione è continuamente distolta dal procedimento. Esistono ricerche secondo le quali le capacità di calcolo mentale (a differenza delle capacità di calcolo scritto) sono ben correlate con quelle di risolvere i problemi.

Il calcolo mentale non ha solo funzioni operative, ma è anche una componente essenziale della conoscenza aritmetica, in quanto consente di interiorizzare una grande quantità di proprietà e combinazioni numeriche, come ad esempio le tabelline additive e moltiplicative. Anche per queste vale un discorso analogo a quello per le tecniche di calcolo: devono essere di meno supporti mnemonici per il calcolo scritto e di più conoscenze consapevoli (anche se apparentemente automatiche) di proprietà dei numeri.

IL LINGUAGGIO DELL'ARITMETICA: ESPRESSIONI E PROCEDIMENTI

Interpretazioni del simbolo /=/

Nella vita quotidiana come nella scuola il segno /=/ viene interpretato in due modi sostanzialmente diversi:

- come istruzione di esecuzione di un calcolo;

- come relazione binaria fra termini.

La prima interpretazione corrisponde all'uso delle calcolatrici tascabili, dei registratori di cassa e anche ad alcune pratiche scolastiche, come ad esempio negli algoritmi scritti per le 4 operazioni. È un'interpretazione procedurale (prescrive un'azione) e palesemente asimmetrica (si va dall'espressione composta all'espressione semplice - il 'risultato'). La seconda interpretazione è quella tipica della matematica ed è anche legata alla nozione intuitiva di uguaglianza. Nella scuola gli studenti imparano un ibrido tra le due interpretazioni, per cui alcune volte si pensa a una relazione binaria ma nella maggior parte delle situazioni si usa come un'istruzione. La situazione standard in cui gli studenti si abituano a vedere e usare il simbolo di uguaglianza sono gli enunciati del tipo

$$3+2=5$$

con un'espressione composta a sinistra del simbolo e un'espressione ridotta in forma normale (cioè, senza simboli per operatori) a destra del simbolo. Ad esempio, per un gran numero di bambini nella fascia d'età 5-7 anni il problema a frase aperta $3+\boxed{} = 5$ risulta più facile del problema $5 = 3+\boxed{}$. Questa interpretazione crea problemi sia in aritmetica perché induce gli studenti a considerare numeri solo quelli designati da espressioni in forma normale, con conseguenze che vedremo nei prossimi paragrafi, sia nel trattamento di espressioni con lettere, perché non c'è un numero al quale ridurre l'espressione, che d'altra parte non si riesce a interpretare come un oggetto matematico autonomo.

Espressioni come processi o come oggetti

Da quanto osservato nel precedente paragrafo segue che espressioni composte ed espressioni in forma normale, anche se 'uguali' giocano ruoli diversi nella versione scolastica dell'aritmetica. La relazione 3+2=5 afferma che le espressioni '3+2' e '5' rappresentano lo stesso numero naturale, ma le due espressioni assumono sensi diversi, perché la prima descrive anche un processo di calcolo. Questa sorta di 'ambiguità' è stata riconosciuta come una caratteristica generale delle espressioni aritmetiche e algebriche: essere rappresentano contemporaneamente un processo di calcolo e il risultato (esplicitabile o no) di quel processo. In aritmetica questa ambiguità è stata superata, o meglio, esorcizzata, nelle pratiche didattiche più diffuse, attribuendo alle espressioni composte (come '3+2', '7·3-19') la rappresentazione dei processi e alle espressioni in forma normale (cioè ridotte a singoli numeri scritti in base dieci) quella degli oggetti. Una relazione del tipo 3+2 = 5, che matematicamente parlando è una relazione simmetrica, viene solitamente interpretata come un processo che a 3+2 associa 5, ma non viceversa.

In molti testi le proprietà dei numeri vengono presentate in stretto collegamento con la rappresentazione in forma normale. Ad esempio esistono testi in cui si afferma che "I numeri preceduti dal segno +, come +10 si chiamano numeri positivi. ... I numeri preceduti dal segno –, come –10 si chiamano numeri negativi." La proprietà di essere interi positivi o negativi, che è propria dei numeri, viene attribuita alle loro rappresentazioni, senza precisare che vale solo per le rappresentazioni in forma normale: al criterio semantico di determinare la posizione rispetto allo 0 (anche in relazione ai significati specifici assunti dai numeri - misure o altro) viene sovrapposto il criterio sintattico di vedere se sono preceduti da un /+/ o da un /–/ (sorvoliamo sul fatto che normalmente i numeri positivi si scrivono senza /+/ davanti, che /+/ è un simbolo per un'operazione binaria e così via). Lo studente si trova così una regola che gli impedisce di accorgersi direttamente che 5–7 è un numero negativo (non comincia con /–/!) ma lo costringe a eseguire comunque il calcolo (anche se questo non fosse di per sé necessario o opportuno). Inoltre la necessità di eseguire sempre e comunque i calcoli è una limitazione: non serve calcolare la somma per sapere che 9+123.456.789 è minore di 90+123.456.789.

I problemi e la rappresentazione dei procedimenti risolutivi

Nella risoluzione di problemi è molto utile e formativa la pratica di incoraggiare i bambini a produrre più di una strategia e promuovere attività di confronto di strategie. Per questo diventa importante la rappresentazione di procedimenti mediante espressioni e lo studio di espressioni in quanto oggetti: essa può fornire strumenti di controllo sulle strategie risolutive dei problemi complessi, oltre a essere un terreno che può motivare le prime scoperte e riflessioni sulle proprietà delle operazioni. Diventano quindi estremamente importanti i problemi aritmetici per i quali la risposta non è data da un calcolo ma da un'analisi qualitativa dei dati e i problemi in cui le conoscenze aritmetiche sono utilizzate per modellizzare una situazione data; la risposta non è necessariamente un numero. In questa classe rientrano molti problemi di combinatoria e quelli relativi al calcolo delle probabilità.

L'aritmetica è anche un terreno adatto anche per le prime esperienze di tipo logico, in quanto dà ai bambini la possibilità di controllare la verità di affermazioni, di formulare e verificare ipotesi, di costruire esempi o controesempi. Offre inoltre un gran numero di problemi significativi; ad esempio:

- ◊ controllo di verità o falsità di uguaglianze e disuguaglianze numeriche;
- ◊ problemi a frase aperta (in positivo e in negativo);

◊ costruzione di insiemi di numeri naturali che soddisfano condizioni date, semplici o composte;

◊ ideazione di problemi che abbiano soluzioni date, o caratteristiche fissate.

Vediamo qualche esempio di problema corrispondente alle caratteristiche proposte.

1. 10 bambini/e hanno risposto a un questionario di 3 domande. Si sa che 7 bambini/e hanno risposto correttamente alla I domanda, 6 bambini/e alla II, 5 bambini alla III. Quanti potrebbero essere i bambini/e che hanno risposto correttamente a tutte le 3 domande?

2. Il signor Tizio è un ottimo coloritore e riesce a dipingere la palizzata del suo giardino, da solo, in circa 3 ore. Suo figlio Sempronio è meno veloce e impiega 7 ore a dipingere, da solo, la medesima palizzata. Quest'anno lavorano insieme (ciascuno con la propria attrezzatura, si suppone senza ostacolarsi): quanto tempo potrebbero impiegare a dipingere la palizzata? Scegliete la risposta più sensata fra quelle proposte.

21 ore ☐	10 ore ☐	7 ore ☐	5 ore ☐
4 ore ☐	3 ore ☐	2 ore ☐	$\frac{1}{2}$ ora ☐

3. Su un foglio la maestra ha scritto due numeri, entrambi di due cifre decimali, poi ha calcolato la loro somma. Per ciascuna delle affermazioni che seguono dire se è certamente vera, falsa o se non si può dire nulla.
   a. La somma è sicuramente un numero a due cifre.
   b. La somma è sicuramente un numero a tre cifre.
   c. La somma è maggiore di 19.
   d. La somma è maggiore di 100.
   e. La somma è maggiore di 200.

4. Sostituite, senza eseguire calcoli, al posto di '...' un segno scelto fra =, <, >, in modo che risulti un'affermazione vera.
   a. 373+574+936 ... 456+608+988   b. 723+439+601 ... 723+439+603
   c. 420+420+420+420 ... 5×420   d. 72+73+74 ... 73×3
   e. 30×13 ... 31×13   f. 350:8 ... 350:10
   g. 1348:56 ... 1328:56   h. 15×16×2 ... 2×16×15
   i. 543+709+146 ... 709+543+146   k. 456:7 ... 7:456

Il problema 1, di natura combinatoria, richiede un grosso sforzo di modellizzazione, che può essere ottenuta per mezzo del linguaggio verbale o di rappresentazioni visive (istogrammi, ecc.) o concrete, anche in base alle preferenze dei singoli alunni. Va notato che le risposte non sono numeri ma insiemi di numeri e che non è possibile trovarle applicando il solo formalismo aritmetico (calcoli a partire dai dati numerici) o il solo formalismo insiemistico (diagrammi di Venn, unioni, intersezioni ecc.).

Il problema 2 sarebbe in linea con la tradizione scolastica peggiore se chiedesse di stabilire il tempo esatto che impiegano. Invece chiede di scegliere la più ragionevole fra una gamma di risposte. Non richiede alcuna tecnica ma l'interpretazione sensata dei dati.

Il problema 3 richiede poco sul piano tecnico, di più sul piano del ragionamento. Offre la possibilità di iniziare una discussione in classe su espressioni come 'vero', 'falso', 'vero in ogni caso', 'vero solo in alcuni casi', ...

Le domande del problema 4 richiedono di ragionare su espressioni aritmetiche senza calcolarle. Le motivazioni di attività di questo tipo sono state esposte al punto precedente.

RIFERIMENTI

Artusi Chini, L.(a cura di): 1985, *Numeri e operazioni nella scuola di base,* Bologna, Zanichelli.

Bernardi, C., Cannizzaro, L., Lanciano, N. e Mentrasti, P. (a cura di): 1991, *La matematica nella scuola elementare. Il numero e le abilità numeriche. Problemi.,* Firenze, La Nuova Italia.

Bernardi, C., L.Cannizzaro, N.Lanciano e P.Mentrasti (a cura di): 1991, *La matematica nella scuola elementare. Logica. Informatica. Probabilità e statistica.,* Firenze, La Nuova Italia.

Dapueto, C., P.L.Ferrari e M.P.Rogantin: 1986, 'Il numero nel primo apprendimento', *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate,* Vol.9, N.11, 7-93.

Dapueto, C. e P.L.Ferrari: 1988, 'Educazione logica ed educazione matematica nella scuola elementare', *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate,* Vol.11, N.9, 773-810.

L’ARITMETICA E L’INFORMATICA NELL’EDUCAZIONE MATEMATICA PRIMARIA

Margherita Fasano
Dipartimento di Matematica - Università della Basilicata - via N. Sauro 85 - 85100 Potenza

<u>Premessa</u>

Sin dal primo anno della scuola elementare, l’aritmetica costituisce il nucleo centrale della formazione matematica. Pertanto le indicazioni e le proposte didattiche relative all’insegnamento della aritmetica si sono moltiplicate nel tempo offrendo una varietà di itinerari possibili per l’introduzione e rappresentazione dei numeri naturali e per la trattazione delle operazioni aritmetiche e loro proprietà. È una letteratura oramai vasta in cui l’integrazione tra attività matematico-linguistiche da svolgere in classe e le esperienze quotidiane del bambino, costituisce un costante e forte riferimento per favorire non solo l’apprendimento disciplinare ma anche una formazione mentale e culturale più efficace per un buon inserimento nella società.

Ma che cosa vuol dire “buon inserimento nella società”, oggi ?

È oramai noto a tutti come e quanto il continuo e rapido sviluppo scientifico-tecnologico imponga nuove organizzazioni, vedi per esempio il mondo del lavoro, nuove competenze e soprattutto nuovi abiti mentali e culturali. Basta ricordare, tra gli altri, la crescente esigenza di saper impostare problemi a partire da situazioni aperte, riconoscere strutture e strategie appropriate per la soluzione di un determinato problema, elaborare e applicare processi simbolici, formali, accettare situazioni e ruoli diversi nonché l’esigenza di una riqualificazione permanente finalizzata all’acquisizione di nuovi profili professionali.

A livello di scuola elementare il bambino offre un potenziale cognitivo che non finisce mai di stupire: è doveroso quindi non sprecarlo ma neanche, a mio modesto avviso, abusarne.

A questo punto sorge spontanea una domanda: come arricchire, completare, ciò che già si svolge nelle classi per concorrere allo sviluppo di queste nuove e in alcuni casi precoci competenze e abilità? Con quali metodologie? Con quali risorse? L’informatica può costituire un supporto significativo per l’apprendimento dell’alunno?

La risposta è sì ma vediamo in quali casi e come.

2 L'informatica come supporto

Prima di commentare con sintetici riferimenti alle esperienze illustrate durante la conferenza, l'apporto della informatica nel campo dell'aritmetica a livello di scuola elementare, sono necessarie alcune premesse.

Come primo passo, è bene ricordare che, come per la matematica, anche per l'informatica si distinguono due aspetti, in continua osmosi tra loro: quello teorico e quello applicativo. Sono note anche le ricadute formative della informatica nella didattica.

Principalmente:

– lo sviluppo della capacità di mettere in relazione, associare e classificare;
– confrontare e ordinare, usare simboli e interpretarli;
– orientarsi nello spazio e nel tempo;
– comprendere il rapporto di causa-effetto.

Per quanto riguarda il supporto della informatica alla aritmetica vorrei soffermarmi su alcuni aspetti, a mio avviso, particolarmente attuali e fondanti perché strettamente legati allo sviluppo del pensiero procedurale e di quello relazionale che sono alla base per la costruzione di nuove conoscenze. Per il primo è fondamentale saper ordinare, per il secondo, saper mettere in relazione.

2.1 Consideriamo l'aspetto teorico

L'aspetto teorico, a mio avviso, offre agganci efficaci per concorrere, per mezzo della costruzione sia di algoritmi (procedure) sia di frames (mappe concettuali), allo sviluppo delle capacità logiche e linguistiche. È noto che un algoritmo è una successione ordinata logicamente di un numero finito di passaggi che porta alla soluzione di un problema. Dal punto di vista informatico, costruire un algoritmo relativo ad un problema da risolvere, vuol dire saper:

a) interpretare correttamente il testo del problema: che cosa tratta, quali i dati di partenza (input), quali quelli di arrivo (output);
b) individuare correttamente tutte le informazioni: dati di "partenza" espliciti, nascosti o ridondanti e i dati di "arrivo", i risultati;
c) ricercare il procedimento risolutivo: costruire la relativa successione logica delle operazioni da eseguire anche ricorrendo al linguaggio storico naturale;
d) rappresentare questa successione: la scelta della rappresentazione, grafica o testuale, è condizionata dal linguaggio di programmazione che si utilizzerà per tradurre l'algoritmo in programma;
e) redigere il programma ed effettuare la verifica dei risultati.

Come si può notare, i punti a), b) e c) fanno già parte della pratica scolastica; a volte, il punto c) può presentare delle difficoltà causate da una scarsa motivazione da parte dell'alunno. È a partire da questo punto che l'informatica può giocare il suo ruolo e favorire, nel caso di algoritmi descrittivi o numerici, lo sviluppo del pensiero procedurale.

A questo proposito è importante riflettere sulla importanza di non farsi condizionare troppo dalle mode! Il diagramma di flusso (d.d.f.), giustamente ritenuto superato nel campo informatico dai nuovi ambienti di programmazione, nel campo didattico, soprattutto a livello di scuola elementare, può avere ancora un ruolo importante: costruire il proprio d.d.f. collegando con frecce i blocchi relativi alla successione dei passaggi precedentemente fissata, quasi come un puzzle, favorisce nel bambino l'organizzazione procedurale del pensiero, migliora la sua produzione linguistica e facilita, grazie all'uso delle frecce, la lettura e il controllo del proprio elaborato.

Molti sono gli esempi di attività da svolgere in classe: i libri di testo ne sono stati, e in parte lo sono ancora, quasi inflazionati. Vorrei qui sottolineare l'importanza che il metodo scelto ha se si vuole far percorrere al bambino tutti i passaggi prima illustrati, come soggetto attivo e in buona parte autonomo. A titolo di esempio riporto qui di seguito le tappe di un "metodo di lavoro" più volte sperimentato e che, nel tempo, continua a confermare tutta la sua efficacia:

1) Si ha un problema da risolvere. Se ne analizzano i termini: partenza e arrivo;
2) Si avvia una discussione durante la quale si fa emergere ciò che è essenziale per arrivare dalla partenza all'arrivo (come è noto, i bambini tendono ad arricchire la situazione con particolari non pertinenti e a porre obiezioni più o meno importanti)
3) Subito dopo la discussione, ogni alunno descrive, per iscritto e per proprio conto, il procedimento quale gli è risultato dalla discussione;
4) Si passa dal caos all'ordine. Si riflette su quanto ciascuno ha scritto, e si elabora collettivamente un elenco ordinato di frasi che rispecchi la sequenza logica delle tappe che scandiscono il procedimento;
5) Si costruisce il d.d.f. scrivendo ciascuna frase nel relativo blocco (ogni azione in un rettangolo, ogni domanda in un rombo, etc.) e collegando, rispettando l'ordine di scrittura delle frasi, i blocchi ottenuti con frecce.

2.2 Si passa all'aspetto applicativo

Il passaggio immediatamente successivo alla costruzione di un algoritmo numerico, è quello della sua traduzione in programma. Siamo nella fase della applicazione. Questa si realizza mediante una apparecchiatura e dipende quindi dalle risorse disponibili.

Mi limiterò ad evidenziare alcuni aspetti relativi a tre diverse tipologie di apparecchiature:

a) Calcolatrici Tascabili (CT). Sono reperibili anche in omaggio nelle confezioni di detersivi e altro ancora: questo vuol dire che nella scuola più sfornita e isolata è possibile far lavorare i bambini in situazioni didattiche finalizzate a:

- instaurare un corretto rapporto uomo/macchina;
- utilizzare una CT come mezzo per verificare previsioni numeriche fatte e scoprire regole e regolarità sui numeri;
- utilizzare una CT come mezzo per verificare e scoprire le proprietà delle operazioni aritmetiche;
- utilizzare una CT programmabile come mezzo per scoprire, in prima battuta, il processo di generalizzazione come risparmio di tempo e di scrittura.

Momenti di lavoro individuale basati anche sulla caccia all'errore alternati con sistematici confronti collegiali favoriscono, inoltre, la presa di coscienza di strategie diverse per risolvere uno stesso problema. A questo proposito è molto utile far lavorare i bambini in classe con CT diverse così da avere maggiori motivazioni di riflessioni sulle diverse prestazioni delle stesse e le relative conseguenze su dati e risultati numerici (decimali, approssimazioni per difetto ed eccesso, etc.).

b) Personal Computer (o simili). Anche se non tantissime, non sono poche le scuole dotate di un computer che consenta applicazioni di software didattici o del LOGO e suoi derivati. Per quanto riguarda i software didattici, ne esistono molti sul mercato e con diverse caratteristiche. Ciò che si può dire in sintesi è che ve ne sono di ben fatti, utili come momento di rinforzo o di recupero per l'alunno, altri decisamente da cestinare. Sta all'insegnante saper scegliere quello più appropriato per i propri obiettivi e metodi.

Per quanto riguarda il LOGO e derivati, va sottolineata l'importanza di questo linguaggio/ambiente di programmazione soprattutto per lo sviluppo del concetto di ricorsione. Nonostante il diverso significato di questo concetto in ambito infornatico e matematico, a livello di scuola elementare credo si possa essere unanimemente d'accordo sulla utilità di queste applicazioni per lo sviluppo del pensiero ricorsivo già in atto nella prima attività aritmetica del bambino: il "contare per contare". È l'accezione intransitiva del verbo contare: il bambino ripete oralmente uno dopo l'altro i numeri naturali senza far riferimento a particolari oggetti o azioni. È come una filastrocca in cui ripete e va avanti, ripete e va avanti. È per lui una esperienza di illimitatezza di cui prenderà consapevolezza con il “contare per contare oggetti”.

c) Sistemi multimediali. Di gran moda oggi, promossi dal MPI per l’innovazione didattica, i sistemi o aule multimediali stanno facendo il loro ingresso anche nella scuola elementare. Come è noto, si tratta di un insieme di risorse (libro, computer, dischetto, lavagna luminosa, quaderno, CD ROM, etc.) che concorrono a rendere più interattiva ed efficace una certa comunicazione.

Senza dir nulla dell’esigenza per altro già avvertita e affrontata anche se non ancora completata della formazione degli insegnanti in servizio, ciò che si può evidenziare è che al momento il maggior numero di applicazioni didatticamente significative sono nel campo linguistico, letterario e delle scienze naturali. Per quanto riguarda la matematica si stanno svolgendo esperienze e ricerche per produrre materiale multimediale che sia di reale supporto all’apprendimento matematico.

C’è un aspetto che, a mio avviso, non va sottovalutato. Al di là di utilizzare materiale già pronto per lo sviluppo di determinate abilità e competenze, credo che, ancora una volta, l’insegnante possa avere in queste nuove tecnologie un valido supporto per il proprio lavoro. Per vedere come, è necessario riconsiderare l’aspetto teorico dell’informatico.

2.3 Si ritorna all’aspetto teorico: è in atto l’osmosi

I materiali ipertestuali, o più in generale ipermediali, sono costituiti da un insieme di documenti collegati tra loro in base alle relazioni che intercorrono tra i concetti che questi documenti contengono. Se si tratta solo di testo si ha un ipertesto, se vi sono anche filmati, musica, etc. si ha un ipermedia.

La realizzazione di un ipermedia si basa su tre fasi principali:

1) si costruisce una mappa concettuale relativa all’argomento da trattare. Si ricorda che la mappa concettuale, nata nel campo dell’intelligenza artificiale, è la rappresentazione più astratta della conoscenza di un soggetto. Essa è costituita da un insieme di concetti chiave (detti parole concetto), ciascuno dei quali è scritto in un cerchio detto nodo. Ogni concetto che presenta una qualche relazione con uno o più concetti dell’insieme è ad essi collegato con una linea (link). Si ottiene una rete concettuale, cognitiva, del soggetto, riferita ad un particolare argomento;
2) si numerano i nodi della mappa e, rispettivamente, si numerano e si compi-

lano le relative “tabelle per la programmazione”. In ognuna si specifica la composizione di ciò che dovrà comparire sul video per presentare e illustrare il concetto scritto nel nodo in esame: quanta parte testuale, grafica, link ad altri concetti, filmati, etc. e altre specifiche che qui tralascio;
3) si implementa il materiale ottenuto. Siamo arrivati alla produzione dell’ipermedia. Anche in questo caso, è buona regola verificare la fruibilità e la correttezza di quanto prodotto prima di considerare concluso il lavoro.

A ben riflettere, la costruzione di una mappa concettuale, può avere una sua efficacia didattica anche se non è possibile realizzare i punti successivi. Una testimonianza di questo è data dalla presenza massiccia (inflazione!) nei libri di testo di schemi spesso chiamati impropriamente mappe concettuali.

Costruire una mappa concettuale relativa ad un certo argomento vuol dire:

- saperne individuare i concetti chiave;
- saper organizzare sul foglio, e nella propria mente, i collegamenti tra questi concetti, la rete, in modo che la mappa sia leggibile per un’altra persona e comunichi correttamente il proprio pensiero, le proprie scelte;
- saper produrre linguisticamente le parole che esprimono il legame tra due o più concetti.

Le esperienze finora svolte sull’uso delle mappe concettuali come supporto allo sviluppo del pensiero relazionale anche in ambito matematico, non sono molte, anzi poche. Quello che posso qui sinteticamente riportare a titolo di esempio, sono le tappe di un “metodo di lavoro” sperimentato già da anni con alunni di prima media inferiore e che sarà utilizzato dal prossimo anno scolastico anche a livello di scuola elementare.

Prima di procedere, è bene precisare che per quanto riguarda la matematica, allo stato attuale delle esperienze svolte, sembra più opportuno invitare i ragazzi a costruire mappe concettuali su argomenti (le operazioni aritmetiche, i solidi, le espressioni, le trasformazioni geometriche, etc.) solo dopo che questi sono stati trattati in classe. In questo modo, per l’alunno è l’occasione per meglio organizzare e precisare la sua rete concettuale rispetto all’argomento trattato, per il docente è una sorta di monitoraggio dello sviluppo cognitivo dell’alunno via via che costruisce, modifica, migliora (o non riesce a migliorare) la propria mappa.

Ecco qui di seguito le tappe del metodo di lavoro sperimentato:

- Si riprende un argomento trattato e si propone alla classe di sintetizzarlo o rappresentarlo con uno schema per darlo come aiuto ai compagni delle altre classi;

– Si analizza il materiale disponibile e, durante la discussione, il docente, sotto dettatura degli alunni, scrive alla lavagna, riga dopo riga, tutti i concetti chiave proposti commentando via via oralmente eventuali relazioni tra essi;
– Si distribuisce ad ogni alunno un foglio protocollo da utilizzare aperto, tanti cerchietti bianchi, di diametro non superiore a due centimetri, una matita con gomma e un tubetto di colla. La consegna è quella di trascrivere su ogni cerchietto un concetto chiave, disporre i cerchi ottenuti sul foglio protocollo dall'alto verso il basso posizionando il concetto più generale in alto e avendo cura di mettere vicini i cerchi da collegare;
– Successivamente, cioè quando l'alunno è sicuro dell'organizzazione della distribuzione spaziale di cerchietti, questi si incollano e si collegano con delle linee lungo le quali si scrivono una o due parole che esprimano il legame, la relazione esistente tra i concetti considerati
– Si leggono e si discutono due o tre elaborati scelti dall'insegnante e collettivamente si correggono, migliorandoli;
– Successivamente, ciascun alunno riprende la propria mappa e la corregge alla luce di quanto discusso e approfondito.

L'augurio è che queste brevi note possano essere di incoraggiamento o quanto meno suscitare curiosità in quei docenti che, senza farsi travolgere dalle mode, vogliono rinnovare consapevolmente la propria didattica utilizzando le nuove risorse tecnologiche anche in settori disciplinari che sembrano essere lontani, per propria natura, dal mondo tecnologico.

BIBLIOGRAFIA

- Fasano, Gentili, Ragusa-Gilli, *Il Maestro e l'lnformatica,* La Nuova Italia, Firenze 1986
- Gowin, Novak, *Imparando ad Imparare,* SEI, Torino 1989
- Per quanto riguarda l'uso delle calcolatrici tascabili vedasi
  Rapporto Tecnico sul Progetto: *Uomo-Natura, Uomo-Società, Uomo-Produzione,* vol. 1, 2, 3, 1980-81 e 1982-83, Istituto di Matematica, Università di Genova, contratto CNR
  Guala, Parenti, Repetto, Zappa (a cura di), Quaderno Didattico n.7, supplemento vol. 6 n. 4 di Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate, Agosto 1983
- Per quanto riguarda software finalizzato all'apprendimento vedasi Belzuino, Bottino, Chiappini, Ferrari, ARI-LAB, CNR, Genova

IL RUOLO DEI MODELLI PRIMITIVI DELLE OPERAZIONI ARITMETICHE NELLA RISOLUZIONE DEI PROBLEMI VERBALI

Maria Sainati Nello

Premessa. Il pensiero matematico si sviluppa e si consolida attraverso l'attività di risoluzione di problemi. Anche i "nuovi" programmi per la scuola elementare hanno recepito l'importanza di tale attività, tanto da vedere ne "I problemi" il tema fondante di tutto l'itinerario didattico per la matematica.

"....le nozioni matematiche di base vanno fondate e costruite partendo da situazioni problematiche concrete, che scaturiscano da esperienze reali del fanciullo e che offrano anche l'opportunità di accertare quali apprendimenti matematici egli ha in precedenza realizzato, quali strumenti e quali strategie risolutive utilizza e quali sono le difficoltà che incontra" (Nuovi programmi didattici per la scuola primaria, 1985).

Mettere i problemi al centro dell'azione didattica comporta che l'insegnante presti attenzione ai fattori che ne influenzano la risoluzione da parte dei bambini. Può trattarsi di fattori esterni o di "contesto", quali il tipo di situazione problematica, la formulazione del testo, gli aspetti numerici, ... o di fattori interni, relativi al soggetto, come le abilità di base, il possesso o meno di strumenti di rappresentazione, le strategie spontanee, i fattori emotivi, le convinzioni, ...

Proprio sugli ostacoli e sulle difficoltà che gli allievi incontrano nella risoluzione dei problemi, negli ultimi anni sono state pubblicate numerose ricerche che possono fornire indicazioni utili anche per l'insegnamento.

La mia esposizione riguarderà i condizionamenti che i "modelli primitivi" delle operazioni aritmetiche possono esercitare nella fase di impostazione di un semplice problema verbale, cioè nella fase in cui il bambino deve trovare quale tipo di operazione gli occorre per giungere alla soluzione.

In ogni operazione aritmetica si possono distinguere l'aspetto *formale* (le proprietà, l'essere o meno un'operazione interna a un certo insieme, ...), l'aspetto *algoritmico* (la tecnica di calcolo) e l'aspetto *intuitivo*. Proprio a quest'ultimo si fa riferimento quando si parla di modelli primitivi.

Più precisamente, per modelli primitivi si intendono quelle rappresentazioni non controllate che si formano nella mente per facilitare l'accettazione soggettiva di un enunciato matematico come cosa evidente e certa (Fischbein, 1985). Si tratta dunque di costrutti mentali individuali, che si sviluppano in una fase iniziale del processo di apprendimento e che molto spesso traggono origine da situazioni sperimentate in ambiente scolastico ed extrascolastico. La loro valenza euristica è evidente; ma, una volta stabilitisi nella mente, possono continuare ad agire al di là di ogni controllo formale, influenzando le interpretazioni e le strategie risolutive dell'allievo.

1. I dati di fatto. È noto che le caratteristiche dei dati numerici influiscono spesso sulla scelta della strategia risolutiva di un problema da parte di bambini e perfino di ragazzi più grandi.

Consideriamo, ad esempio, i seguenti problemi:

a) *1 m di stoffa costa L 30 000; quanto si spenderà per comprarne 3 m?*

b) *1 m di stoffa costa L 30 000; quanto si spenderà per comprarne 0.65 m?*

Qualora si chieda ad alunni della scuola elementare di individuare l'operazione che risolve ciascuno di essi, è frequente sentirsi rispondere che nel primo caso occorre una moltiplicazione, nel secondo una divisione[1].

Eppure, dal punto di vista strutturale, i due problemi sono equivalenti!

Come mai la diversità dei dati numerici può influenzare a tal punto la risposta? Sarebbe del tutto riduttivo, anzi fuorviante, liquidare la questione attribuendo a generiche difficoltà "con i decimali" il disagio degli alunni nel caso del secondo problema.

2. Il condizionamento dei modelli primitivi. Nella prassi scolastica le operazioni aritmetiche si innestano su situazioni concrete che ne diventano una specie di prototipo.

Ad esempio, l'addizione fra numeri naturali viene di norma introdotta per rispondere a quesiti standard come il seguente:

<u>Esempio 1</u>. *In una classe ci sono 12 bambine e 9 bambini; quanti sono in tutto gli alunni?*

La situazione, le parole che si usano, gli stessi gesti che le accompagnano concorrono a evocare l'idea di "mettere insieme", "riunire" due gruppi che dapprima si vedono separati....

Nasce, allora, spontaneo un costrutto mentale complesso che corrisponde al concetto di addizione e che coinvolge l'idea di unione con tutte le immagini, le sensazioni e le conseguenze che essa porta con sé.

1 Lo stesso tipo di risposta viene dato da ragazzi della scuola media o addirittura del biennio.

Analogamente, per la sottrazione il modello più immediato è quello che si richiama all'azione del "togliere", "portar via", con l'evidente conseguenza della diminuzione di una certa quantità iniziale.
Esempio 2. *Matteo ha 10 figurine. Se ne dà 6 a Giovanni, quante gliene rimangono?*

Una volta formatosi nella mente, qual è la sorte del modello primitivo di un'operazione? Ha vita breve, cioè viene presto superato, oppure resiste nel tempo?
Secondo una teoria ormai largamente accettata (Fischbein, 1992), il modello primitivo di un'operazione aritmetica rimane associato all'operazione stessa anche dopo che quest'ultima ha acquistato uno statuto formale e, in linea di principio, dovrebbe essersi staccata dalla interpretazione concreta.
L'azione del modello è però implicita: esso cioè agisce "dietro le quinte", senza che il suo impatto possa essere del tutto controllato dalla mente. Viene così a determinarsi un condizionamento imposto dal modello che non è detto sia in sintonia con il carattere formale della corrispondente operazione.

Questa prospettiva può suggerire una chiave di interpretazione del comportamento dei bambini e in particolare della diversità delle prestazioni da essi fornite quando devono scegliere l'operazione risolutiva di un problema.
* Se la situazione problematica è tale che il livello formale e il livello intuitivo primario sono in accordo, di solito non si rilevano difficoltà.
* Se invece i due livelli sono in contrasto, si possono riscontrare errori e fallimenti.
È noto, ad esempio, che problemi come i seguenti, suscitano difficoltà maggiori di quelle che un bambino incontra affrontando i problemi degli esempi 1. e 2.
Esempio 3. *Giocando con i compagni, Andrea ha perso 12 biglie; ora ne ha 25. Quante biglie aveva prima di giocare?*
Esempio 4. *Luca ha 14 figurine, Giacomo invece ne ha 22. Quante figurine ha in più Giacomo?*

Il problema 3. si risolve con una addizione, ma la situazione in esso prospettata non richiama immediatamente il significato intuitivo di quella operazione… Gli stessi verbi usati mettono in crisi il modello primitivo, evocando piuttosto la composizione di due operazioni opposte: Andrea ha perso… ora Andrea ha….

Dal punto di vista formale il problema 4. richiede una sottrazione, così come la richiede il problema 2. Intuitivamente, però, le due situazioni sono assai diverse….

La prima rimandava spontaneamente al modello del “togliere, portar via”, mentre la seconda si basa su una relazione di differenza che, presupponendo un confronto di quantità, è più riposta della precedente, quindi più difficile da trattare.

3. Il caso della moltiplicazione e della divisione. Per la moltiplicazione il modello che comunemente è presentato per primo, sia perché corrisponde a situazioni problematiche più immediate, sia perché si innesta direttamente sull’addizione, è quello dell’addizione ripetuta.
<u>Esempio 5.</u> *Ci sono 4 sacchetti e ogni sacchetto contiene 5 cioccolatini; quanti sono i cioccolatini in tutto?*
4 volte 5 assume il significato intuitivo di 5+5+5+5: è come se si aggiungessero 5 cioccolatini alla volta.
Anche se successivamente vengono presentati altri modelli (come quello, particolarmente importante, degli schieramenti o l’altro, più astratto, del prodotto cartesiano), si deve riconoscere che l’addizione ripetuta rimane il modello che più influenza il significato e l’uso della moltiplicazione.
Secondo tale modello i due fattori non svolgono lo stesso ruolo: uno di essi, <u>l’operatore</u>, indica quante volte si deve addizionare l’altro, <u>l’operando</u>. Così mentre 5x4 è recepito come 5+5+5+5, a 4x5 si attribuisce il significato di 4+4+4+4+4.
Tale fatto ha conseguenze a livello psicologico.
Chi deve eseguire una moltiplicazione si aspetta che:
* l’operatore sia un numero naturale
* il prodotto risulti un numero maggiore dell’operando.

Problemi moltiplicativi che hanno la stessa struttura possono dunque suscitare reazioni differenti a seconda dei dati numerici in gioco, diventando indicativi riguardo all’influenza del modello.

Infatti i bambini:
* in problemi con gli stessi dati numerici, di cui uno sia un numero naturale e l’altro un numero decimale, incontrano difficoltà diverse in funzione del ruolo che il decimale ha nella struttura del problema: maggiori se esso funge da operatore, minori se funge da operando.

<u>Esempio 6.</u> *Per fare le meringhe occorrono 1.25 hg di zucchero per ogni chiara d’uovo. Quanto zucchero ci vuole per 15 chiare d’uovo?*
<u>Esempio 7.</u> *Per confezionare una torta occorrono 15 g di lievito per ogni kilogrammo di farina. Quanto lievito occorre con 1.25 kg di farina?*

Entrambi i problemi si risolvono con una moltiplicazione, ma nel primo caso l’operatore è 15, nel secondo 1.25. È stato chiesto a bambini di quinta elementare di scegliere l’operazione risolutiva senza eseguire il calcolo: ebbene,

le risposte corrette sono state l'84% per il problema 6 e il 54% per il problema 7.
* se l'operatore è un numero decimale, il grado di difficoltà varia a seconda del "peso" della parte intera. Più precisamente

– se questa è sensibilmente maggiore di 1, l'operatore decimale sembra sia percepito a livello intuitivo come un operatore intero;

– se invece la parte intera è uguale a 1, la parte decimale più difficilmente può essere trascurata dall'interpretazione intuitiva e il conflitto con il modello primitivo dell'addizione ripetuta si fa evidente.

<u>Esempio 8.</u> *Con 1 l di benzina una macchina percorre 15 km; quanti kilometri può percorrere con 3.25 l di benzina?*

Come nel problema 7, l'operatore è decimale. Questa volta, però, la sua parte intera è maggiore di 1, così le risposte corrette sono state l'80%.
* un operatore decimale con parte intera 0 determina un condizionamento del tutto speciale: l'impossibilità di attribuire un significato intuitivo alla moltiplicazione e la previsione di dover ottenere un risultato minore dell'operando. suggerita dalla comprensione della situazione problematica, inducono molti bambini a scegliere quale operazione risolutiva la divisione anziché la moltiplicazione.
Particolarmente significativo a proposito il dialogo con Nicoletta (quinta elementare) che aveva indicato la divisione quale operazione che risolve il problema:

"*1 m di stoffa costa L 15000; quanto costano 0.65 m?*"

I. *Sei proprio sicura di aver indicato l'operazione corretta?*
N. *Sì, perché devo ottenere un risultato minore di 15000.*
I. *E se dovessi acquistare 5 m di stoffa, quanto spenderesti?*
N. *Qui ci vuole la moltiplicazione!.*
I. *Perché ora la moltiplicazione e prima la divisione se il problema è lo stesso?*
N. *Perché da che mondo è mondo moltiplicando si ottiene un numero maggiore e a me serviva un numero minore.*

La divisione per lo più viene associata a due modelli che corrispondono a due diverse situazioni concrete:
* divisione di partizione

<u>Esempio 9.</u> *Ho comprato tre merendine uguali spendendo L 2400; qual è il prezzo di una merendina?*
* divisione di contenenza

<u>Esempio 10.</u> *Gino ha speso L 6000 per comprare delle paste che costano L 1200 l'una. Quante paste ha comprato?*

I due tipi di divisione differiscono anche dal punto di vista "dimensionale". Nel primo caso:

2400 lire: 3 merendine = 800 lire / merendina.
Nel secondo caso:
6000 lire: 1200 lire / pasta = 5 paste

Dal punto di vista intuitivo, le attese di chi deve eseguire una divisione dovrebbero variare in funzione del modello di riferimento.
Se questo è il modello di partizione, ci si aspetterà che l'operando sia maggiore dell'operatore, l'operatore sia un numero naturale, il quoziente sia un numero minore dell'operando.
Se invece il modello di riferimento è quello di contenenza, si accetterà che l'operatore non sia un numero naturale, purché l'operatore stesso sia un numero minore dell'operando.

Sembra, però, che nella mente dei bambini, almeno fino alla quinta elementare, sia attivo un solo modello intuitivo primitivo, il modello di partizione, e che il secondo modello, quello di contenenza, venga acquistato in maniera stabile soltanto successivamente in seguito all'istruzione.
Infatti, analizzando il comportamento dei bambini di fronte a problemi che si risolvono con una divisione, si è constatato che:
* l'operatore decimale genera conflitti sia nel caso della divisione di partizione che nel caso della divisione di contenenza.
Ad esempio, lo stesso problema
" *Si devono piastrellare le pareti di un bagno fino a … di altezza; quante file di mattonelle quadrate di lato … si dovranno porre su ogni parete?* "
è stato proposto ad alunni di quinta elementare, una volta con l'operatore intero e l'altra con l'operatore decimale. Ebbene, gli esiti sono stati assai diversi: le risposte corrette sono state il 44% nel primo caso, il 22% nel secondo.
* quando entrambi i dati sono numeri naturali, soltanto il caso di un operatore maggiore dell'operando suscita qualche difficoltà, sia per la divisione di partizione che per quella di contenenza. In tale situazione, per rendere intuitivamente accettabile l'operazione, molti bambini commettono l'errore di invertire l'ordine dei termini.
* se in una divisione di partizione l'operando è un numero decimale, ma l'operatore è intero, si accetta anche che l'operando sia minore dell'operatore; non si avverte, cioè, il bisogno di invertire l'ordine dei termini, segno che, tra i vincoli del modello di partizione, quello che ha maggior forza intuitiva è proprio la richiesta di un "operatore non decimale".
* come per la moltiplicazione, anche per la divisione, un operatore decimale minore di 1 suscita particolari condizionamenti.
Al disagio creato dall'operatore decimale, si aggiunge infatti la convinzione, suggerita dalla situazione problematica, che il risultato debba essere maggiore dell'operando e ciò induce molti bambini a scegliere la moltiplicazione anzi-

ché la divisione, quale operazione risolutiva.

Luca, quinta elementare, doveva indicare l’operazione che risolve il problema:

“ *Ho speso L 900 per comprare 0.75 hg di cacao; quanto avrei speso per comprarne 1 hg?* ”

L. *Questo problema è proprio difficile.*

I. *Rifletti: avresti speso più o meno di 900 lire?*

L. *Di più, perché io so una cosa: 0.75 hg è meno di 1 hg.*

I. *E allora quale operazione scegli?*

L. *Non so ….*

I. *Se tu avessi speso 900 lire per comprare 2 hg di cacao, quale operazione indicheresti per trovare il prezzo di 1 hg?*

L. *Farei 900:2.*

I. *E se avessi comprato 2.65 hg di cacao?*

L. *Ancora la divisione, cioè 900 : 2.65*

I. *Torna al primo problema; qual è allora l’operazione da fare?*

L. *Qui invece di dividere bisogna moltiplicare.*

I. *Perché?*

L. *Perché devo ottenere un risultato maggiore di 900.*

Soltanto dopo avere eseguito il calcolo, Luca ha superato tutti i suoi dubbi .

4. Indicazioni didattiche. I modelli primitivi delle operazioni possono dunque rallentare, deviare o addirittura bloccare il processo risolutivo di un problema. L’acquisizione delle tecniche algoritmiche o la conoscenza di contenuti formali non sono sufficienti a vincere la resistenza di tali modelli che, anzi, appaiono fortemente radicati nella mente.

Si è detto che un modello primitivo spesso riflette il modo in cui è stato inizialmente presentato il corrispondente concetto. D’altra parte, sembra che un modello primitivo sia così influente e resistente nel tempo proprio perché basato su un fondamento intuitivamente significativo.

Dal punto di vista didattico, allora, il problema non è tanto quello di cambiare il “punto di partenza”, quanto piuttosto la necessità di fornire presto modelli alternativi.

Nel caso delle strutture additive si trarrà vantaggio, ad esempio, dall’utilizzare la linea dei numeri, favorire vari tipi di rappresentazione, lavorare sul calendario e con le monete, offrire situazioni che vengono problematizzate dapprima in senso diretto e poi in senso inverso, discutere il testo del problema, magari sostituendo determinate espressioni verbali con altre equivalenti, in un’opera di attenta “costruzione” di significati, ….

Nel caso delle strutture moltiplicative, una proposta può essere quella di procedere per analogia o di potenziare lo schema della proporzionalità.

La prima strategia, proponendo la stessa situazione problematica con dati numerici di volta in volta diversi, mira a far cogliere ai bambini lo schema soggiacente alla situazione stessa e quindi a liberarli dai condizionamenti determinati dai numeri in gioco.

Si deve, però, tenere presente che il cammino che conduce alla comprensione dell'"equivalenza strutturale" delle situazioni problematiche è tutt'altro che breve o scontato: cogliere ciò che è generale nel caso particolare è infatti un atto di pensiero creativo che presuppone la capacità di "ragionare sulle variabili" (Krygowska, 1984).

Pensare in termini di proporzionalità significa vedere i quattro numeri del problema "immersi" in una tabella più generale che rappresenta una corrispondenza fra due diversi spazi di misura.

La scoperta e l'uso degli operatori scalari e dell'operatore funzione possono fra l'altro favorire la conquista della reversibilità degli operatori stessi e aprire la strada a un corretto confronto di rapporti.

Né, infine, si deve trascurare uno stretto collegamento fra numeri decimali e frazioni: riconoscere nei numeri decimali le frazioni corrispondenti può aiutare, infatti, a fare previsioni corrette sui risultati delle operazioni in cui essi intervengono, specialmente quando si tratta di decimali compresi fra 0 e 1.

Per rendere produttive tutte queste attività è però essenziale che l'insegnante aiuti i propri allievi a divenire consapevoli dell'influenza dei loro modelli intuitivi e cerchi di contrastarla, favorendo la costruzione di adeguati sistemi di controllo.

A questo scopo non saranno mai raccomandati abbastanza l'analisi degli errori, la discussione in classe, l'esplicitazione e il confronto di strategie e di comportamenti mentali: in una parola, la valorizzazione dei processi anziché quella dei prodotti.

BIBLIOGRAFIA

M. Deri, M. Sainati Nello, M. Sciolis Marino, *Il ruolo dei modelli primitivi per la moltiplicazione e la divisione*, in "L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate", vol. 6, 1983.

A.Z.Krygowska, *Le variabili del ragionamento matematico dei bambini all'età di otto anni*, in "Processi cognitivi e apprendimento della matematica nella scuola elementare", La Scuola, Brescia, 1984.

E. Fischbein, "*Intuizioni e pensiero analitico nell'educazione matematica*" in "Numeri e operazioni nella scuola di base", Zanichelli, Bologna, 1985.

E. Fischbein, *Ostacoli intuitivi nella risoluzione di problemi aritmetici elementari*, in "Numeri e operazioni nella scuola di base", Zanichelli, Bologna, 1985.

E. Fischbein, *Modelli taciti e ragionamento matematico*, in "Matematica a scuola: teorie ed esperienze". Pitagora, Bologna, 1992.

METODI ELEMENTARI PER LA SOLUZIONE DI PROBLEMI DI MINIMO

Brunetto Piochi
Dipartimento di Matematica dell'Università, via del Capitano 15, 53100 Siena

La proposta di "apprendimento per problemi" appare come un atteggiamento didattico consolidato per quanto riguarda il lavoro matematico con gli alunni della scuola dell'obbligo. Essa fa ormai parte della prassi didattica ed è anche esplicitamente richiamata nei programmi della scuola elementare; in [2] si è anche motivata l'affermazione che questa possa essere una strada maestra per l'insegnamento della matematica ad allievi con difficoltà di apprendimento (la posizione è stata del resto fortemente supportata da molte delle comunicazioni effettuate al convegno Matematica e Difficoltà dedicato a questo argomento, [4]).

Nella scuola secondaria tale metodologia è meno diffusa, per vari motivi; fra questi la convinzione di una non immediata applicabilità degli argomenti insegnati, dovuta al fatto che la maggior parte dei problemi interessanti coinvolgono tecniche matematiche almeno al livello di derivate e integrali, e questi sono affrontati (e non in tutti i tipi di scuola) solo al termine del ciclo di studi.

Eppure anche nella scuola secondaria ci si confronta con allievi che presentano difficoltà di apprendimento in vario grado; ebbene, da una ricerca attualmente in corso sembra emergere come uno dei fattori che discriminano gli alunni con un buon rendimento da quelli con un rendimento basso sia la convinzione sul rapporto fra matematica e realtà (anche se i dati sono tuttora parziali, tuttavia nei test elaborati finora la percentuale di coloro che ritengono che "la matematica ha poco a che fare con la realtà" è inferiore al 25% fra i primi e sale a oltre il 50% nei secondi).

Diventa allora di estremo interesse ricercare dei problemi che possano essere stimolanti per degli adolescenti e che li motivino ad apprendimenti significativi. Secondo le indicazioni che ci vengono dalla psicologia infatti un problema nasce in presenza di una motivazione e di un ostacolo (Kanitza) da cui nasce l'esigenza di fermarsi a riflettere, sviluppando le vie di soluzione (Dewey) che permettano di superare l'ostacolo.

Alcuni libri di testo attualmente in adozione propongono su questa linea l'approccio a problemi di programmazione lineare, che hanno anche l'indubbio vantaggio di offrire una significativa "palestra" per l'apprendimento e l'uso di tecniche relative allo studio dei parametri nelle equazioni, mediante il disegno di grafici di rette (ma non soltanto, poiché in alcuni casi si fanno intervenire anche curve diverse).

Un altro settore interessante è certamente quello dei problemi di massimo e minimo; si tratta in gran parte di problemi "storici" su cui esistono soluzioni algebriche molto belle (si veda [3]) che hanno anche una significativa interpretazione geometrica elementare (storicamente anzi sono spesso nate da quest'ultima) ma forse poco significative per il discorso che stiamo sviluppando, in quanto molto formali ed astratte. Problemi di massimo e minimo si prestano tuttavia bene ad essere presentati agli alunni di una scuola secondaria, all'interno di una proposta didattica che parta dalla realtà; sorge allora la necessità di trovare modi per la ricerca degli estremi di una funzione, diversi da quelli classici basati sull'uso delle derivate o dello studio di quadriche, in quanto il primo viene trattato (e non sempre) al termine del ciclo degli studi secondari, ed il secondo addirittura non viene affrontato. Esistono problemi, di indubbio interesse per le applicazioni, i quali sono risolvibili anche con tecniche elementari; mediante questi si può tentare di coinvolgere anche gli alunni della scuola secondaria in una ricerca matematica reale. Ne voglio qui proporre tre esempi, tratti da [1] e da [5]

<u>Problema A</u> *"Una tipografia deve stampare dei fogli di simboli, in cui il testo occupa un'area rettangolare W (da disporre a piacere, in quanto priva di direzioni privilegiate). Conoscendo i margini da lasciare in alto, in basso, a destra e a sinistra, si determinino le dimensioni ottimali del foglio per minimizzare l'impiego di carta".*

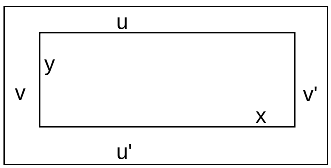
<u>Problema B</u> *"Si determinino le proporzioni fra le dimensioni di una lattina cilindrica, in modo che risulti minimo il consumo di metallo, a parità di volume V di contenuto".*

<u>Problema C</u> *"Si deve costruire un oleodotto che porti il petrolio da una piattaforma A in mezzo al mare ad un porto B sulla costa. Sapendo che le spese di costruzione sono pari a N \$/m sulla terraferma ed M \$/m in mare, si determini il percorso di minor costo".*

Tutti questi problemi conducono alla ricerca del minimo di una funzione $y=F(x)$; tale minimo è immediatamente calcolabile con l'uso delle derivate. Supponiamo però di non aver ancora introdotto tale strumento matematico e cerchiamo una soluzione per via elementare, in particolare per via algebrica o analitica, poiché ancora una volta la via geometrica (si veda in [1] una via di questo tipo per la soluzione del problema C) risulterebbe astratta, mentre le altre ci permettono di conservare, come vedremo, una interessante aderenza alla situazione considerata.

A mio parere, i vari metodi qui presentati hanno il vantaggio di richiamare costantemente lo studente alla necessità di applicare in modo corretto le diverse definizioni, guidandolo ad un ragionamento che ha tutte le caratteristiche di una dimostrazione applicata ad un caso reale. È proprio la “trasparenza” di questi metodi che a mio avviso li rende preferibili (nel senso fin qui richiamato, naturalmente) ad altri più sintetici, quali sono ad es. quelli esposti in [3], da cui pure si possono ricavare con notevole eleganza i risultati che seguono.

Problema A



La superficie stampata risulta pari a

$$S = (x + v + v')(y + u + u') = xy + x(u + u') + y(v + v') + (u + u')(v + v') =$$
$$= x(u + u') + \frac{W}{x}(v + v') + W + (u + u')(v + v')$$

La funzione da minimizzare risulta pertanto del tipo F(x) = ax + b/x (dove a,b>0). Questo problema permette una soluzione per via algebrica ed una per via analitica.

Posto F(x) = z, l’equazione z = ax + b/x, cioè $ax^2 - zx + b = 0$, è risolvibile rispetto a x (cioè permette di realizzare il foglio desiderato) se il discriminante $z^2 - 4ab$ è positivo o nullo, cioè (poiché $z \geq 0$) se $z = 2\sqrt{ab}$ = F(x).

Questo valore minimo della funzione corrisponde a $x = \frac{z}{a} = \sqrt{\frac{b}{a}}$

Un approccio forse più proficuo per lo studente può venire da considerazioni sul grafico della funzione F(x), vista come somma (per x>0) della retta y=ax e dell’iperbole equilatera y=b/x. È “ragionevole” aspettarsi che il minimo della somma lo si trovi nel punto di incontro, dove ciascuna delle due funzioni fornisce un “contributo piccolo” al totale.

Tale intuizione viene effettivamente confermata da un semplice calcolo, notando che per $x = \sqrt{\frac{b}{a}}$ (soluzione positiva di ax=b/x) si ha

F(x) $= 2\sqrt{ab}$ e davvero $F(x) - 2\sqrt{ab} = ax + \frac{b}{x} - 2\sqrt{ab} = (\sqrt{ax} - \sqrt{\frac{b}{x}})^2 \geq 0$, $\forall x>0$.

<u>Problema B</u>

Si indichi con x il raggio di base del cilindro, di volume noto V, e sia h la sua altezza. L’area della superficie totale sarà pari a:

$$S = 2\pi x^2 + 2\pi xh = 2\pi x^2 + 2\pi x \frac{V}{\pi x^2} = 2\pi x^2 + 2\frac{V}{x}$$

e dunque dovremo minimizzare una funzione del tipo: $F(x) = ax^2 + b/x$ (a,b>0).

Qui i metodi indicati per il problema precedente non funzionano; risulta però estremamente istruttivo l’esame dell’analogo meccanismo di geometria analitica, alla ricerca del “perché” esso non funziona, nonostante in modo altrettanto “ragionevole” si possa dedurre che un punto di minimo per la nostra funzione deve esistere: la somma delle due funzioni infatti decresce in un “intorno” del punto di intersezione, per poi tornare a crescere indefinitamente; tuttavia un semplice calcolo mostra che il punto di intersezione non è il punto di minimo cercato. L’intuizione dell’esistenza del punto di minimo tuttavia ci può portare alla soluzione effettiva, con il semplice aiuto del metodo di scomposizione secondo Ruffini.

Sia infatti t il valore della x corrispondente al minimo e sia F(t) ($=at^2+b/t$) il valore della funzione in tale punto; dovrà allora essere $F(x)=ax^2 + b/x \geq F(t)$, ovvero $ax^3 - xF(t) + b \geq 0$ per ogni x (>0).

Poiché per definizione $ax^3 - xF(t) + b = 0$ per x = t, allora x – t dovrà dividere il trinomio $ax^3 - xF(t) + b$. Scomponendo mediante il metodo di Ruffini otterremo:

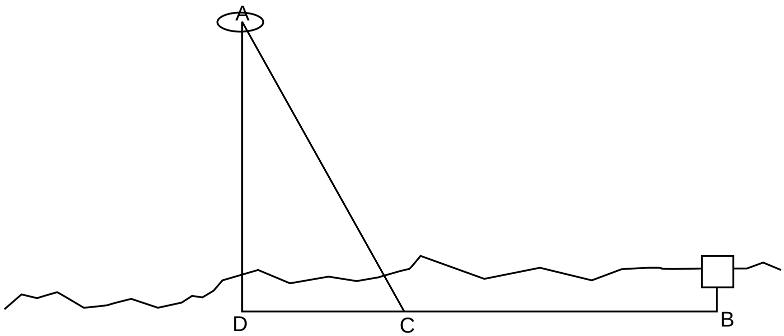
$$ax^3 - xF(t) + b = (x - t)(ax^2 + atx - F(t) + at^2).$$

Ora, se il secondo fattore non fosse divisibile per (x – t), il trinomio dato non potrebbe essere sempre ≥0. Perciò t deve essere anche soluzione di $ax^2 + atx - F(t) + at^2=0$, cioè dovrà essere $3at^2=F(t)(=at^2+b/t)$ da cui $t = \sqrt[3]{\frac{b}{2a}}$.

Per tale valore di t si ottiene infatti
$ax^3 - xF(t) + b = (x - t)(ax^2 + atx - F(t) + at^2) = (x - t)^2 (ax + 2at) \geq 0$ per ogni x positiva.
(Il metodo qui proposto è generalizzabile senza difficoltà alla ricerca del minimo di una funzione $F(x) = ax^n + b/x^m$, con a,b>0 ed m,n interi positivi).

Sostituendo i valori del problema alle costanti a e b, si ricava che la superficie totale del cilindro è minima quando il raggio di base x è pari a $\sqrt[3]{(\frac{V}{2\pi})^2}$, ovvero quando l'altezza è uguale al diametro di base.
Questa scoperta può facilmente prestarsi a considerazioni sulle forme dei contenitori più comuni in commercio, confrontando una lattina di bibita, per cui si preferisce privilegiare la forma anatomicamente più maneggevole, ed un barattolo di pomodori pelati per cui invece la forma segue la formula di ottimizzazione trovata per via teorica.

Problema C



Se AD=h, DB = g, posto DC=x, il percorso AC+CB avrà un costo pari a:

$$S = M\sqrt{h^2 + x^2} + N(g - x).$$

Minimizzare il costo significa precisamente minimizzare una funzione del tipo:

$$y = \sqrt{h^2 + x^2} - kx \qquad (*).$$

In [1] abbiamo considerato questo problema proponendone anche una soluzione per via geometrica elementare, che coinvolge l'uso di un "modello" geometrico che interpreta le grandezze in gioco come lunghezze e aree di opportuni parallelogrammi, sviluppando quindi alcune considerazioni a partire dai criteri di equivalenza fra questi ultimi. Tuttavia la ricerca del minimo per tale classe di funzioni si presta anche ad uno studio per via algebrica o per via analitica.

Per quanto riguarda la via algebrica, in [1] sono proposte due diverse strade; di queste, una (che segue l'analoga proposta per la soluzione del Problema A) mi sembra essere particolarmente interessante poiché presenta una applicazione concreta della tecnica di discussione delle equazioni irrazionali .

Osserviamo anzitutto che (dovendo essere x>0 e k>0), la ricerca del minimo per la funzione ha un senso se k≤1 (da cui segue facilmente y>0). Altrimenti si prova facilmente che y assume valori positivi solo per $x \leq \frac{h}{\sqrt{k^2-1}}$, mentre al crescere della x, la y assume valori negativi sempre crescenti in valore assoluto (come è facile verificare con un semplice esame della disuguaglianza coinvolta) e pertanto il minimo non può esistere. Si noti come questa informazione su k corrisponda nel nostro problema alla ovvia supposizione che il costo per la posa di un tratto di oleodotto in mare è superiore a quello della posa di un tratto corrispondente sulla terraferma, mentre nel caso opposto si avrebbe addirittura un costo "negativo".

Ciò detto, si trasformi la funzione (*) in equazione e la si razionalizzi, in modo da ottenere: $x^2(k^2 - 1) + 2kxy + y^2 - h^2 = 0$, che risolveremo rispetto ad x. Dovendo essere x reale, il discriminante di tale equazione dovrà essere positivo o nullo, il che è vero (ricordando che y >0) solo per $y \geq h\sqrt{1-k^2}$. Ne segue che tale valore di y rappresenta il minimo valore possibile per la funzione ed esso (annullando il discriminante) corrisponde al valore cercato della variabile $x = \frac{ky}{1-k^2} = \frac{kh}{\sqrt{1-k^2}}$, ascissa del punto di minimo per la nostra funzione.

Assai interessante è comunque ancora una volta la via grafica alla ricerca del minimo. La funzione (*) può essere vista come la misura della distanza fra un ramo della iperbole equilatera $y^2 - x^2 = h^2$ e la retta y=kx. Di nuovo è immediato dedurne che, perché abbia senso la ricerca del minimo per tale distanza, deve essere k≤l (1 è precisamente il coefficiente angolare dell'asintoto destro dell'iperbole); in questo caso la distanza sarà minima nel punto di contatto fra il ramo di iperbole e la retta di coefficiente angolare k e tangente all'iperbole stessa. Un semplice calcolo permette di nuovo di trovare il valore di x corrispondente.

Bibliografia

[I] R. Bianchi, B. Piochi - Una via geometrica elementare per la ricerca del minimo su una famiglia di funzioni, *Archimede*, Fasc. 1, 1992, pp. 30-35

[2] A. Contardi, M. Pertichino, B. Piochi, Apprendimento della matematica: insegnamento per problemi e alunni con handicap, *Psicologia e Scuola*, 71 (XV) (1994), pp. 3-8

3] D. Palladino - Massimi e minimi per via elementare, *Nuova secondaria*, vol V (5), 1988, pp. 67-69

[4] AA.VV., *Problemi e alunni con problemi*, Pitagora Ed., Bologna 1997

[5] B. Piochi - Problemi di minimo risolvibili con metodi elementari, in B. Micale e G. Pluchino (a cura di), *Atti XV Convegno sull'insegnamento della matematica: Aritmetica, informatica, logica nell'educazione matematica*, Grosseto, 29-31 ottobre 1992, Notiziario Unione Matematica Italiana, suppl. n. 5, maggio 1993, pp. 137-140

DEFINIZIONI DI CONTINUITÀ

Umberto Bottazzini
Dipartimento di Matematica e Applicazioni, via Archirafi 34 - I - 90123 Palermo e
Centro Linceo Interdisciplinare 'B. Segre', Accademia dei Lincei, via della Lungara 10
I - 00165 Roma

1. "La continuità è ancora un'idea confusa, afferma Kronecker, che definisce in iscuola come continua una funzione reale $\phi(x)$ d'una variabile x quando, fissata una quantità δ piccola quanto si vuole, si possa rendere

$$\phi(x)- \phi(x') < \delta$$

e questa disuguaglianza sussista poi ponendo in luogo di x' qualunque altro valore che più di esso si accosti a x" (Bottazzini [1981], 216).

Così, con la sbrigatività di un appunto, nell'autunno del 1864 Felice Casorati annota il contenuto di una conversazione con il matematico di Berlino Leopold Kronecker. In particolare, confusi sono i rapporti tra continuità e derivabilità. "Ma è necessario perché una funzione s'abbia a dire continua, - chiede infatti Casorati - che

$$\lim_{x'=x} \frac{\phi(x)- \phi(x')}{x-x'}$$

sia finito?" In altri termini, la derivabilità è una condizione necessaria per la continuità? E' dunque vero il 'teorema di Ampère', che una funzione continua è sempre derivabile (salvo al più in punti 'eccezionali')?

Casorati non è matematico di secondo piano, è uno dei protagonisti del grande sviluppo che la matematica italiana conosce nella seconda metà del secolo scorso. Tanto più significativi sono dunque i dubbi e le questioni che emergono nei suoi incontri coi matematici berlinesi, con Kronecker e con Weierstrass, poiché rivelano quanto precari fossero, ancora in quegli anni, concetti fondamentali in analisi come quello di continuità. Un concetto di cui abbiamo evidenza immediata e intuitiva. Ma forse proprio per questo riesce così difficile darne una definizione rigorosa, libera da circoli viziosi, che non faccia implicitamente appello al concetto da definire, come invece avveniva in molti dei manuali e degli articoli pubblicati fin verso la metà dell'Ottocento.

Nel suo monumentale *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* in tre volumi (1797-1800), la cui terza ristampa era apparsa nel 1837, Lacroix (1837, I, 88) per esempio aveva definito *legge di còntinuità* "quella che si osserva nella descrizione delle linee mediante il movimento e secondo cui i punti consecutivi di una stessa linea si succedono senza alcun intervallo".

Né molto più rigorosa era la definizione data nello stesso anno da Dirichlet, in un celebre articolo sulla convergenza delle serie di Fourier. "Si pensino con a e b due valori fissati e con x una grandezza variabile che debba assumere gradatamente (*nach und nach*) tutti i valori che giacciono tra a e b. Ora, se ad ogni x corrisponde un unico y finito e tale che, mentre x percorre con continuità (*stetig*) l'intervallo da a a b, $y = f(x)$ vari in maniera altrettanto graduale, allora y si dice una funzione continua (*stetig*) di x su questo intervallo" (Dirichlet 1837, 135).

Dopo aver precisato che non era affatto necessario che la dipendenza di y da x fosse data da una stessa legge su tutto l'intervallo e neppure che fosse esprimibile mediante operazione matematiche, Dirichlet faceva appello all'immagine di una curva connessa (*zusammenhängende*) per fornire un'interpretazione geometrica del concetto di continuità di una funzione.

2. Per chiarire il senso delle precisazioni di Dirichlet occorre ricordare che, ancora nei primi decenni dell'Ottocento, la nozione di continuità largamente accettata era quella che Euler aveva definito nel 1748, nell'*Introductio in analysin infinitorum.*

Nel secondo volume di quel trattato Euler aveva associato l'idea di continuità di una funzione a quella di una curva. Giacché le curve sono "il risultato di funzioni", scriveva Euler, la "natura" di una linea curva sarà determinata dalla funzione che la definisce. Ora, una linea curva continua "è quella la cui natura è espressa da una sola funzione determinata della x". "Discontinua" o "mista" o "irregolare" è invece, per Euler, una curva composta da differenti parti continue, determinate da più funzioni della x.

Dal punto di vista moderno, la classificazione euleriana sembra riconducibile alla distinzione tra curve (e funzioni) differenziabili e curve (e funzioni) continue. Alle prime corrispondono le curve (le funzioni) continue secondo Euler, alle seconde quelle 'discontinue', 'miste' o 'irregolari'. Per Euler la continuità è dunque una proprietà 'globale' di una funzione, una proprietà che ne denota la "natura" su tutto il dominio di esistenza.

Sorprendentemente, in questo panorama di continuità "globale" si affaccia un'idea "puntuale" della continuità in un passo della *Theorie des fonctions analytiques* (1797) di Lagrange passato spesso inosservato. Il punto di partenza della teoria lagrangiana era l'idea che ogni funzione $f(x)$ si può sviluppare in serie

$$f(x+i) = f(x) + ip + i^2q + i^3r + \ldots$$

dove i è una indeterminata e $p, q, r, \ldots$ sono funzioni di x "derivate" dalla funzione $f(x)$. Infatti, osserva Lagrange, in primo luogo $f(x+i) = f(x) + iP$ dove $P = P(x, i)$. Chiamata p la parte di P che non si annulla per $i = 0$, si ha $P = p + i\,Q$. Ragionando in maniera analoga si ottiene $Q = q + i\,R$ e così via, generando la serie di partenza dove i resti iP, iQ, iR etc sono uguali a zero per $i = 0$. Ne segue, osservava Lagrange (1797 [1813], 28) che "si può sempre prendere i abbastanza piccolo in modo tale che un termine qualunque [della serie] sia maggiore della somma di tutti i termini che lo seguono, e che ciò avvenga anche per tutti i valori più piccoli di i".

Nella dimostrazione di questa "proposizione fondamentale" Lagrange fa appello ad un'immagine geometrica, "considerando la curva di cui i sarà l'ascissa e una di queste funzioni [iP, iQ, iR, etc] l'ordinata". Tale curva passa per l'origine e il suo andamento, afferma Lagrange, "sarà necessariamente continuo a partire da questo punto". Il suo ragionamento si lascia immediatamente tradurre in termini moderni. Sia per es. $f(i) = iP$ la funzione considerata, continua nell'intorno dell'origine e tale che $f(0) = 0$. Allora per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un i (> 0, diciamo) tale che $f(i) < \varepsilon$ e, per ogni j, $0 < j < i$, $f(j) < \varepsilon$. Questa era per Lagrange una conseguenza della continuità.

Anche se nella *Théorie* Lagrange non definisce cosa egli intenda per curva (o funzione) continua, nel passo citato egli non sembra avere in mente la continuità euleriana. e neppure l'idea - che sarà anche di Cauchy - che la continuità di una funzione esprime il fatto che ad una piccola variazione della variabile indipendente corrisponde una variazione altrettanto piccola del valore assunto dalla funzione. Lagrange sembra piuttosto pensare a quella che oggi chiamiamo continuità puntuale di una funzione.

3. Fin dal 1817 nelle sue lezioni all'Ecole Polytechnique Cauchy aveva presentato ai suoi studenti la definizione di continuità di una funzione poi pubblicata nel *Cours d'analyse*. "Sia $f(x)$ una funzione della variabile x, e supponiamo che, per ogni valore di x compreso tra due limiti dati, questa funzione ammetta costantemente un unico valore finito. Se, partendo da un valore di x compreso tra questi limiti, si attribuisce alla variabile x un incremento infinitesimo α, la funzione stessa riceverà per incremento la differenza

$$f(x+\alpha) - f(x)$$

che dipenderà al tempo stesso dalla nuova variabile α e dal valore di x. Ciò posto, la funzione $f(x)$ sarà, tra i due limiti assegnati alla variabile x, funzione continua di questa variabile, se, per ogni valore di x compreso tra questi limiti, il valore numerico [assoluto] della differenza

$$f(x+\alpha) - f(x)$$

decresce indefinitamente con quello di α".

O, "in altri termini", nel linguaggio degli infinitesimi generalmente preferito da Cauchy, "l*a funzione $f(x)$ resterà continua rispetto ad x entro limiti dati, se, entro questi limiti, un incremento infinitesimo della variabile produce sempre un incremento infinitesimo della funzione stessa*" (Cauchy 1821 [1992], 34-35).

L'interpretazione della definizione di Cauchy ha diviso le opinioni degli storici. L'analisi dell'uso che ne fa Cauchy e il confronto con il testo delle contemporanee lezioni tenute da Ampère, suo amico e collega all'Ecole Polytechnique, sembra legittimare una lettura in termini di continuità 'uniforme'. Del resto, è quest'ultima la nozione che definisce ad esempio anche Riemann, in apertura della sua *Inauguraldissertation* (1851).

4. Il passo essenziale da compiere per uno studio rigoroso dei fenomeni della continuità è la definizione della continuità della retta. Questa, per Cauchy e ogni altro matematico del suo tempo, era semplicemente data, stava davanti agli occhi. Non c'era alcuna necessità di definirla. La definizione 'aritmetica' della continuità della retta (in altri termini, la costruzione del campo dei numeri reali) fu presentata da Weierstrass nelle sue lezioni prima ancora che Dedekind e Cantor la pubblicassero in due articoli contemporanei e indipendenti.

Come ebbe a dire Felix Klein, con la loro opera si affermò un nuovo modello di rigore, secondo una tendenza che lo stesso Klein propose di chiamare "aritmetizzazione della matematica". Se per Weierstrass la costruzione del campo reale rappresentava il fondamento 'aritmetico' dell'intero edificio dell'analisi (reale e complessa), per Dedekind e Cantor quella costruzione costituì invece, pur con prospettive diverse , il primo passo nello studio del problema dei fondamenti della matematica.

BIBLIOGRAFIA

BOTTAZZINI, U., *Il calcolo sublime. Storia della matematica da Euler a Weierstrass,* Boringhieri, Torino 1981

BOTTAZZINI, U., FREGUGLIA P., TOTI RIGATELLI, L., *Fonti per la storia della matematica,* Sansoni, Firenze 1992

CAUCHY, A.-L., *Cours d'analyse algebrique,* Paris 1821 [reprint CLUEB, Bologna 1992]

DIRICHLET, P.G.L., 'Über die Darstellung ganz willkürlicher Funktionen durch Sinus- und Cosinusreihen', *Repertorium der Physik* (1837), 152-174 (= *Werke*, I, 133-160)

LAGRANGE, J.-L., *Théorie des fonctions analytiques,* Paris 1797 [2ème ed. 1813 = *Œuvres de Lagrange*, IX)

ELENCO DEI PARTECIPANTI

Rita Albani	Sc. Elementare F.A. Paliotti	Terontola AR
Maria Rosa Ardizzone	Sc. Elem. Giardinieri 52° Circolo	Roma
G. Alba Avarello	Scuola Elementare Lavagnini	Firenze
Annunziata Binetti	26° Circolo	Bari
Antonella Bragagna	Scuola Elementare Bernardi	Cognola TN
Emilia Bulgarelli	Dir. Didattica Leopardi	Torino
Lidia Chiesa	Scuola Elementare	Corsico MI
Stefania Cotoneschi	Scuola-Città Pestalozzi	Firenze
Paola Crocini	1° Circolo	Aprilia LT
Maria De Luca	Scuola Elementare	Biccari FG
Raffaella De Luca	1° Circolo	Acri CS
Giovanna Di Nuccio	Dir. Didattica	Sparanise CE
Daniela Fognani	Sc. Elementare G. Pascoli	Riolo Terme RA
Antonio Fundarò	Scuola Elementare N. Mantegna	Palermo
M. Piera Genta	3° Circolo	Moncalieri TO
Franco Giua	Dir. didattica 2° Circolo	Sinnai CA
Orietta Grazietti	Dir. Didattica 1° Circolo	Terni
Cristina Lanzeni	Pl. Grignano Dir. Did. Brembate	Brembare BG
Mario Maggi	Scuola Elementare di Cavi	Lavagna GE
Maria Cristina Martin	Sc. El. Monte Grappa 2° Circolo	Aprilia LT
Franca Masi	Sc. Elem. P.za Repubblica	Cattolica AN
Rosaria Menna	Sc. Elem. 5° Circ. Plesso 10H	Napoli
Donatella Merlo	Sc. Elementare Collodi	Pinerolo TO
Rosalba Pibiri	Scuola Elementare 2° Circolo	
Anna Piccinato	Sc. Elementare Nogarola	Verona
Maria Vittoria Picone	1° circolo Plesso S. Francesco	Sciacca AG
Concetta Pilla	Sc. Elem. De Amicis 1° Circolo	S. Severo FG
Amabile Regoli	Dir. Didattica 2° Circolo	Villafranca VR
Laura Riva	Scuola Elementare A. Moro	Pontirolo Nuovo BG
Marinora Ruffini	Scuola Elementare	Arcola SP
Pina Scarpa	Scuola Elementare Mezzate	Peschiera B. MI
Cinzia Scheriani	Scuola Elementare Carducci	Trieste
Patrizia Sensini	Sc. Elem. Pertini 2° Circolo	Narni Scalo TR
Lucia Stega	Dir. Didattica 4° Circolo	S. Severo FG
Paola Tomà	Scuola Elementare Italo D'Eramo	Genova
Maria Varriale	Scuola Elementare La Caletta	La Caletta NU
Rosalia Veno	Dir. Did. 1° Circ. R. Margherita	Avellino
Rita Ventura	Dir. Didattica	Città S. Angelo PG
Liliana Verzi	Dir. Didattica 1° Circolo	Gravina di Catania CT
Giovanni Viglianti	Scuola Elementare 1° Circolo	Priverno LT

VOLUMI DELLA COLLANA *QUADERNI* GIÀ PUBBLICATI

1 – Gestione e innovazione*
2 – Lo sviluppo sostenibile
3 – La valenza didattica del teatro classico
4 – Il postsecondario per la professionalità* (2 tomi)
5 – Dalla memoria al progetto
6 – La sperimentazione della sperimentazione*
7 – L'algebra fra tradizione e rinnovamento
8 – Probabilità e statistica nella scuola liceale
9 – L'Italia e le sue isole
10 – Lingua e civiltà tedesca
11 – La scuola nel sistema polo** (manuale guida)
12 – La "città" dei filosofi
13 – Le città d'Europa
14 – Dal passato per il futuro
15 – Gestione, innovazione e tecnologie*
16 – Per non vendere il cielo
17 – Briser la glace: la dinamica della comunicazione francese
18 – Dalla lingua per la cultura: la didattica del latino
19 – L'insegnamento della geometria (2 tomi)
20 – La lingua del disegno: al crocevia fra scienza e arte
21 – Insegnare storia**
22 – Problemi della contemporaneità.
Tomo primo: Unità e autonomie nella storia italiana
23 – Aritmetica**
24 – Analisi matematica**

N.B. I titoli caratterizzati dall'asterisco (*) si riferiscono a *Quaderni* dedicati alla formazione dei Presidi; gli altri sono dedicati alla formazione dei Docenti. I titoli segnalati col doppio asterisco (**) si riferiscono alla serie "Documenti di lavoro"

VOLUMI IN CORSO DI PUBBLICAZIONE

25 – Logica, probabilità, statistica
26 – Se hace camino al andar: didattica della comunicazione spagnola
27 – Gli IDEI nel progetto formativo
28 – Il linguaggio dei linguaggi

matteoni stampatore Lucca
marzo 1998

MALGRÉ TOUT

«Io non credo che si renda omaggio
alla verità e alla giustizia, che della
verità è compagna inseparabile,
se non si riconoscono accanto ai limiti
e alle carenze, non lievi, certamente non
marginali, che a volte toccano la vita
della scuola, anche i meriti e l’impegno,
sempre umile e qualche volta eroico,
dei tanti che nella scuola ci stanno con
fermezza di propositi, con chiarezza di
obiettivi, con sincerità di convinzioni
socio-culturali.»

Romano Cammarata