Ministero della Pubblica Istruzione

Direzione Generale Istruzione Classica Scientifica e Magistrale

Direzione Generale Istruzione di Primo Grado

Unione Matematica Italiana

QUADERNI 26/1

DOCUMENTI DI LAVORO

“I TEMI ‘NUOVI’ NEI PROGRAMMI DI MATEMATICA (PROBABILITÀ, STATISTICA, LOGICA, …) E IL LORO INSERIMENTO NEL *CURRICULUM*”

4° Corso MPI-UMI in Didattica della Matematica per Docenti di Scuole Medie

Liceo Scientifico Statale
“A. Vallisneri”
Lucca

1/11 settembre 1997

Quaderni ed Atti pubblicati dal Ministero della Pubblica Istruzione

Direttore: G. Trainito
Direttore editoriale: L. Catalano
Coordinatore editoriale: A. Portolano
Editing: A. R. Cicala, E. Giansanti, G. Zito, P. Manzioli
Coordinamento del presente volume curato da Giuseppe Ciri
Revisione scientifica del testo Lucia Ciarrapico, Claudio Bernardi e Paolo Nardini
Grafica: F. Panepinto

Il presente fascicolo potrà essere riprodotto per essere utilizzato all'interno delle scuole in situazioni di formazione del personale direttivo e docente (Corsi, Collegi, riunioni per materia).

Nota editoriale
In questo quaderno sono raccolti i materiali che costituiscono lo specifico dei Seminari di formazione per Docenti degli Istituti afferenti alla Direzione classica, scientifica e magistrale.
Essi sono stati prodotti da corsisti e relatori nella forma finale, con la collaborazione scientifica del Comitato di redazione. Altri pur pregevoli contributi individuabili nel Programma non vengono qui raccolti, in quanto la loro ricaduta formativa si esplica in un ambito più generale e, pertanto, in tutto o in parte, sono già stati divulgati. Essi sono, comunque, disponibili presso la Direzione Generale dell'Istruzione Classica Scientifica e Magistrale.

Ministero della Pubblica Istruzione

Direzione Generale Istruzione
Classica Scientifica e Magistrale

Direzione Generale Istruzione
Primo Grado

Unione Matematica Italiana

“ I TEMI ‘NUOVI’ NEI PROGRAMMI DI MATEMATICA (PROBABILITÀ, STATISTICA, LOGICA, …) E IL LORO INSERIMENTO NEL *CURRICULUM* ”

4° Corso MPI-UMI in Didattica della Matematica
per Docenti di Scuole Medie

Liceo Scientifico Statale
“A. Vallisneri” - Lucca
1-11 settembre 1997

LA SERIE “DOCUMENTI DI LAVORO” DEI NOSTRI QUADERNI

La collana “Quaderni” della Dirclassica si arricchisce di una nuova “serie”: essa porta quali suoi “segni” grafici distintivi il dorso rosso della copertina e la dizione “documenti di lavoro” che vi compare in aggiunta a quelle che contrassegnavano i “tradizionali” fascicoli “verdi” e “grigi”. Ogni nuovo nato è testimonianza di vitalità. E difatti questa nuova serie risponde a una triplice esigenza di sviluppo.

In primo luogo, quella di dare tempestiva comunicazione del lavoro che la nostra Direzione viene compiendo – a ritmi di costante accelerazione – sul terreno della formazione e dell’aggiornamento degli operatori scolastici. Il numero crescente delle nostre iniziative richiede non solo un allargamento degli strumenti, ma pure un utilizzo delle forze e delle risorse disponibili che sappia farsi via via più articolato e diffuso.

In secondo luogo, alcuni seminari – per la loro peculiare natura di essere finalizzati a discutere questioni di pressante attualità – richiedono che gli esiti di lavoro trovino una disseminazione nella nostra realtà scolastica al possibile immediata e richiedono, pertanto, un taglio delle pubblicazioni che sappia privilegiare – rispetto alle altre serie – non solo la rapidità dei tempi, ma anche la caratteristica di indispensabile supporto informativo e documentario.

Infine – last but not least – *la scuola dell’autonomia richiederà sempre di più ai nostri presidi e ai nostri docenti la capacità di “volare da soli”: questa terza serie, infatti, continuerà sì a essere il frutto di un dialettico rapporto di collaborazione tra “centro” e “periferia” e potrà ancora contare su un momento di editing teso a uniformare i criteri generali dell’intera collana, ma – in pari tempo – vedrà sempre più accentuato il responsabile ruolo delle singole scuole nella produzione di questo peculiare “prodotto” culturale.*

In tal modo, ritengo che non solo aumenteranno le frecce al nostro arco, ma riusciremo pure – questi almeno sono l’impegno e la speranza – a garantire alla collana grigia e a quella verde lo spazio temporale e la disponibilità umana per il lavoro legato alle scansioni necessariamente più dilatate dell’approfondimento tematico di alcune questioni di fondo.

Luigi Catalano

INDICE

PRESENTAZIONE

Alla fine del 1993 il Ministero della Pubblica Istruzione e l'Unione Matematica Italiana hanno sottoscritto un protocollo d'intesa per promuovere "programmi comuni per la ricerca e la diffusione di metodologie didattiche, adeguate ai recenti sviluppi scientifici e tecnologici, nel campo della matematica e delle sue applicazioni". Il protocollo, che costituisce il primo accordo del genere tra il Ministero ed una società scientifica, nasce dalla consapevolezza che una collaborazione tra mondo della scuola e università possa essere estremamente utile per realizzare forme di aggiornamento, di formazione in servizio e più generalmente, per offrire un sostegno concreto all'attività dei docenti.
In questo quadro, il protocollo prevede che il Ministero e l'Unione Matematica Italiana organizzino congiuntamente ogni anno un Corso residenziale della durata di due settimane, dedicato all'aggiornamento dei docenti di matematica.
Il progetto è stato puntualmente realizzato; a partire dal 1994 si sono tenuti a Viareggio corsi riguardanti i principali argomenti della matematica; il numero dei docenti coinvolti per motivi logistici ed organizzativi di norma è stato contenuto entro gli ottanta, dei quali la metà della scuola secondaria e l'altra metà, alternativamente della scuola media e delle elementari.
Nel 1997 si è giunti alla quarta edizione del Corso, tenutosi dal primo all'undici settembre a Lucca con il supporto tecnico-organizzativo del Liceo Scientifico "Vallisneri" come nei corsi precedenti. Le domande di ammissione al corso al solito sono state moltissime. Come ormai è consuetudine, sono stati ammessi 36 docenti, scelti tra quelli di ruolo in servizio presso la Scuola Media in modo da rappresentare tutte le regioni.
Gli argomenti affrontati questa volta riguardano dei temi particolarmente significativi ed innovativi, cioè la probabilità, la statistica e la logica matematica, argomenti che fanno parte dei programmi scolastici del '79. Nella loro presentazione, si è avuta particolare cura nel proporre ai colleghi conoscenze di base, il più possibile collegate ai vari settori della matematica, così come a contesti significativi del 'mondo reale', come pure opportune trasposizioni didattiche adatte all'età dei discenti.
Il Corso si è articolato in 4 cicli di lezioni con esercitazioni, conferenze, lavori di gruppo ed esercitazioni al calcolatore, per complessive 80 ore di lezione. Il testo proposto è al solito una sintesi dei lavori svolti nel Corso; si tratta di lezioni teoriche, esemplificazioni, spunti didattici.
L'idea è che questo materiale, sintetizzato in un libro che viene inviato gratuitamente alle scuole che ne facciano richiesta al Liceo Vallisneri, possa servire

per ulteriori corsi di aggiornamento in sede locale, opportunamente supportati dai partecipanti stessi a questo Corso e da docenti delle varie Università (una specifica circolare ministeriale contiene gli indirizzi cui rivolgersi, regione per regione). Come è già avvenuto per le precedenti edizioni, può quindi iniziare un ‘circolo virtuoso’, che produce diffusione di maggiore consapevolezza didattica e competenza nei docenti della scuola.

Lucia Ciarrapico - Ferdinando Arzarello

PROTOCOLLO DI INTESA M.P.I. - U.M.I
4° CORSO MPI-UMI IN DIDATTICA DELLA MATEMATICA
“I TEMI “NUOVI“ NEI PROGRAMMI DI MATEMATICA (PROBABILITÀ, STATISTICA, LOGICA, ...) E IL LORO INSERIMENTO NEL *CURRICULUM*”

SEZIONE MEDIE

Programma

Cicli di lezioni:

A **Maria Sciolis Marino -** Università di Pisa
Probabilità e Statistica

B **Roberto Tortora -** Università di Napoli
Logica e linguaggio

C **Paolo Boieri -** Politecnico di Torino
Informatica e strumenti informatici

D **Raimondo Bolletta -** (CEDE - Roma)
Integrazione di temi vecchi e nuovi

STAFF DI GESTIONE DEL SEMINARIO

Direttore: Giuseppe Ciri

Relatori:
Gabriele Anzellotti - Università di Trento
Paolo Boieri - Politecnico di Torino
Raimondo Bolletta - CEDE - Roma
Giorgio Dall'Aglio - Università di Roma "La Sapienza"
Dario Palladino - Università di Genova
Carla Rossi - Università di Roma "Tor Vergata"
Maria Sciolis Marino - Università di Pisa
Roberto Tortora - Università di Napoli

Segreteria organizzativa:
Francesca Antonelli, Ilaria Ercoli, Cesare Matteoni, Maria Luisa Radini, Giovanni Romani.

PROBABILITÀ E STATISTICA

Maria Sciolis Marino
Scuola Media "E. Fermi" di Pontasserchio (PI)
Sezione staccata della Scuola Media "G.B. Niccolini" di San Giuliano Terme (PI)

Probabilità e statistica nei programmi dei diversi ordini di scuola

La lettura dei contenuti di probabilità e di statistica indicati nei programmi della scuola elementare (1985) e nei programmi della scuola media (1979) e il confronto con le proposte su questi temi contenute nei programmi per il biennio della scuola secondaria superiore (Commissione Brocca 1991) portano a qualche considerazione di carattere generale.

E' utile innanzi tutto chiedersi perché probabilità e statistica siano state introdotte già nell'insegnamento di base.

Una prima risposta deriva dal ruolo sempre più importante svolto da queste discipline negli ultimi decenni, sia per lo sviluppo che hanno avuto nel pensiero e nella ricerca scientifica sia per i modelli matematici che hanno offerto alle scienze contemporanee.

E' opportuno altresì mettere in evidenza altre motivazioni più vicine a chi si occupa di problemi didattici.

Le questioni di probabilità e di statistica costituiscono un ampio campo concettuale; richiamano infatti concetti, procedure, rappresentazioni diversi, ma strettamente connessi fra loro, quali rapporti, confronto di rapporti, proporzioni, frazioni, numeri decimali, tecniche combinatorie, insiemi, operazioni insiemistiche, diagrammi di vario tipo, ... E' così possibile trovare occasioni di consolidamento di conoscenze già possedute o stimoli per l'introduzione di nuovi argomenti, superando in ogni caso un insegnamento eccessivamente sequenziale.

Inoltre probabilità e statistica rappresentano un ambito in cui è possibile trovare interessanti esempi di matematizzazione e affrontare problemi che non ripetono schemi consueti, ma che anzi sollecitano un atteggiamento euristico.

Lo stesso obiettivo di fondo che i programmi della scuola elementare e della scuola media assegnano all'educazione matematica, cioè lo sviluppo della capacità di osservare la realtà, di interpretarla, di dare giudizi autonomi e di fare scelte consapevoli, richiede che nell'insegnamento di base trovino posto considerazioni probabilistiche e statistiche.

Infine una motivazione decisiva scaturisce da quanto ha elaborato su questi temi la psicologia dell'apprendimento. E' accertato che l'approccio probabilistico-statistico ai problemi rappresenta un modo di pensare specifico, essenzialmente diverso da quello basato su schemi deterministici, che risulta privilegiato di solito nell'educazione scolastica e nell'esperienza. E' opportuno allora introdurre lo studio di elementi di probabilità e statistica prima che il pensiero giunga alla sua completa strutturazione, cioè prima della conquista degli schemi formali.
Infatti una serie di ricerche, in cui i soggetti erano ragazzi dai 6 ai 14 anni, ha messo in evidenza che di fronte ad alcune situazioni aleatorie proprio i più piccoli forniscono spontaneamente il maggior numero di risposte corrette. Si fa qui riferimento alle esperienze del Fischbein [11], in cui il materiale sperimentale era costituito da tavolette di legno con opportune scanalature.

Nei primi due casi tutti riconoscevano che non c'era un percorso preferenziale per una biglia lasciata cadere all'imbocco del canale principale; nel terzo caso i bambini più piccoli continuavano a riconoscere l'equivalenza delle possibili strade, mentre i più grandi sono stati tratti in inganno dall'asimmetria delle scanalature e hanno indicato un percorso particolare.

La conoscenza dei contenuti di probabilità e di statistica proposti per il biennio della scuola secondaria superiore consente poi di vedere lo sviluppo in verticale di questi argomenti nell'insegnamento e di mettere meglio a fuoco il ruolo della scuola media. Si tratta da una parte di offrire agli alunni una base esperienziale (estrazioni di biglie, lanci di dadi o di monete, ...) che susciti in loro intuizioni adeguate per capire e risolvere problemi nel campo della probabilità, dall'altra l'insegnamento deve essere organizzato come una costruzione concettuale sistematica che prepari il terreno per una successiva "strutturazione assiomatica della teoria" (commento al tema 4 nei programmi della Commissione Brocca).

La teoria della probabilità e le diverse tendenze

Ha interesse, dal punto di vista didattico, rendersi conto che attualmente si discute di approcci diversi alla teoria della probabilità. E' perciò opportuno fare un cenno molto schematico alle principali tendenze:

1) concezione classica

La probabilità viene data a priori, come rapporto tra il numero dei casi favorevoli all'evento considerato e il numero dei casi possibili, in situazioni di simmetria.

Questa concezione viene criticata perché:

- è problematico parlare di equiprobabilità a priori degli eventi elementari: infatti, da un punto di vista teorico, si introduce l'idea di equiprobabilità prima di dire cos'è la probabilità; inoltre non può essere stabilita a priori neppure la simmetria nel comportamento di un sistema fisico
- l'applicabilità è piuttosto limitata.

2) concezione frequentista

Viene data a posteriori una probabilità che è nelle cose. La probabilità viene definita come la frequenza limite, cioè il valore attorno a cui si stabilizza la frequenza relativa degli eventi favorevoli in una successione di prove ripetute nelle stesse condizioni al crescere del numero delle prove.

Anche in questo caso si avanzano diverse critiche:

- E' delicato il concetto di "limite", applicato a dei valori ottenuti sperimentalmente, quindi forzatamente in numero finito e del tutto casuali
- Non è chiaro che cosa si intenda con prove fatte nelle stesse condizioni
- E' problematico applicare la definizione a un singolo evento.

3) concezione soggettiva

La probabilità viene vista come una valutazione della nostra mente. La probabilità cioè esprime il grado di fiducia che una persona ha nel verificarsi dell'evento; c'è arbitrarietà nell'attribuzione della probabilità, salvi gli obblighi della coerenza. Con questa impostazione il campo di applicabilità è ampio: si può parlare di probabilità non soltanto con riferimento a fenomeni osservati, ma anche riguardo alle opinioni, alle ipotesi, ...

Di fronte a questa concezione si manifesta una difficoltà psicologica a porre una misura soggettiva alla base di una teoria.

4) teoria assiomatica

Indica un sistema di assiomi, dato da Kolmogorov nel 1933, che si fonda sulla teoria degli insiemi. Si è così giunti a una notevole chiarezza formale, indipendentemente dai vari possibili significati della probabilità.

E' importante osservare che queste tendenze, significativamente diverse sul piano epistemologico, portano alle stesse regole di calcolo delle probabilità.

Nella scuola media, sul piano didattico, sembra opportuno introdurre i primi elementi di probabilità secondo la concezione classica, ma nello stesso tempo riconoscere l'importanza di accostare gli alunni anche alla concezione frequentista.
In primo luogo entrambe queste impostazioni richiedono un modesto bagaglio di conoscenze matematiche e consentono quindi di lavorare in classe abbastanza precocemente su questi argomenti.
Inoltre si ha così l'opportunità di far vedere ai ragazzi alcune correlazioni fra probabilità e statistica, in modo che diventino familiari concetti fondamentali come "previsione, esperienza e verifica, necessità e caso, certezza e probabilità, legge deterministica e legge statistica, conoscenza per induzione, ..." [11].

Un itinerario didattico per la probabilità

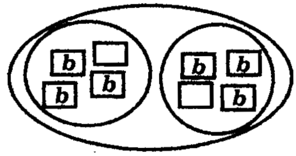
Confronto dei gradi di incertezza

Consideriamo una situazione assai semplice.

Su un tavolo ci sono alcuni pacchi di buste tutte uguali esternamente: alcune contengono un biglietto omaggio per un concerto, le altre sono vuote.
Nel pacco A le buste sono 8, di cui 6 contengono un biglietto omaggio.
Nel pacco B le buste sono 10, i biglietti 5.
Il pacco C ha 8 buste, di cui 3 contengono un biglietto.
Nel pacco D infine le buste sono 4, i biglietti 3.
In quale pacco conviene scegliere a caso una busta per avere un biglietto omaggio?

Si tratta di una situazione aleatoria simmetrica, perché nei singoli pacchi è indifferente scegliere una busta piuttosto che un'altra.
Risulta facile il confronto tra il caso del pacco A e quello del pacco C: nel primo più di metà delle buste contiene un biglietto omaggio, nel secondo invece le buste con biglietto sono meno della metà del totale.
Nel caso del pacco B nessuno dei due esiti "busta con biglietto omaggio", "busta vuota" è privilegiato rispetto all'altro. Nel caso D le

buste con biglietto sono in vantaggio rispetto alle buste vuote; senz'altro allora questa situazione è più favorevole di quella B e, a maggior ragione, di quella C. Occorre dunque confrontare il caso A con il caso D: con opportuni raggruppamenti si può riconoscere che la situazione è la stessa.



La scelta di una busta contenente un biglietto omaggio da ciascuno dei quattro pacchi è dunque un evento che può verificarsi o meno con gradi diversi di incertezza.
Tutto ciò può essere espresso dicendo che l'evento considerato ha probabilità diverse a seconda della composizione del pacco e che queste probabilità sono confrontabili.
Indicando con p_A , p_B , ... la probabilità di scegliere una busta con biglietto omaggio rispettivamente dal pacco A, B, ..., risulta

$$p_C < p_B < p_A = p_D$$

Per completare il quadro conviene considerare i casi estremi di un pacco T in cui tutte le buste contengono un biglietto omaggio e un pacco N in cui nessuna busta contiene un biglietto: la scelta di una busta con un biglietto è un evento certo per il pacco T, impossibile per il pacco N.
In definitiva si ha

$$p_N < p_C < p_B < p_A = p_D < p_T$$

Stabilire una "graduatoria" fra le diverse situazioni però non significa ancora esprimere una misura.

Se si vuole misurare la probabilità di scegliere nelle diverse situazioni una busta con biglietto, è determinante valutare quale frazione del numero totale di buste rappresentano nei singoli casi le buste che contengono un biglietto omaggio. Proprio tale rapporto viene assunto come probabilità. Risulta

$$p_A = \frac{6}{8}, p_B = \frac{5}{10}, p_C = \frac{3}{8}, p_D = \frac{3}{4}, p_T = 1, p_N = 0$$

e quindi

$$0 < \frac{3}{8} < \frac{5}{10} < \frac{6}{8} = \frac{3}{4} < 1$$

confermando l'ordinamento precedente.

Come ci si poteva aspettare la probabilità è un numero compreso fra i due valori estremi 0, probabilità dell'evento "impossibile ", e 1, probabilità dell'evento "certo".

Se i casi possibili hanno uguale probabilità di verificarsi, allora si può porre

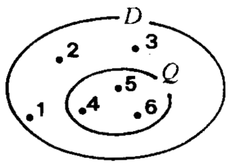
$$\textit{probabilità di un evento} = \frac{\textit{numero dei casi favorevoli}}{\textit{numero dei casi possibili}}$$

Probabilità e insiemi

Mediante il linguaggio degli insiemi si può precisare la nomenclatura fondamentale della probabilità che via via è stata introdotta.

L'insieme di tutti i possibili esiti di un certo esperimento costituisce lo *spazio degli eventi* o *spazio dei campioni;* un sottoinsieme di tale spazio rappresenta un *evento* e in particolare un sottoinsieme costituito da un solo elemento è detto *evento elementare.*

Ad esempio nel lancio di un dado lo spazio degli eventi è l'insieme $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; i sottoinsiemi $\{1\}$, $\{2\}$, ... rappresentano gli eventi elementari "esce l'1", "esce il 2", ...; il sottoinsieme $Q = \{4, 5, 6\}$ rappresenta l'evento "esce un numero maggiore o uguale a 4".



E' opportuno avere chiaro sotto quali condizioni si è scelto di "lavorare":

- lo spazio degli eventi S ha un numero finito di elementi
- gli *eventi elementari*, per ragioni di simmetria, possono essere considerati *equiprobabili.*

In questo contesto la probabilità di un evento A, sottoinsieme di S, è

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

dove $n(S)$ rappresenta il numero degli elementi di S, cioè il numero dei casi possibili, e $n(A)$ il numero degli elementi di A, ossia il numero dei casi favorevoli all'evento considerato.

Se A è l'evento *certo* (per esempio l'uscita di un numero minore di 7 nel lancio di un dado), coincide con S stesso e pertanto

$$p(A) = p(S) = \frac{n(S)}{n(S)} = 1$$

Se A è l'evento *impossibile* (per esempio l'uscita di un multiplo di 11 nel lancio di un dado), è rappresentato dall'insieme vuoto e pertanto

$$p(A) = p(\varnothing) = \frac{n(\varnothing)}{n(S)} = \frac{0}{n(S)} = 0$$

Per poter introdurre ulteriori concetti probabilistici, è necessario richiamare alcune notazioni insiemistiche e i relativi significati.
Se A e B sono due insiemi,

- l'intersezione $A \cap B$ è l'insieme costituito dagli elementi che appartengono ad A e a B
- l'unione $A \cup B$ è l'insieme costituito dagli elementi che appartengono ad A o (vel) a B
- la differenza $A \backslash B$ è l'insieme degli elementi di A che non appartengono a B;

se A è un sottoinsieme di E,

- il complementare di A rispetto ad E, indicato con A'_E , è l'insieme costituito dagli elementi di E che non appartengono ad A.

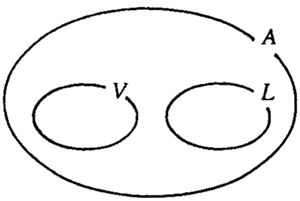
Se A e B hanno un numero finito di elementi, si ha (posto $n(A)$ = = numero degli elementi di A, ...): $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
e se anche E ha un numero finito di elementi: $n(A'_E) = n(E) - n(A)$.

Eventi incompatibili, eventi compatibili

Consideriamo questa situazione.

Un quotidiano promuove una campagna abbonamenti garantendo di sorteggiare fra i primi 500 nuovi abbonati 3 videocamere e 15 libri.
Qual è la probabilità per uno degli abbonati ammessi al concorso di vincere una videocamera? E quella di vincere un libro? Qual è la probabilità di ottenere comunque un premio?

I primi 500 nuovi abbonati costituiscono lo spazio degli eventi (insieme A). Il sorteggio può favorire indifferentemente l'uno o l'altro abbonato; quindi i casi sono tutti equiprobabili. Di questi 3 sono favorevoli all'evento "vincere una videocamera" (sottoinsieme V dell'insieme A) e 15 favorevoli all'evento "vincere un libro" (sottoinsieme L dell'insieme A).



Risulta:

$$p(V)=\frac{n(V)}{n(A)}=\frac{3}{500}$$

$$p(L)=\frac{n(L)}{n(A)}=\frac{15}{500}$$

$$p(V\cup L)=\frac{n(V\cup L)}{n(A)}=\frac{n(V)+n(L)}{n(A)}=\frac{n(V)}{n(A)}+\frac{n(L)}{n(A)}$$

ovvero

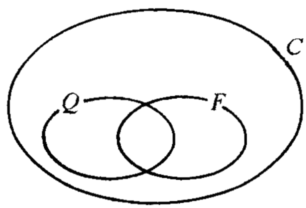
$$p(V\cup L)=p(V)+p(L)=\frac{3}{500}+\frac{15}{500}=\frac{18}{500}$$

L'evento "vincere una videocamera" non può verificarsi simultaneamente all'evento "vincere un libro"; infatti $V\cap L=\varnothing$.
Gli eventi considerati sono *incompatibili.*

Esaminiamo ora quest'altra situazione.

Prendendo una carta a caso in un mazzo di 52 carte, qual è la probabilità che sia una carta di quadri? Qual è la probabilità che esca una figura? Qual è la probabilità che la carta scelta a caso sia di quadri o una figura?

Le 52 carte costituiscono lo spazio degli eventi (insieme C) e si tratta ancora di eventi equiprobabili. I sottoinsiemi Q e F dell'insieme C rappresentano rispettivamente gli eventi "uscita di una carta di quadri" e "uscita di una figura".



E' immediato dire che

$$p(Q)=\frac{n(Q)}{n(C)}=\frac{13}{52}$$

$$p(F)=\frac{n(F)}{n(C)}=\frac{12}{52}$$

Questa volta però $Q\cap F\neq\varnothing$ perché 3 figure sono anche carte di quadri; si ha quindi

$$p(Q \cup F) = \frac{n(Q \cup F)}{n(C)} = \frac{n(Q)+n(F)-n(Q \cap F)}{n(C)} =$$

$$= \frac{n(Q)}{n(C)} + \frac{n(F)}{n(C)} - \frac{n(Q \cap F)}{n(C)}$$

cioè

$$p(Q) + p(F) - p(Q \cap F) = \frac{13+12-3}{52} = \frac{22}{52}$$

Risulta allora $p(Q \cup F) < p(Q) + p(F)$.
L'evento "uscita di una carta di quadri" è *compatibile* con l'evento "uscita di una figura".

Le prime formule probabilistiche

Si possono a questo punto fissare alcune formule di carattere generale.
Se A e B sono due eventi appartenenti a uno stesso spazio S, si ha:

$$p(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)+n(B)-n(A \cap B)}{n(S)} =$$

$$= \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

La probabilità che dei due eventi A e B se ne verifichi almeno uno è data dalla somma delle probabilità di ciascuno dei due eventi, diminuita della probabilità che si verifichino contemporaneamente.
Se $A \cap B = \varnothing$, allora $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ e in questo caso i due eventi si dicono incompatibili.
In conclusione
se $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$, A e B sono eventi incompatibili,
se $p(A \cup B) < p(A) + p(B)$, A e B sono eventi compatibili.

Inoltre $p(A'_S) = \frac{n(A'_S)}{n(S)} = \frac{n(S)-n(A)}{n(S)} = 1 - \frac{n(A)}{n(S)} = 1 - p(A)$.
La probabilità dell'evento contrario all'evento A è data dalla differenza fra 1 e la probabilità di A.

Proposte di quesiti:

• *Un cubo di legno verniciato in verde viene tagliato con piani paralleli alle facce in* 1000 *cubetti uguali che vengono poi mescolati. Calcolare la probabilità che un cubetto preso a caso*
- *abbia una sola faccia verde;*
- *abbia due sole facce verdi;*

- *abbia tre facce verdi;*
- *abbia almeno una faccia verde;*
- *abbia non più di una faccia verde;*
- *non abbia alcuna faccia verde.*

• *Completare la seguente tabella che si riferisce a tre diverse situazioni di un sacchetto contenente palline blu, rosse, verdi, il cui numero varia da situazione a situazione, ma in modo tale che si conservino le probabilità relative a ciascun colore. Giustificare brevemente le risposte.*

	B	*R*	*V*	*totale*
probabilità	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$		
n. palline 1^a *situazione*			12	
n. palline 2^a *situazione*				45
n. palline 3^a *situazione*		6		

• *Un sacchetto contiene 6 palline rosse, 3 azzurre, 2 verdi, 1 gialla. E' possibile variare il numero delle palline azzurre, verdi, gialle in modo da non eliminare alcun colore, da lasciare invariato il numero totale delle palline e in modo che la probabilità di estrarre una pallina azzurra superi di* $\frac{1}{3}$ *la probabilità di estrarre una pallina rossa? E in modo che la probabilità di estrarre una pallina rossa superi di* $\frac{1}{3}$ *la probabilità di estrarre una pallina azzurra?*

• *Nell'estrazione di un numero della tombola, qual è la probabilità che esso sia*
- *multiplo di 5?*
- *multiplo di 8?*
- *multiplo di 5 e di 8?*
- *multiplo di 5 o di 8?*

Come si risponderebbe alle stesse domande se i numeri in gioco fossero 9 e 11?

Ideografie per la probabilità

La possibilità stessa di affrontare questioni di probabilità nella scuola di base dipende in modo essenziale dalle ideografie introdotte negli ultimi decenni. Questi strumenti hanno la caratteristica di prendere per mano e di suggerire le operazioni da compiere, impedendo di sbagliare. Nel calcolo delle probabilità due sono le ideografie fondamentali:

- i diagrammi di Venn

Essi rappresentano, fin dall'inizio, tutto quello che può accadere. I successivi apporti di informazione si traducono in una restrizione dello spazio e in un raffinamento delle partizioni.

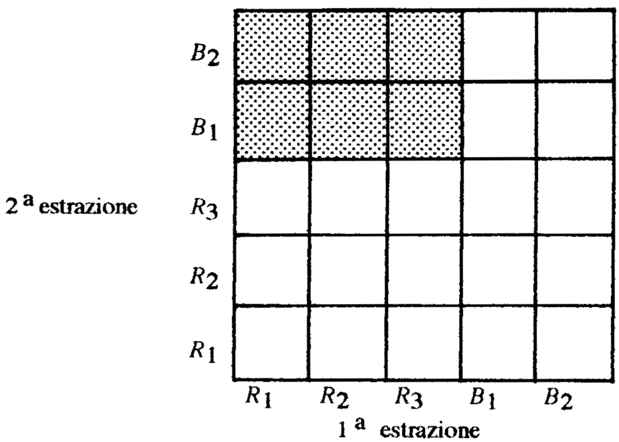
- i grafi

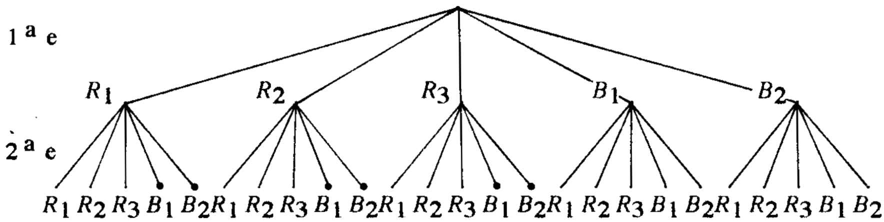
Si procede in modo opposto: il grafo viene costruito man mano, secondo le esigenze. L'impiego dei grafi fornisce un metodo sicuro con cui condurre l'analisi logico-combinatoria di una certa situazione. Le biforcazioni dei grafi in due, tre, ... rami che partono da uno stesso vertice corrispondono, nel diagramma di Venn, a una partizione di un insieme in due, tre, ... sottoinsiemi.
Talvolta è utile l'uso di tabelle a doppia entrata.

Probabilità composta: costruzione dello spazio degli eventi

Un'urna contiene 3 biglie rosse e 2 biglie blu. Si estrae a caso una prima biglia; dopo averla guardata la si rimette nell'urna e si procede a una seconda estrazione. Qual è la probabilità di estrarre una biglia rossa la prima volta e una biglia blu la seconda volta?

Per rispondere è necessario costruire lo spazio degli eventi





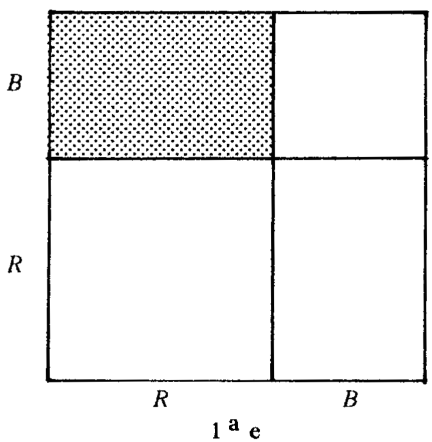
Lo spazio degli eventi è dato da tutte le possibili coppie di biglie, tali che il primo elemento rappresenti la biglia uscita nella prima estrazione e il secondo elemento la biglia uscita nella seconda estrazione.
Indicando, per distinguerle con R_1, R_2, R_3 le biglie rosse e con B_1, B_2 le biglie blu, i casi possibili sono rappresentati dal prodotto cartesiano

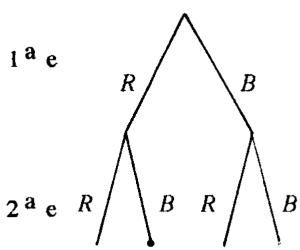
$$\{R_1, R_2, R_3, B_1, B_2\} \times \{R_1, R_2, R_3, B_1, B_2\} =$$
$$= \{(R_1, R_1), (R_1, R_2), \ldots, (B_2, B_2)\}$$

I casi possibili sono dunque 25, tutti equiprobabili fra loro, perché in ogni estrazione è indifferente scegliere una biglia piuttosto che un'altra.
I casi favorevoli all'evento considerato sono quelli corrispondenti alle coppie di biglie (R, B), cioè 6.

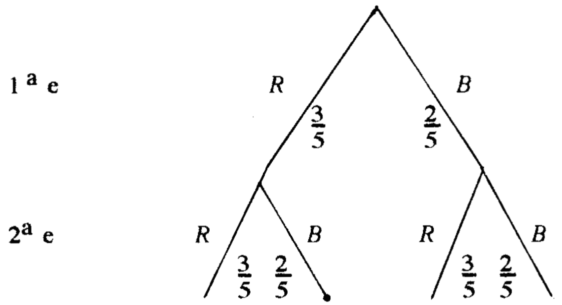
La probabilità cercata è dunque $\boldsymbol{p(R, B) = \frac{6}{25}}$.

A ben pensare però, nella situazione proposta, non interessa tanto conoscere l'individualità della biglia uscita nella prima o nella seconda estrazione, quanto piuttosto il suo colore.



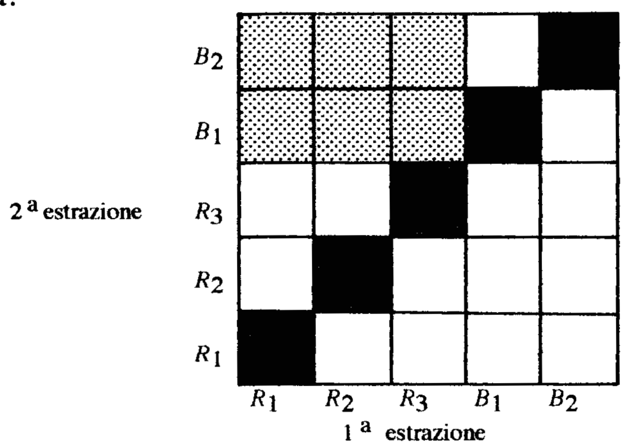


Lo spazio degli eventi si riduce allora ai quattro eventi elementari *RR*, *RB*, *BR*, *BB*, non più equiprobabili fra loro.
Conviene scrivere vicino ad ogni ramo del "grafo contratto" la probabilità dell'evento corrispondente



La probabilità dell'evento (*R*, *B*) rappresentato sul grafo dal cammino contrassegnato è data dal prodotto delle probabilità associate ai rami che formano il cammino stesso: $p(R, B) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$.
Le due estrazioni successive, con "reimbussolamento", rappresentano eventi indipendenti.

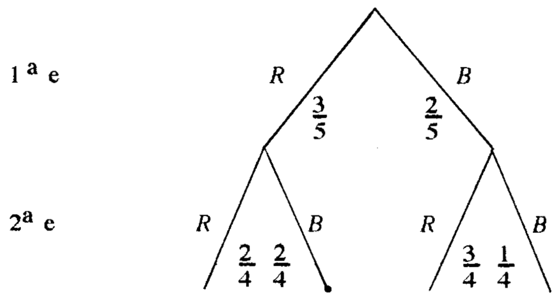
Si considera ancora la stessa urna che contiene 3 biglie rosse e 2 biglie blu e si estrae a caso una prima e poi una seconda biglia: questa volta però senza reimbussolare la prima biglia estratta. Qual è ora la probabilità di estrarre una biglia rossa la prima volta e una biglia blu la seconda volta?



Per risolvere il problema è stata modificata la tabella costruita per il quesito precedente. Le coppie (R_1, R_1), (R_2, R_2), (R_3, R_3), (B_1, B_1), (B_2, B_2), rappresentate dalle caselle evidenziate su una diagonale, non fanno parte ovviamente dello spazio degli eventi.

Risulta dunque $p(R, B) = \frac{6}{25-5} = \frac{6}{20}$.

Si può anche utilizzare un grafo. Occorre tener conto però che nella seconda estrazione le biglie nell'urna sono 4 e che la situazione si presenta diversa a seconda del colore della prima biglia estratta.



Si ha $p(R, B) = \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{20}$.

In questo caso l'esito della prima estrazione influisce sull'esito della seconda: le due estrazioni rappresentano eventi dipendenti.

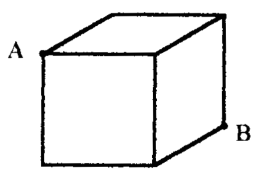
Proposte di quesiti:

- *Lanciando due dadi, qual è la probabilità che*
  - *i due dadi presentino lo stesso numero?*
  - *il punteggio sul primo dado sia maggiore del punteggio sul secondo dado?*
  - *esca su un dado 3 e sull'altro 4?*
  - *esca almeno una volta il 2?*
  - *il punteggio di un dado sia multiplo di quello dell'altro?*

- *Nel lancio di due dadi*
  - *è maggiore la probabilità che la somma dei punti sia 6 o minore di 6 oppure che la somma dei punti sia 7 o maggiore di 7?*
  - *qual è la probabilità di ottenere la somma 9 o una coppia di numeri uguali?*
  - *qual è la probabilità di ottenere la somma 8 o una coppia di numeri uguali?*

- *qual è la probabilità che la somma dei punti sia un numero pari e multiplo di 3? e la probabilità che la somma dei punti sia un numero pari o multiplo di 3?*
- *conviene puntare sulla somma dei punti pari o sulla somma dispari?*
- *conviene puntare sul prodotto dei punti pari o sul prodotto dispari?*

• *Il giudice consegna al condannato 2 biglie bianche e 2 biglie nere, che egli dovrà collocare a suo piacimento in due urne in modo da non lasciarne alcuna vuota. Il giudice sceglierà poi a caso una delle due urne ed estrarrà da essa una biglia: se la biglia risulterà bianca, il condannato sarà graziato. Come conviene disporre le biglie affinché la probabilità di ricevere la grazia sia la più grande possibile?*

• 

Uno strano insetto parte dal vertice A del cubo in figura e, scegliendo casualmente ad ogni vertice quale dei tre spigoli percorrere, si muove alla velocità costante di uno spigolo ogni 25 secondi. Qual è la probabilità che raggiunga B in meno di 80 secondi?

• *Lanciando tre dadi, qual è la probabilità che il prodotto degli esiti sia pari?*

• *Un'urna contiene 5 biglie bianche e 3 biglie nere. Si estrae una biglia e, senza guardarla, la si mette in una scatola. Qual è ora la probabilità di pescare nell'urna una biglia bianca?*
Confrontare tale probabilità con la probabilità iniziale di estrarre una biglia bianca dall'urna.

Probabilità condizionale; eventi indipendenti, eventi dipendenti

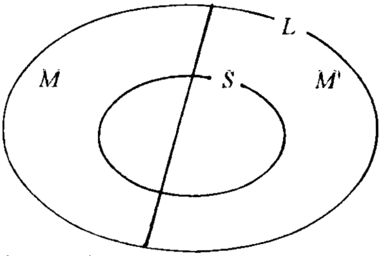
In un'indagine compiuta in un liceo frequentato da 384 maschi e 576 ragazze, risulta che soltanto 192 alunni, di cui 120 maschi, praticano costantemente un'attività sportiva. Scegliendo a caso un alunno di quel liceo

- qual è la probabilità che

a) sia un maschio?
b) pratichi un'attività sportiva?
c) sia un maschio e pratichi sport?

- qual è la probabilità che un alunno maschio pratichi sport?
- qual è la probabilità che un alunno, che pratica sport, sia maschio?

Lo spazio degli eventi, a cui si riferiscono le prime tre domande, è l'insieme L di tutti gli alunni del liceo.



n(L) = 384 + 576 = 960
n(M) = 384
n(S) = 192
$n(M \cap S) = 120$

E' immediato esprimere le probabilità richieste:

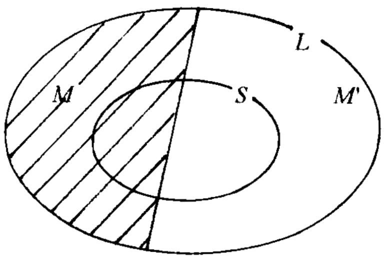
$$p(M) = \frac{n(M)}{n(L)} = \frac{384}{960} = \frac{2}{5}$$

$$p(S) = \frac{n(S)}{n(L)} = \frac{192}{960} = \frac{1}{5}$$

$$p(M \cap S) = \frac{n(M \cap S)}{n(L)} = \frac{120}{960} = \frac{1}{8}$$

La domanda "qual è la probabilità che un alunno maschio pratichi sport" può essere posta in modo più esplicito così:

- qual è la probabilità che un alunno scelto a caso pratichi sport, sapendo che è maschio?

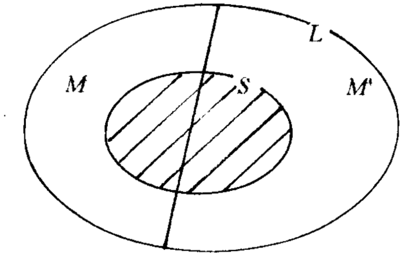


L'aumento di informazione restringe lo spazio degli eventi dall'insieme L all'insieme M. La probabilità richiesta è detta *probabilità condizionale*, cioè la probabilità che si verifichi l'evento S sapendo che si è verificato l'evento M e si indica con $p(S|M)$.

$$p(S \mid M) = \frac{n(S \cap M)}{n(M)} = \frac{120}{384} = \frac{5}{16}$$

Anche l'ultima domanda "qual è la probabilità che un alunno, che pratica sport, sia maschio?" è una richiesta di probabilità condizionale che può essere formulata così:

· qual è la probabilità che un alunno sia maschio, sapendo che pratica sport?



Lo spazio degli eventi si riduce all'insieme S e risulta

$$p(M \mid S) = \frac{n(M \cap S)}{n(S)} = \frac{120}{192} = \frac{5}{8}$$

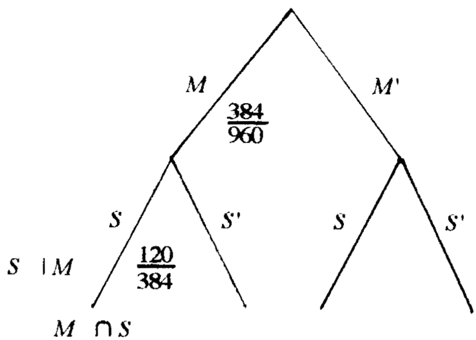
Dunque

$p(S \mid M) \neq p(S)$ $\quad$ S dipende da M

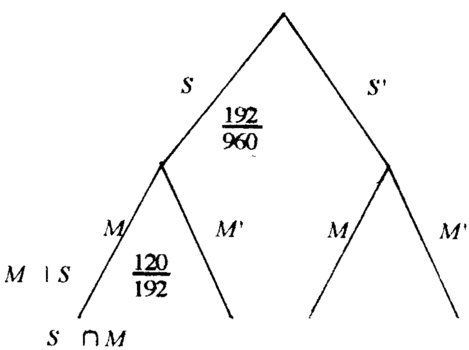
$p(M \mid S) \neq p(M)$ $\quad$ M dipende da S

E' come dire che la probabilità dell'evento S e quella dell'evento M cambiano con un supplemento di informazione.

Rappresentiamo la situazione sul grafo:



$$p(M \cap S) = \frac{120}{384} \cdot \frac{384}{960} = \frac{1}{8}$$



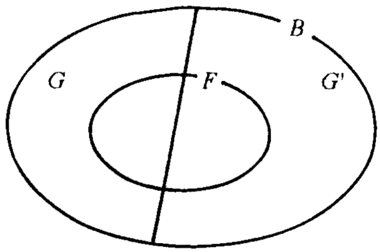
$$p(S \cap M) = \frac{120}{192} \cdot \frac{192}{960} = \frac{1}{8}$$

Risulta dunque $p(M \cap S) = p(S \mid M) \cdot p(M)$ e $p(M \cap S) = p(M \mid S) \cdot p(S)$.

Mettiamo a confronto la situazione precedente con quest'altra.

Una biblioteca per ragazzi contiene 1550 libri; fra questi 310 sono "gialli". Si sa che 465 libri della biblioteca sono scritti da autori stranieri e di questi 93 sono "gialli". Qual è la probabilità che scegliendo un libro a caso si trovi

- un libro di autore straniero?
- fra i libri "gialli" un libro di autore straniero?
- fra i libri non "gialli" un libro di autore straniero?

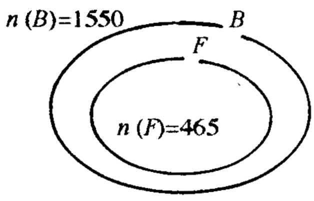


Lo spazio degli eventi a cui si riferisce la prima domanda è l'insieme B; per la seconda e la terza lo spazio degli eventi si restringe rispettivamente a G e a G'.

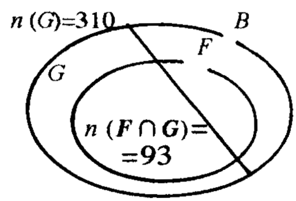
$p(F) = \frac{465}{1550} = \frac{3}{10}$ $\qquad p(F \mid G) = \frac{93}{310} = \frac{3}{10}$ $\qquad p(F \mid G') = \frac{372}{1240} = \frac{3}{10}$

Questa volta dunque si ha $p(F \mid G) = p(F \mid G') = p(F)$.
L'evento F è indipendente da G e da G': un aumento di informazione non provoca una variazione della probabilità.

Per quale motivo l'aumento di informazione ha effetti diversi nelle due situazioni?
Consideriamo gli eventi indipendenti F e G nel caso dei libri della biblioteca: la concentrazione dei libri scritti da autori stranieri rispetto a tutti i libri della biblioteca è uguale a quella dei libri "gialli" scritti da autori stranieri rispetto a tutti i libri "gialli".

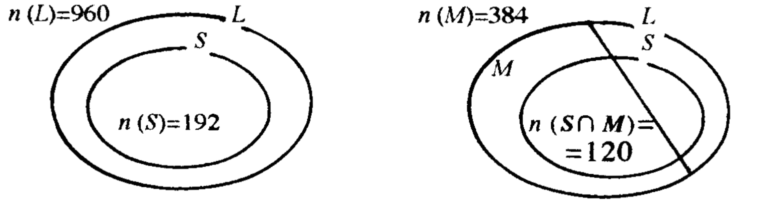


"concentrazione" $= \frac{465}{1550} = \frac{3}{10}$



"concentrazione" $= \frac{93}{310} = \frac{3}{10}$

Nel caso degli eventi dipendenti S e M, riferiti agli alunni di un liceo, manca questa uguaglianza di "concentrazione".



"concentrazione" $= \frac{192}{960} = \frac{1}{5}$ "concentrazione" $= \frac{120}{384} = \frac{5}{16}$

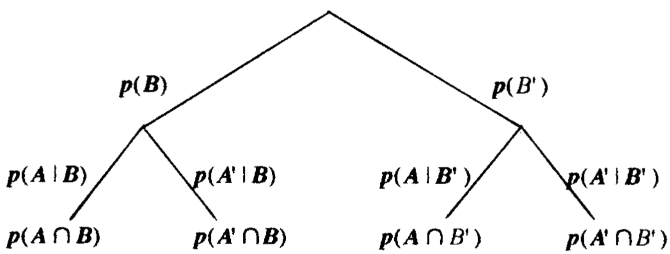
In generale, se S è lo spazio degli eventi e A e B, sottoinsiemi di S, rappresentano due eventi con $p(A) > 0$ e $p(B) > 0$, la probabilità che si verifichi A nel caso che si sia già verificato B è

$$p(A \mid B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}}$$

e dunque $p(A \mid B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$ o anche $p(A \cap B) = p(A \mid B) \cdot p(B)$.

In modo del tutto analogo si ottiene $p(A \cap B) = p(B \mid A) \cdot p(A)$.

Sul grafo



Se $p(A \mid B) \neq p(A)$, si dice che A *dipende* da B.

Se $p(A \mid B) = p(A)$, cioè se la probabilità che si verifichi A non è modificata dall'essersi o no già verificato B, si dice che A è indipendente da B.

In tale caso $\frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{n(A)}{n(S)}$ ovvero la "concentrazione" di eventi favorevoli ad A è la stessa sia in B che in tutto S. La precedente uguaglianza di rapporti si può leggere anche $\frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{n(B)}{n(S)}$ da cui si ricava $p(B|A) = p(B)$, cioè se A è indipendente da B, anche B è indipendente da A; questo consente di dire che A e B sono indipendenti fra loro e si ha $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$.

Merita osservare che "eventi incompatibili" ed "eventi indipendenti" sono concetti diversi. Se due eventi A e B, non impossibili, sono incompatibili, sono anche necessariamente dipendenti. Infatti se i due eventi A e B, non impossibili, sono incompatibili si ha $n(A \cap B) = 0$ e quindi $p(A | B) = 0$ mentre per ipotesi $p(A) \neq 0$ e $p(B) \neq 0$. Perciò risulta $p(A | B) \neq p(A)$ e $p(B | A) \neq p(B)$.

Proposte di quesiti:

• *Si lanciano due dadi. Se i due numeri che si presentano sono diversi, qual è la probabilità che*
- *la somma dei punti sia 6?*
- *si presenti un 1?*

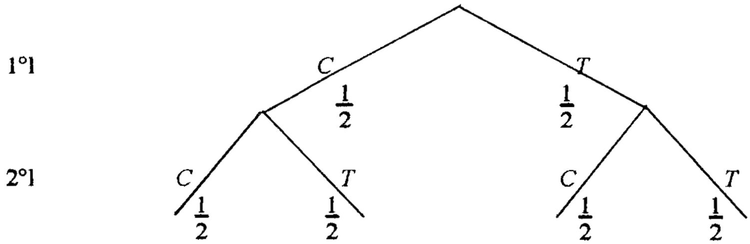
• *In un certo liceo il 25% degli studenti ha una valutazione insufficiente in matematica, il 15% in latino e il 10% sia in matematica sia in latino. Viene scelto a caso uno studente.*
- *Se egli ha una valutazione insufficiente in latino, qual è la probabilità che abbia una valutazione insufficiente in matematica?*
- *Se egli ha una valutazione insufficiente in matematica, qual è la probabilità che abbia una valutazione insufficiente in latino?*
- *Qual è la probabilità che abbia una valutazione insufficiente in matematica o in latino?*

• *E' stata organizzata una lotteria: ogni concorrente pesca due volte in un'urna contenente* b *palline bianche e* n *nere; vince un premio chi estrae almeno una pallina bianca. Però ogni persona deve scegliere, prima di procedere alle due estrazioni che gli competono, fra l'estrazione con restituzione e quella senza restituzione. Quale delle due strategie è più conveniente?*

Le prove ripetute

Cominciamo col valutare la probabilità che il numero di esiti "croce " (C) sia esattamente uguale al numero di esiti "testa" (T) in 2, 4, 6, 8, ... lanci di una moneta equilibrata, ripetuti nelle stesse condizioni.

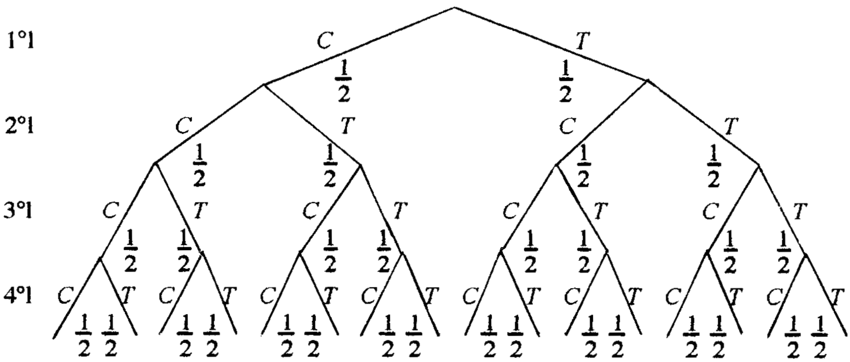
2 lanci



I casi possibili sono 4: CC, CT, TC, TT tutti equiprobabili fra loro; i casi favorevoli all'evento "1 volta C, 1 volta T" sono 2: CT, TC.

Dunque p(1 volta C, 1 volta T) $= \frac{2}{4}$. Tale risultato è ovviamente ottenibile anche con la regola del prodotto.

4 lanci

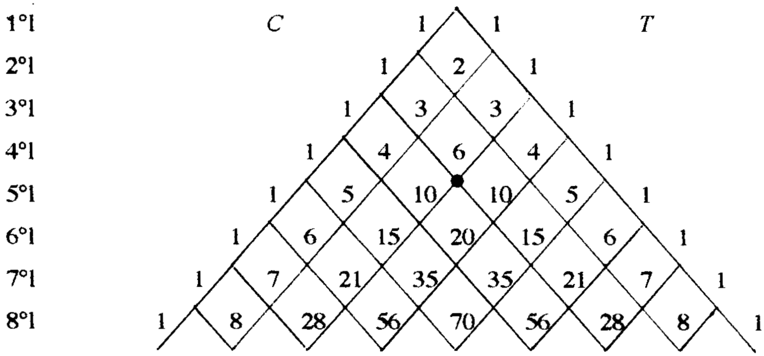


I casi possibili sono 16: $CCCC, CCCT, CCTC, ..., TTTC, TTTT$ tutti equiprobabili fra loro; i casi favorevoli all'evento "2 volte C, 2 volte T" sono 6: $CCTT, CTCT, CTTC, TCCT, TCTC, TTCC$.

Dunque p(2 volte C, 2 volte T) $= \frac{6}{16}$.

6, 8, ... lanci

Per analizzare questi casi occorre "semplificare" il grafo. Ciò si può ottenere facendo confluire nello stesso punto i cammini relativi ad eventi elementari che differiscono soltanto per l'ordine con cui si presentano *C* e *T*.



Ad esempio nel nodo contrassegnato con • confluiscono i cammini corispondenti a "2 volte *C*, 2 volte *T*". Il numero di tali cammini, che è 6, è appunto la somma 3+3 dei cammini che giungono nei due nodi sovrastanti. I nodi "orizzontalmente" allineati con esso rappresentano gli altri eventi che si possono ottenere con 4 lanci di una moneta.

Con 6 lanci risulta

$$p(3 \text{ volte } C, 3 \text{ volte} T) = \frac{20}{1+6+15+20+15+6+1} = \frac{20}{64},$$

mentre con 8 lanci si ha

$$p(4 \text{ volte } C, 4 \text{ volte} T) = \frac{70}{1+8+28+56+70+56+28+8+1} = \frac{70}{256}.$$

Si riconosce subito che

$$\frac{2}{4} > \frac{6}{16} > \frac{20}{64} > \frac{70}{256},$$

ossia che la probabilità di ottenere esattamente lo stesso numero di *C* e di *T* diminuisce passando da 2 a 4, a 6, a 8 lanci.

Si intuisce che, se il numero *n* dei lanci è pari, la probabilità di avere *T* proprio $\frac{n}{2}$ volte diminuisce al crescere di *n*.

Che succede però se, al crescere del numero *n* dei lanci, non si pretende di avere esattamente un numero di *T* uguale a $\frac{n}{2}$, ma ci si accontenta di

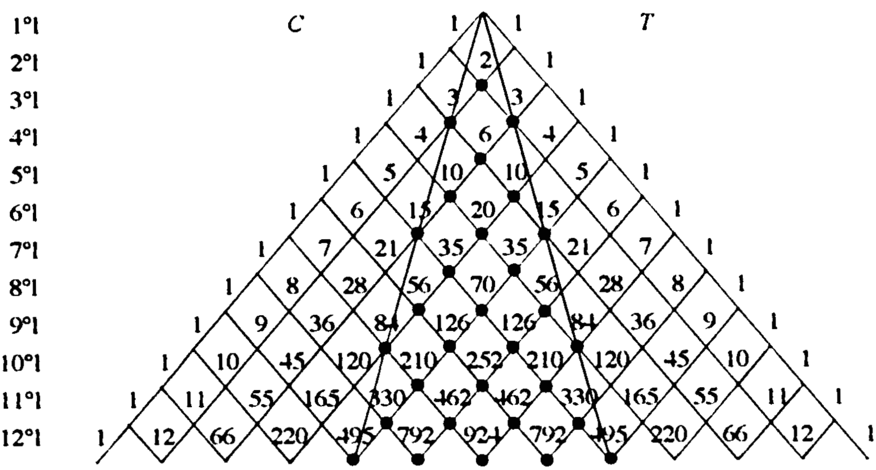
ottenerne un numero compreso in un certo intervallo attorno a quel valore?
Scegliamo ad esempio l'intervallo centrale che si ottiene suddividendo ogni riga del grafo in tre parti uguali, cioè prendiamo in considerazione gli eventi in cui il numero m di T è

$$\frac{1}{3}n \leq m \leq \frac{2}{3}n$$

dove n è il numero dei lanci.
E' come dire che

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)n \leq m \leq \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)n.$$

Un modello geometrico aiuta a individuare immediatamente gli eventi che interessano: sono quelli compresi nella zona evidenziata del grafo seguente, ottenuta tracciando due semirette che partono dal vertice e hanno un'inclinazione tale che ogni riga risulti suddivisa in tre parti uguali.



Se ne ricava:

numero n di lanci	numero di T negli eventi rappresentati dai nodi compresi nella zona centrale	probabilità degli eventi considerati (a meno di 0,001)
1	0	0
2	1	$\frac{2}{4} = 0,500$
3	1 2	$\frac{6}{8} = 0,750$
4	2	$\frac{6}{16} = 0,375$
5	2 3	$\frac{20}{32} = 0,625$
6	2 3 4	$\frac{50}{64} = 0,781$
7	3 4	$\frac{70}{128} = 0,547$
8	3 4 5	$\frac{182}{256} = 0,711$
9	3 4 5 6	$\frac{420}{512} = 0,820$
10	4 5 6	$\frac{672}{1024} = 0,656$
11	4 5 6 7	$\frac{1584}{2048} = 0,773$
12	4 5 6 7 8	$\frac{3498}{4096} = 0,854$
....	....	....

Seppure in modo irregolare, la probabilità degli eventi con un numero di T compreso nell'intervallo considerato va aumentando al crescere di n. Le irregolarità derivano dal fatto che le semirette di "confine" passano per i nodi soltanto nel caso che n sia multiplo di 3 e quindi, negli altri casi, viene "perso" qualcosa.
In definitiva, via via che il numero di lanci aumenta, alla diminuzione di probabilità di avere lo stesso numero di C e di T corrisponde l'aumento della probabilità di avere una frequenza di T che si discosti da $\frac{1}{2}$ (che è la probabilità di C o di T) per meno di $\frac{1}{6}$.

Gli eventi casuali nella realtà

Si è attribuito probabilità $\frac{1}{6}$ all' "uscita del 5" nel lancio di un dado, probabilità $\frac{1}{2}$ all'esito "testa" nel lancio di una moneta. Quale riscontro hanno nell'esperienza queste misure di probabilità?

Proviamo a lanciare più volte un dado contando le uscite del 5. Per procedere in modo ordinato conviene registrare il numero di lanci eseguiti e il corrispondente numero di uscite del 5, scegliendo raggruppamenti significativi.

numero lanci	numero uscite del 5
25	3
25	4
25	5
25	0
25	3
25	4
25	5
25	6
25	4
25	4
....	...

Si sommano ora via via i risultati ottenuti e per studiare l'andamento degli esiti si introduce la

$$\textit{frequenza relativa} = \frac{\textit{numero degli esiti favorevoli}}{\textit{numero delle prove}}$$

Nella tabella che segue la frequenza relativa è espressa con un numero decimale approssimato a meno di 0,001

numero lanci	numero uscite del 5	frequenza relativa
25	3	0,120
50	7	0,140
75	12	0,160
100	12	0,120
125	15	0,120
150	19	0,127
200	30	0,150
400	64	0,160
600	101	0,168
800	127	0,159
1 000	162	0,162
1 200	191	0,159
1 400	227	0,162
1 600	264	0,165
1 800	296	0,164
2 000	346	0,173
2 200	379	0,172
2 400	410	0,171
2 600	443	0,170
2 800	482	0,172
3 000	519	0,173
3 200	558	0,174
3 400	594	0,175
3 600	621	0,172
3 800	652	0,172
4 000	681	0,170
....	....	....

Gli esiti dei primi lanci presentano notevoli fluttuazioni. Via via che il numero di lanci aumenta, nella variabilità del caso si va delineando una certa regolarità, nel senso che la frequenza relativa tende a "stabilizzarsi" proprio intorno a $\frac{1}{6} \cong 0,167$.

Ripetiamo l'esperienza lanciando una moneta

numero lanci	numero esiti "testa"	frequenza relativa
10	6	0,600
20	11	0,550
30	15	0,500
40	18	0,450
50	24	0,480
100	50	0,500
200	109	0,545
400	202	0,505
600	298	0,497
800	393	0,491
1 000	493	0,493
1 500	736	0,491
2 000	975	0,487
3 000	1 482	0,494
4 000	1 985	0,496
5 000	2 508	0,502
....	....	....

Anche questa volta emerge un certo ordine, cioè il tendere della frequenza al valore 0,5.

All'aumentare del numero delle prove, ripetute nelle stesse condizioni, la frequenza relativa tende ad avvicinarsi alla probabilità. Ma attenzione: l'avvicinarsi della frequenza relativa alla probabilità non è un fatto certo; il capriccio del caso è sempre in agguato.
Si è così trovato un legame fra frequenza relativa e probabilità prevista di un dato evento.
Questa constatazione consente di attribuire una misura di probabilità a eventi per i quali non si possono fare considerazioni di simmetria ed esprimere il rapporto fra casi favorevoli e casi possibili.
Per tali eventi si assume come probabilità la frequenza relativa con cui il fenomeno considerato si è manifestato in un numero molto alto di casi o meglio la frequenza limite, cioè il valore attorno a cui si stabilizza la frequenza relativa al crescere del numero delle prove.

Ad esempio, se su 1 000 000 di ragazzi di 20 anni nelle stesse condizioni di vita 850 000 sono arrivati a 50 anni, la probabilità che un ragazzo di 20 anni arrivi a 50 anni è $\frac{850\,000}{1\,000\,000} = \frac{17}{20}$.

Un itinerario didattico per la statistica

I primi passi

La statistica descrittiva si propone di descrivere una *popolazione*, cioè qualsiasi collettività che abbia caratteristiche comuni: i libri di una biblioteca, gli alunni di una classe, le famiglie di un condominio, i fiumi italiani, ...

Della popolazione scelta si prende in considerazione un carattere (o al più un numero ristretto di caratteri) in base al problema che interessa: l'obiettivo è quello di studiare come si distribuisce la popolazione stessa rispetto a tale carattere o *variabile*.
Consideriamo gli alunni di una classe. Tale popolazione può essere studiata rispetto a diverse variabili come: lo sport preferito, il numero di fratelli, la statura, ...
Lo sport preferito rappresenta una variabile *non numerica* o *qualitativa*.
Le altre due variabili rappresentano variabili *numeriche* o *quantitative*.
Occorre un'ulteriore precisazione. Il numero di fratelli rappresenta una variabile numerica *discreta* perché può assumere soltanto valori isolati.
La statura rappresenta una variabile numerica *continua* perché teoricamente può assumere uno qualsiasi dei valori compresi in un certo intervallo dell'insieme dei numeri reali.

La raccolta e l'organizzazione dei dati

Scelta la popolazione e stabilita la variabile, si registra il valore (numerico o meno) che essa assume in corrispondenza di ciascun individuo della popolazione: si ha così una *raccolta di dati.*
Quando la variabile è qualitativa, la popolazione statistica si ripartisce automaticamente in tanti sottoinsiemi o *classi* quante sono le modalità che la variabile assume nel problema: l'insieme delle classi con le relative *frequenze* (numero di elementi per classe) costituisce la *distribuzione di frequenza.*
Anche nel caso di variabile numerica, si potrebbe procedere a una ripartizione in tante classi quanti sono i valori che essa assume nel problema; ma il numero delle classi sarebbe spesso così elevato da non ricavarne informazioni immediate circa l'andamento della distribuzione di frequenza.

Procediamo in modo concreto, lavorando sulle stime a vista dell'altezza dello stipite di una grande porta, espresse da 38 persone e registrate al *cm* più prossimo:

250	280	300	350	270	300	280	220	260	270
270	280	268	280	275	254	280	250	267	300
250	260	295	270	295	240	291	315	230	330
260	270	261	270	330	265	270	300		

Una massa disordinata di dati è poco espressiva. Perché sia agevole trarre alcune informazioni, è utile intanto ordinare, in ordine non decrescente, le stime x_i con le rispettive frequenze f_i

x_i	f_i
220	1
230	1
240	1
250	3
254	1
260	3
261	1
265	1
267	1
268	1
270	7
275	1
280	5
291	1
295	2
300	4
315	1
330	2
350	1

Emergono ora facimente alcune informazioni:

- il dato più piccolo è 220
- il dato più grande è 350
- ci sono valori che compaiono più di una volta
- ....

Rimane aperto però il problema di riassumere l'informazione in modo efficace.

La sintesi dei dati mediante indici

Per la sintesi dei dati, per la comunicazione e il confronto dei risultati è utile intodurre due tipi di indici

- gli *indici di posizione* o *valori medi*
- gli *indici di dispersione*.

Gli indici di posizione esprimono l'individuo medio della popolazione.

Gli indici di dispersione dicono come la popolazione stessa si distribuisce attorno a tale individuo medio.
Nel caso di variabile numerica l'indice di posizione è in sostanza l'ordine di grandezza dei suoi valori, mentre l'indice di dispersione indica la loro reciproca diversità.

Gli indici di posizione

Quale indice di posizione si può scegliere per riassumere la popolazione delle stime a vista?
· L'indice più facile da determinare è la *moda*, cioè il valore più frequente:
moda = 270
Tale valore trascura l'opinione di ben 31 persone.
· Si può scegliere il valore centrale della popolazione ordinata, cioè quel valore per cui sono tanti gli elementi che lo precedono quanti quelli che lo seguono: tale valore viene detto *mediana.*
Poiché nel nostro caso la popolazione statistica ha un numero pari di elementi, la mediana è data da qualsiasi valore compreso tra i due centrali, cioè tra la 19-esima e la 20-esima stima:
mediana = 270
E' chiaro che la mediana rimarrebbe la stessa anche se, rispettando l'ordinamento, si cambiasse una qualsiasi stima che precede o che segue il valore centrale.
· Se si vuole far pesare quantitativamente l'opinione di ciascuno, si deve procedere al calcolo della *media aritmetica*, determinare cioè il quoziente tra la somma dei dati e il numero dei dati stessi:

$$\bar{x} = \frac{1}{38}(220\cdot 1 + 230\cdot 1 + 240\cdot 1 + 250\cdot 3 + 254\cdot 1 + 260\cdot 3 + 261\cdot 1 +$$

$$+265\cdot 1 + 267\cdot 1 + 268\cdot 1 + 270\cdot 7 + 275\cdot 1 + 280\cdot 5 + 291\cdot 1 + 295\cdot 2 +$$

$$+300\cdot 4 + 315\cdot 1 + 330\cdot 2 + 350\cdot 1) = 10\ 506 : 38 \cong 276{,}47$$

Tale valore medio è influenzato dai valori più piccoli e dai valori più grandi.

La moda, la mediana, la media aritmetica meritano qualche osservazione di carattere generale.
· La moda è il dato o la classe a cui corrisponde la massima frequenza; esprime dunque il dato più comune, ma non offre informazioni sugli altri dati. La moda può essere espressa anche nel caso di variabili non numeriche. Può accadere che non esista o che non sia unica o che non sia significativa.

La moda è appropriata in tutti quei casi in cui è determinante considerare il "peso" della maggioranza relativa: indagini di mercato, consultazioni elettorali, applicazioni in ambito linguistico, ...

· Se la popolazione è totalmente ordinata, la mediana è il valore che provoca la ripartizione della popolazione stessa in due parti ugualmente numerose. Corrisponde a uno dei dati della popolazione se questi sono in numero dispari; altrimenti può essere espressa da un qualsiasi valore compreso fra i due elementi centrali (spesso per evitare l'indeterminazione, si adotta la semisomma di tali elementi) e pertanto può anche non comparire fra i dati.

Il fatto che la mediana, basandosi soltanto sulla struttura d'ordine, non sia influenzata dalla "consistenza" dei dati al di qua o al di là del centro fa sì che tale indice sia usato nel controllo delle qualità di un prodotto industriale, nelle statistiche dei redditi, ...

· I dati numerici consentono manipolazioni algebriche: è quanto occorre per calcolare la media aritmetica $\bar{x}$ come quoziente tra la somma di tutti i dati x_1, x_2, ..., x_n e il loro numero n:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

E' un indice che dipende dall'esatto valore di tutti i dati e perciò è influenzato da valori molto grandi o molto piccoli.

Rappresenta più fedelmente distribuzioni di valori piuttosto omogenei, come quelle ottenute con processi di misura di una grandezza, ...

L'operazione di media aritmetica non gode della proprietà associativa. Infatti se n è il numero dei dati, $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$ la loro media aritmetica, $m_1 = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_{n_1}}{n_1}$ la media aritmetica dei primi n_1 dati, $m_2 = \frac{x_{n_1+1} + x_{n_1+2} + ... + x_n}{n_2}$ la media aritmetica dei rimanenti $n_2 = n - n_1$ dati, allora è possibile esprimere $\bar{x}$ mediante m_1 e m_2:

$$\bar{x} = \frac{n_1 m_1 + n_2 m_2}{n_1 + n_2} \quad (\textit{media ponderata})$$

che è generalmente diversa da $m = \frac{m_1 + m_2}{2}$. Soltanto se $n_1 = n_2$, i valori $\bar{x}$ e m risultano uguali; infatti

$$\bar{x} = \frac{n_1 m_1 + n_1 m_2}{n_1 + n_1} = \frac{n_1(m_1 + m_2)}{2n_1} = \frac{m_1 + m_2}{2} = m$$

Infine si può osservare che la scelta dell'indice di posizione più rappresentativo dipende dalla situazione considerata e dallo scopo per cui si è fatta l'indagine.

Gli indici di dispersione

Una variabile può essere molto concentrata attorno a un suo valore medio (mediana o media aritmetica) oppure molto "sparsa". E' allora opportuno introdurre un parametro che serva a distinguere fra loro queste due situazioni opposte: un indice di dispersione.

· Una prima misura della dispersione può essere espressa dal *campo di variazione*, cioè dalla differenza fra il valore più grande e il valore più piccolo dei dati.
Per lo più tale indice è poco significativo perché non dà informazioni su come sono distribuiti i dati tra il minimo e il massimo.

Consideriamo, ad esempio, le due situazioni seguenti

a) passeggeri di un autobus

età	2	4	6	9	10	11	12	17	18	20	34	36	37	40	64
fr.	2	2	1	1	1	1	1	2	3	2	1	1	1	1	1

b) persone presenti in un giardino pubblico

età	2	10	11	13	14	17	18	23	27	35	64
fr.	1	2	2	3	2	1	4	2	2	1	1

Che cosa si può osservare?
Si vede subito che

$moda_a = moda_b = 18$

Poiché in entrambe le situazioni le persone presenti sono 21, in ogni caso per la mediana si deve scegliere l'undicesimo valore. Risulta

$mediana_a = mediana_b = 17$

Si ha inoltre

$media\ aritmetica_a = media\ aritmetica_b = 19$

Il campo di variazione è anche uguale

$campo\ di\ variazione_a = campo\ di\ variazione_b = 62$

Tutto coincide ...., ma le situazioni sono diverse.
Occorre introdurre nuovi indici di dispersione.

Un modo migliore di misurare la dispersione attorno a un valore medio m potrebbe essere quello di valutare la media degli scarti da m di tutti i dati $\frac{(x_1-m)+(x_2-m)+....+(x_n-m)}{n}$.

Ci si rende conto però che valori negativi degli scarti hanno effetti di compensazione su quelli positivi. L'inconveniente può essere superato rendendo non negativi gli scarti, cioè considerandone il valore assoluto o il quadrato.

Si può pertanto assumere come misura della dispersione dei dati $x_1, x_2, ..., x_n$ attorno a m

- lo *scarto medio assoluto* $\frac{|x_1-m|+|x_2-m|+....+|x_n-m|}{n}$

Lo scarto medio assoluto ha un minimo (per n dispari) quando si sceglie come valore medio m la mediana

oppure

- lo *scarto quadratico medio* $\sqrt{\frac{(x_1-m)^2+(x_2-m)^2+....+(x_n-m)^2}{n}}$

Lo scarto quadratico medio ha un minimo quando si sceglie come valore medio m la media aritmetica.

Riconsiderando la situazione dei passeggeri dell'autobus e delle persone presenti nel giardino risulta

scarto medio assoluto$_a \cong 10{,}86$
scarto medio assoluto$_b \cong 7{,}62$

mentre

scarto quadratico medio$_a \cong 15{,}13$
scarto quadratico medio$_b \cong 12{,}32$

I valori trovati comunicano che le età dei passeggeri dell'autobus sono più "sparpagliate" di quelle delle persone nel giardino.

In riferimento alle stime a vista, su cui prima si è lavorato, si ha:
campo di variazione = 130
scarto medio assoluto $\cong$ 19,37
scarto quadratico medio $\cong$ 26,52.

Proposte di quesiti:

- *Nel seguente elenco sono riportati i dati relativi al numero degli abitanti dei capoluoghi delle regione italiane desunti dal Calendario Atlante De Agostini 1997:*

Capoluoghi	*Abitanti*	*Capoluoghi*	*Abitanti*
Torino	929 443	Ancona	99 905
Aosta	35 411	Roma	2 661 442
Milano	1 310 681	L'Aquila	68 853
Trento	103 199	Campobasso	51 888
Venezia	300 410	Napoli	1 053 737
Trieste	224 506	Bari	337 190
Genova	657 758	Potenza	67 229
Bologna	388 436	Catanzaro	97 013
Firenze	385 766	Palermo	691 796
Perugia	149 821	Cagliari	175 181

Organizzare i dati e farne una sintesi mediante un'opportuna scelta per l'indice di posizione e per l'indice di dispersione.

• *Costruire insiemi ordinati di numeri con le seguenti proprietà:*

n. elementi	*media*	*mediana*	*moda*
6	3	/	/
6	4	5	/
6	2	/	3
5	/	6	/
7	3	4	1
7	3	8	/

• *Quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false?*

a) *Dato un insieme di numeri, uno di essi deve essere uguale alla loro media aritmetica.*

b) *La media aritmetica dei numeri di un insieme deve essere compresa fra il numero minore e quello maggiore.*

c) *La media aritmetica dei numeri di un insieme deve essere più vicina al centro che non ai valori estremi del campo di variazione.*

• *Nel quartiere di una città si è fatta un'indagine su quale fosse il numero di figli per famiglia, scegliendo un campione di 40 famiglie. I dati raccolti*

numero di figli	0	1	2	3	4	5
numero di famiglie	2	10	15	6	3	4

consentono di determinare il numero medio m *di figli per famiglia, che risulta:*

$m = (1 \cdot 10 + 2 \cdot 15 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 4) : 40 = 2{,}25.$

E' possibile dedurre che $m - 1 = 2{,}25 - 1 = 1{,}25$ *rappresenti il numero medio di fratelli per ogni bambino delle famiglie considerate, dal momento che nessuno si considera fratello di se stesso?*

La rappresentazione grafica

La rappresentazione grafica ha un ruolo notevole nella comunicazione di dati statistici: un diagramma è infatti una sintesi chiara ed efficace.
Le forme di rappresentazione grafica possono essere diverse:

- alcune rendono percettivamente evidenti le frequenze in assoluto
- altre comunicano in modo espressivo le frequenze relative, ovvero i rapporti fra le frequenze assolute delle singole classi e il numero di elementi dell'intera popolazione

Prima di costruire qualsiasi diagramma, si deve procedere a opportuni raggruppamenti dei dati, qualora la popolazione statistica non si sia automaticamente suddivisa in classi.

Le rappresentazioni delle frequenze in assoluto

- Una rappresentazione di facile costruzione sono i *diagrammi a barre*: richiede attenzione soltanto la scelta dell'unità di misura lineare adeguata alla "numerosità" delle singole classi.

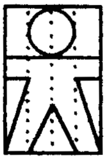
Si usano quando la variabile è qualitativa o numerica discreta.

- Un'altra forma di rappresentazione grafica molto semplice e diffusa è l'*ideogramma*: si basa su una figurina-simbolo che richiama il soggetto che si vuole rappresentare.

Si tratta di una forma di rappresentazione poco rigorosa: il limite grafico alla possibilità di frazionare la figurina-simbolo impone infatti un arrotondamento dei dati che può anche diventare rilevante.

Ad esempio supponiamo che alla figurina seguente corrispondano 100 000 persone;

In tale caso non sembra ragionevole frazionare la figura, facendo riferimento al rettangolo circoscritto, in più di quattro parti: si dovrebbe cioè arrotondare i dati al 25 000 più prossimo:



25 000 50 000 75 000

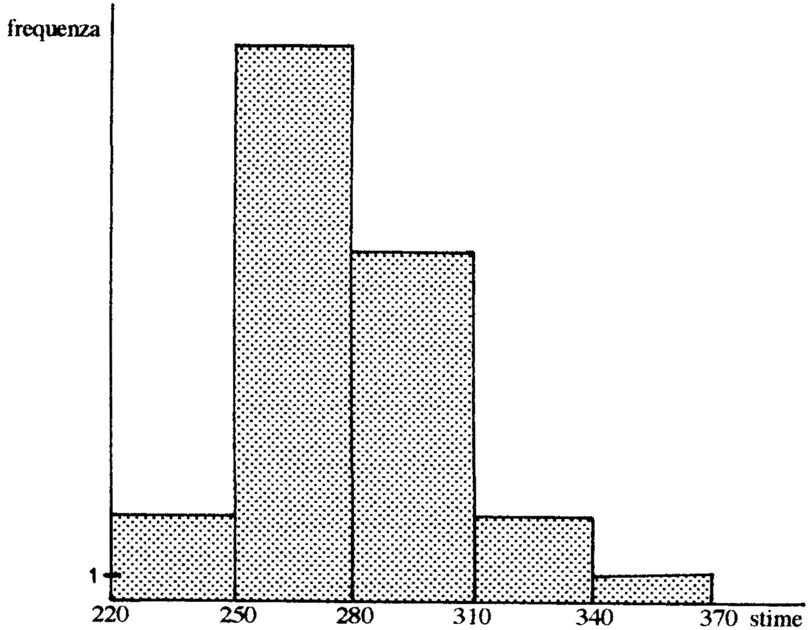
· Un tipo di rappresentazione importante e significativo è l'*istogramma*: richiede opportuni raggruppamenti dei dati in classi.
Si ricorre a un istogramma quando la distribuzione di una popolazione è ottenuta rispetto a una variabile continua o quando ha comunque senso raggruppare classi adiacenti.

Ci proponiamo di rappresentare con un istogramma la popolazione delle stime a vista precedentemente ordinate.
Tenendo conto che il campo di variazione è 130 *cm*, si possono considerare intervalli di 30 *cm*; si ottengono 5 classi con le seguenti frequenze:

classi	f_i
$220 \vdash 250$	3
$250 \vdash 280$	19
$280 \vdash 310$	12
$310 \vdash 340$	3
$340 \vdash 370$	1

($a \vdash b$ comprende tutti i valori x tali che $a \leq x < b$)

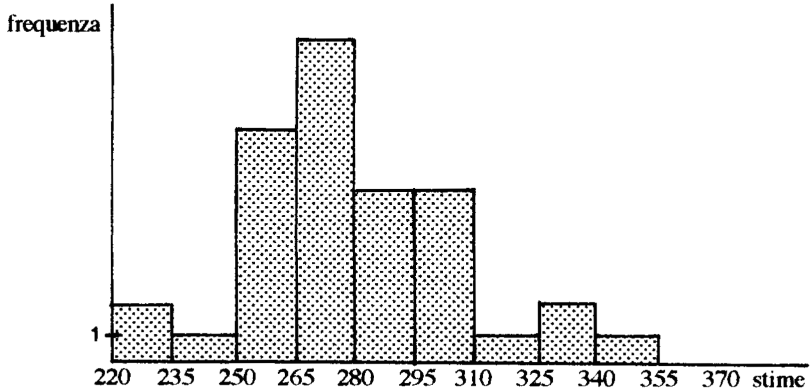
Per costruire l'istogramma, fissiamo un segmento che corrisponda sull'asse delle ascisse a ogni intervallo considerato. Su ogni segmento costruiamo un rettangolo di altezza proporzionale alla frequenza di ciascuna classe secondo l'unità di misura indicata.



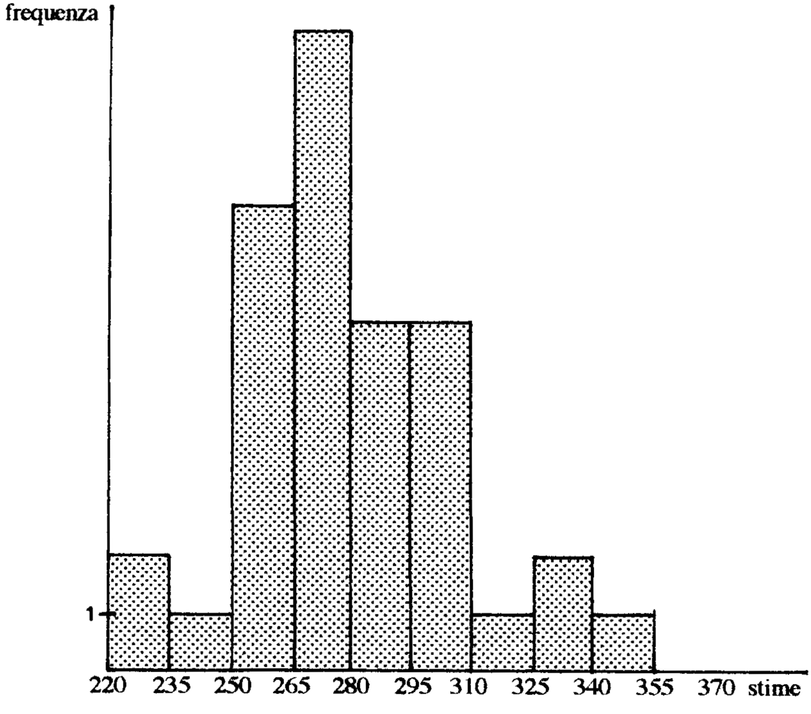
Dal momento che questi rettangoli hanno tutti la stessa base, anche le loro aree risultano proporzionali alle rispettive frequenze. Anzi si hanno notevoli vantaggi a parlare di area invece che di altezza.
Se nel nostro caso interessassero intervalli più fini, ad esempio di 15 cm, si otterrebbero 9 classi con le relative frequenze.

classi	f_i
220 ├── 235	2
235 ├── 250	1
250 ├── 265	8
265 ├── 280	11
280 ├── 295	6
295 ├── 310	6
310 ├── 325	1
325 ├── 340	2
340 ├── 355	1

Se si mantiene la stessa unità di misura per l'altezza dei rettangoli, il corrispondente istogramma risulta:



Questo istogramma non è confrontabile con il precedente: infatti, quando si confrontano rettangoli, è l'area piuttosto che l'altezza a conferire l'impressione della loro consistenza.
Se si impone invece che l'area dei rettangoli sia proporzionale alle frequenze, poiché si sono dimezzate le basi dei rettangoli si deve raddoppiare l'unità di misura delle altezze. Si ottiene:



L'istogramma ora ottenuto risulta confrontabile con il primo.

Le rappresentazioni delle frequenze relative

Una rappresentazione grafica che si presti a visualizzare il "peso relativo" delle singole parti rispetto al tutto è un *areogramma*. Un areogramma si costruisce suddividendo una figura, che rappresenti l'intero, in parti proporzionali alle frequenze relative ed è quindi significativo soltanto se il numero delle parti è piccolo.
E' chiaro che si può prendere le mosse da una figura qualsiasi, ad esempio un quadrato. In tale caso però soltanto un'opportuna misura del lato del quadrato rende agevole la suddivisione della figura in parti proporzionali alle frequenze relative.
Proprio per questo si ricorre più frequentemente a un diagramma a settori circolari: le aree dei settori circolari infatti sono proporzionali alle ampiezze dei rispettivi angoli al centro e pertanto la misura del raggio può essere scelta con assoluta libertà. Del resto la rappresentazione per settori circolari risulta anche più espressiva dal punto di vista percettivo.
In ogni caso, nella costruzione di un areogramma, sono quasi sempre inevitabili alcuni arrotondamenti.

Vogliamo rappresentare con un areogramma come sono distribuiti i diversi tipi di navi mercantili italiane con una stazza superiore a 100 t (dati desunti dal Calendario Atlante De Agostini 1997)

NAVIGLIO MERCANTILE

tipo di navi	numero
navi passeggeri e miste	364
navi da carico secco	137
navi cisterna	310
navi portacontenitori	19
navi di altro tipo	613

Il naviglio mercantile italiano comprende dunque 1 443 navi. Si può ora calcolare l'ampiezza degli angoli al centro corrispondenti ai tipi diversi di nave:

$\frac{364}{1\,443} = \frac{\alpha}{360°}$ $\alpha \approx 91°$ navi passeggeri e miste

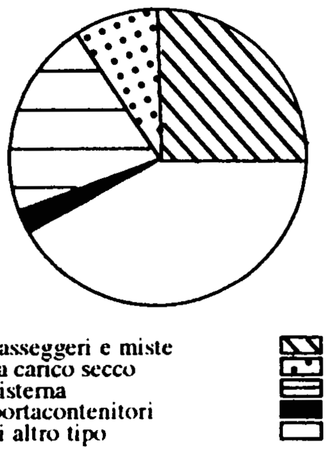
$$\frac{137}{1\,443}=\frac{\beta}{360°} \qquad \beta \cong 34° \qquad \text{navi di carico secco}$$

$$\frac{310}{1\,443}=\frac{\gamma}{360°} \qquad \gamma \cong 77° \qquad \text{navi cisterna}$$

$$\frac{19}{1\,443}=\frac{\delta}{360°} \qquad \delta \cong 5° \qquad \text{navi portacontenitori}$$

$$\frac{613}{1\,443}=\frac{\varepsilon}{360°} \qquad \varepsilon \cong 153° \qquad \text{navi di altro tipo}$$

La situazione è visualizzata dal seguente areogramma:



Bibliografia

[1] Bastianoni A. M. - Sainati Nello M. - Sciolis Marino M., *L'insegnamento della statistica e della probabilità nella scuola elementare*, Editrice La Scuola Brescia 1988

[2] Boffa M. - Dupont P., *Statistica*, Libreria Scientifica Cortina, Torino 1976

[3] De Finetti B., *Teoria della probabilità*, Ed. Einaudi, Torino 1970

[4] Fischbein E., *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*, Reidel, Dordrecht 1975

[5] Fischbein E. - Vergnaud G., *Matematica a scuola: teorie ed esperienze*, a cura di D' Amore B., Pitagora Editrice Bologna 1992

[6] Glaymann M. - Varga T., *La probabilità nella scuola dell'obbligo*, Armando Editore Roma 1979

[7] Pampallona U. - Ragusa Gilli L., *Che cos'è la statistica*, Loescher Torino 1975

[8] Pesci A. - Reggiani M., *Statistica e probabilità nella scuola media inferiore: una proposta didattica*, S.E.I. Torino 1988

[9] Pintacuda N., *Insegnare la probabilità*, Ed. Muzzio Padova 1981

[10] Prodi G., *Matematica come scoperta*, Casa editrice G. D'Anna, Firenze 1981

[11] *Processi cognitivi e apprendimento della matematica nella scuola elementare* a cura di G. Prodi, Editrice La Scuola Brescia 1984

LOGICA E LINGUAGGIO

Roberto Tortora
Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli",
Università "Federico II" di Napoli

Ho incontrato moltissima gente che dichiarava di odiare la matematica, e che tuttavia era enormemente interessata a qualsiasi problema logico o matematico io proponessi, a patto che venisse presentato sotto forma di indovinello. Non sarei per nulla stupito se buoni libri di indovinelli si rivelassero uno dei rimedi migliori per il cosiddetto "odio per la matematica". Per di più, ogni trattato di matematica potrebbe *essere scritto sotto forma di un libro di indovinelli!*
(R. Smullyan, dalla prefazione a [13])

§0. PROLOGO

"L'esploratore sbarcò sull'isola, portato dalla furia delle onde. A malapena le carte indicavano l'esistenza di quell'isolotto, ma egli conosceva, da antichi racconti, la particolarità degli abitanti del luogo: ce n'erano di due specie, ma niente nell'aspetto esterno permetteva di riconoscerli. I primi, chiamati Cavalieri, dicevano sempre e soltanto il vero; i secondi, i Furfanti, dicevano il falso. Così che quando, risalendo la scarpata, l'esploratore s'imbatté in uno degli abitanti, si guardò bene dal chiedergli dove trovare da bere, come d'istinto avrebbe fatto, e gli chiese invece preliminarmente: «Tu sei un Cavaliere?»..."

Ora, chiediamoci noi: è questa una buona domanda? Che cosa ottiene come risposta l'esploratore? E che informazione ne trae?

L'isola dei Cavalieri e dei Furfanti è un'invenzione di Raymond Smullyan, logico, scrittore, appassionato di giochi (la proposta è contenuta in [12], ma altre storie simili sono suggerite in [13], il testo citato in epigrafe), e molti autori, fra cui Bernardi [4], Navarra [11], Tortora [15] e Vighi [17], hanno già proposto o sperimentato l'uso di questa "sceneggiatura", per l'insegnamento della logica nella scuola dell'obbligo (e non solo). Nel seguito segnalerò altri possibili strumenti di tipo ludico utilizzabili per questo scopo.

Ma prima poniamoci la domanda se e come si debba fare logica nella scuola dell'obbligo. La mia opinione, provocatoria ma peraltro condivisa da molti, è che essa non debba essere affatto insegnata. O per lo meno, non in modo separato dalle altre parti della matematica. Del resto nei Programmi per la Scuola Media del 1979, a proposito del Tema "Matematica del Certo e del Probabile", negli Orientamenti si legge: «Si eviterà una trattazione teorica a sé stante, ... inopportuna a questo livello ...».

Ogni buon insegnante (di matematica, ma non solo) fa sempre della logica, ed è proprio facendoli scaturire dall'interno degli usuali argomenti del programma che è possibile e opportuno introdurre gli elementi essenziali della logica. Ma se proprio si richiede uno studio esplicito di alcuni concetti ed un tempo espressamente dedicato alla logica, allora il modo migliore è quello di sfruttare proposte divertenti, come quella di Smullyan.

C'è anche da dire che per poter in modo consapevole avviare gli studenti alla conoscenza di alcuni aspetti di questa disciplina, occorre che l'insegnante ne sappia abbastanza. Purtroppo la preparazione ricevuta all'università è a tutt'oggi assai carente per quanto riguarda la logica, e questo vale per i laureati in altre discipline scientifiche ma spesso per gli stessi laureati in Matematica.

Già nel 1988, in occasione di un convegno dedicato al tema della logica nella didattica, R. Maragliano si esprimeva così:

> "Soprattutto a livello di scuola di base (ma forse anche più su) il sapere del docente non deve mai coincidere totalmente con il sapere che si vuole far assimilare all'allievo, ma deve avere sempre un respiro strategico superiore, il solo che consente all'insegnante di dominare i meccanismi della trasmissione e della costruzione di contenuti di apprendimento meno elevati sul piano formale, anche se pur sempre dotati di un alto potere di organizzazione e di ordinamento [...] Ciò che auspico è che un domani non troppo lontano un insegnante della scuola obbligatoria, provvisto degli strumenti più semplici ed essenziali della logica matematica, riesca nell'intento di aiutare i suoi allievi ad essere più colti e intelligenti, più capaci di lavorare i contenuti per esempio della matematica o della lingua, senza dover ricorrere all'insegnamento esplicito della logica." ([18], pag. 105)

Queste lezioni hanno dunque due obiettivi distinti: da un lato, rivolte come sono agli insegnanti, hanno lo scopo di fornire loro alcune conoscenze più teoriche, con qualche indicazione bibliografica per approfondimenti; dall'altro lato si propongono di suggerire alcune attività destinate agli studenti della scuola media. È ovvio che le due cose sono strettamente collegate, ma è bene anche sapere, lo ripeto, che una conoscenza teorica più approfondita è necessaria all'insegnante per portare avanti bene la sua attività.

Le storie dei cavalieri e furfanti si prestano a entrambi gli scopi detti sopra. Per l'uso da farne in classe, ecco intanto due indicazioni generali di metodo:

a) Esse costituiscono dei canovacci per possibili recite. Assegnando ai ragazzi i ruoli di cavalieri, furfanti, e di esploratore, e facendogli recitare testi predisposti o da inventare, la lezione diventa viva e stimolante più assai che una lezione frontale.

b) È molto importante che le varie questioni logiche che emergono siano oggetto di discussione collettiva (per gruppi o nell'intera classe) e che il lavoro svolto sia quanto più possibile messo per iscritto. L'attenzione al linguaggio, e alla proprietà di linguaggio, è una delle componenti essenziali, come vedremo, della logica. Capiterà certamente che alcuni studenti arrivino prima di altri alle conclusioni: in questi casi l'insegnante, avvalendosi della sua esperienza, dovrà come sempre coordinare il lavoro allo scopo di non far annoiare i più bravi e non far restare indietro i meno dotati.

§1. QUESTIONI DI CARATTERE GENERALE.

Riprendiamo la narrazione iniziale dei cavalieri e dei furfanti, e poniamoci un po' di domande.

Il vero, il falso, che cosa significano queste parole? Siamo sicuri che tutti intendiamo le stesse cose? A che cosa attribuiamo la qualifica di vero e di falso? Cerchiamo di affrontare questi punti.

1) Vero e falso si riferiscono ad affermazioni o a proposizioni. Anche se nel linguaggio comune si può dire ad esempio che un sentimento è vero o che un gioiello è falso, nell'uso logico non riferiremo queste qualità mai a degli oggetti ma solo a proposizioni: ad esempio è vero che 4 è minore di 8, è falso che il 1997 è un anno bisestile, e così via.

2) Proposizioni, affermazioni, che cosa sono? Qui bisogna fare attenzione, perché nell'ambito della logica si pongono sottili distinzioni tra "proposizione", "frase", "affermazione", "enunciato", "formula", ed altro ancora. Non è il caso di entrare qui in tali questioni e perciò queste parole saranno usate in modo informale e in buona parte come sinonimi.

Una definizione precisa di "proposizione" è assai difficile, in certi casi controversa, certo inopportuna per i ragazzi. Il motivo è che si fa riferimento alla lingua comune, nel nostro caso l'italiano, che è un oggetto ricco, vivo, mutevole, assai complesso. Ciò non impedisce comunque di operare alcune distinzioni. Ad esempio si possono facilmente distinguere le affermazioni ("2+2=4", "Roma è la capitale d'Italia", "L'anno 1997 è bisestile"), da frasi interrogative o che esprimono comandi o simili ("Che ora è?", "Alzatevi in piedi"). Di queste seconde la logica non si occupa. Più difficile è decidere se *conviene* annoverare tra le proposizioni affermazioni del tipo: "x è un numero pari", "Gabriella è simpatica", "Oggi piove". Qualche autore tende ad escluderle sulla base del fatto che ad esse non è attribuibile in modo certo o univoco un valore di verità vero/falso. Altri preferiscono - ed è certo meglio - chiamarle "forme proposizionali" o "proposizioni aperte", spiegando che esse diventano proposizioni quando si precisano meglio alcune loro componenti (ad esempio nella prima si dà un valore alla x, nella seconda si chiarisce chi è Gabriella e a chi è simpatica, nella terza si sostituisce al generico "oggi" una data e un luogo definiti). Ma si intuisce che ogni tentativo di dare un confine preciso alla nozione di proposizione presenta lati deboli.

Va comunque citata come ragionevole, a mio avviso, la caratterizzazione di proposizione come "affermazione della quale abbia senso chiedersi se è vera o falsa". Preferibile certamente all'altra: "affermazione della quale si sappia dire se è vera o falsa", che è troppo restrittiva e fa dipendere pericolosamente la nozione da fatti soggettivi.

A questa difficoltà seria (in fondo si tratta di chiarire l'oggetto ultimo di cui questa scienza deve occuparsi) la Logica, man mano che diventa Logica Matematica sfugge, ricorrendo ad un'impostazione astratta. Le proposizioni sono allora gli oggetti primitivi di cui la logica si occupa e non occorre definirle. In effetti tutta la matematica si è sviluppata in questo modo. Oggi non si pretende più di definire che cosa è un punto o che cosa è una retta (o se si vuole queste domande sono di interesse specialistico e riguardano i fondamenti della matematica, o la filosofia della matematica). Si assumono invece punti e rette come elementi primitivi e non definiti, e si studiano le loro proprietà partendo da alcuni assiomi: così si è venuta costituendo la geometria assiomatica, sin dai tempi di Euclide, e così la si studia nelle scuole superiori. Non per questo la geometria non si applica al mondo reale: non si edificherebbero palazzi e ponti né viaggerebbero automobili e navicelle spaziali senza la geometria. Così è per la logica. Come le proprietà delle rette si applicano a fili e a spigoli tanto meglio quanto più questi si avvicinano all'idea astratta di retta, così le proprietà di cui si occupa la logica (matematica) si applicano alle frasi del linguaggio comune tanto più quanto più queste si avvicinano all'idea astratta di proposizione.

3) Vero, falso, e basta? Una questione più delicata di quanto possa sembrare. Diciamo subito che in logica vale il Principio di Bivalenza, secondo cui ad ogni proposizione (una volta chiarito che cosa si intende con questa parola), compete uno ed uno solo dei due valori di verità VERO/FALSO. Bisognerebbe veramente precisare che ci stiamo riferendo alla logica *classica*, dato che esistono varianti di questa che non accettano il Principio di Bivalenza. Ma la logica classica è l'unica che qui ci interessa, sia perché è quella che si utilizza comunemente nella matematica e nelle scienze, sia perché le numerose varianti partono tutte da quella. (Qui l'onestà impone di dire che non tutti gli studiosi vedono le cose a questo modo, e ci sono di quelli che fanno il tifo per logiche diverse da quella classica sin dall'inizio. Ma il bello della scienza e della filosofia è proprio il fatto che si tratta di materie vive, nelle quali possono sempre confrontarsi punti di vista diversi).

Ci sono domini in matematica nei quali le cose non stanno così. Se guardiamo ai programmi della scuola media, anzi, vediamo che la Logica è abbinata alla Probabilità. Il titolo del tema che ci riguarda è "Matematica del Certo e del Probabile", e vi si legge "Affermazioni di tipo vero/falso e affermazioni di tipo probabilistico". Questa contrapposizione, che è fin troppo enfatizzata (anche nell'ambito della Probabilità è possibile vedere operante la Logica Classica), mostra comunque che ci sono ambiti di discorso nei quali è ragionevole attribuire ad un'affermazione valori di verità diversi da quelli netti, estremi (vero/falso) e consentire invece situazioni intermedie. Ma non entriamo in un tema che ci porterebbe fuori strada.

E veniamo invece al linguaggio comune: prendiamo affermazioni come "Omero è l'autore dell'Iliade", "La democrazia è il miglior sistema politico esistente", "Bere vino in quantità moderata fa bene alla salute" e tantissime altre che pronunciamo usualmente o leggiamo o sentiamo. Non è forse corretto dire che nessuna di esse è VERA (o FALSA) in senso stretto, ma tutte sono *in certa misura* vere, ma con la possibilità di modificare opinione o accettare pareri diversi? Non sarà che il Principio di Bivalenza è una camicia di forza troppo stretta che costringe la Logica ad applicarsi solo alla Matematica (e neanche a tutta, vedi il discorso fatto prima sulla Probabilità), e non ad altri campi? Sono domande pertinenti che meritano attenta riflessione.

Una cosa sulla quale occorre fare molta chiarezza è che la Logica non può, non vuole, non sa fornire alcuna verità sul "mondo". Data una qualunque affermazione, anche matematica come "2+2=4", non è dalla Logica che ci si può aspettare di sapere se essa è vera o falsa: saranno di volta in volta le conoscenze di questa o quella scienza, le credenze, le convenzioni, e così via, a stabilire se si vuole considerare vera o falsa una data affermazione. La Logica non si occupa mai di decidere della verità di alcunché; si occupa invece di stabilire se un certo ragionamento è corretto, e in generale di studiare le condizioni per cui un ragionamento è corretto - e questa è anzi una delle più accettate definizioni di questa scienza.

Vedremo meglio più avanti (§4) che cosa vuol dire che un ragionamento è corretto e come si fa ad accorgersene, ma osserviamo intanto che, se non è la verità assoluta, non è neanche poco. Infatti quando siamo in presenza di un ragionamento corretto, non abbiamo scampo: se le premesse si considerano vere, la conclusione si deve considerare tale. Questo è l'insegnamento che ci viene dalla logica, insegnamento quanto mai prezioso, starei per dire sul piano etico. Diventa infatti per ciascuno di noi un problema di onestà intellettuale accettare le conseguenze delle nostre premesse. Se non si è disposti ad accettare come vera una conclusione correttamente dedotta, ebbene allora bisogna per forza abbandonare qualcuna delle premesse.

Se si riflette su questo, ci si accorge quanto la logica può applicarsi a tutte le situazioni concrete, anche le più incerte, ed è quella che aiuta a collegare fatti che altrimenti sarebbero frammentari, a ricostruire pezzi di ragionamenti, catene di inferenze, a dare più forza ai propri argomenti e ad essere più critici sugli argomenti degli altri. Un invito che si può rivolgere a tutti, nella scuola e non solo, è provare a sottoporre alla prova della logica gli scritti che leggiamo ad esempio sui giornali. Abituiamoci a considerare che disponiamo di uno strumento potente di lettura della realtà, e ad usarlo. Anche per contrastare la tentazione di considerare quello che si fa a scuola come qualcosa di diverso e di separato dal mondo esterno. Su questo punto il lavoro dell'insegnante è essenziale.

Ora che sono un po' più chiari - si spera - alcuni concetti di base, possiamo riprovare a giocare con i cavalieri e i furfanti al gioco del vero e del falso. Riprendo questa locuzione da [14], un manualetto di poche pretese, che però si lascia consigliare per la grande chiarezza e il piglio accattivante.

A proposito, la domanda iniziale dell'esploratore, per chi non lo avesse ancora chiaro, era una domanda inutile, perché chiunque sia A, la sua risposta è sempre "Io sono un cavaliere". Ma vediamo per esercizio qualche altro problemino (le risposte sono in fondo al testo):

A1. A e B sono due abitanti dell'isola. A dichiara: "B è un furfante". B aggiunge: "Siamo tutti e due cavalieri". Cosa sono A e B?

A2. Supponiamo che A dica: "Siamo due furfanti". Cosa sono A e B?

A3. Se invece A dice: "Io e B siamo dello stesso tipo", che cosa è A e che cosa è B?

A4. A afferma: "Io sono un furfante". Che cosa è A?

A5. A dice: "Almeno uno di noi due è un furfante". Cosa sono A e B?

A6. Ci sono tre abitanti, A, B e C. A dice: "Siamo tre furfanti". B dice: "Uno solo di noi è cavaliere". Che cosa sono A, B, C?

A7. Se invece A dice: "Siamo tre furfanti" e B replica: "Uno solo di noi è furfante", che cosa sono A, B, C?

§2. I CONNETTIVI.

Finora abbiamo incontrato proposizioni atomiche, così chiamate perché non è possibile scinderle in altre proposizioni più semplici. In questo paragrafo vedremo come si combinano le proposizioni mediante i connettivi.

In logica si usa fare una distinzione tra logica (o calcolo) delle proposizioni e logica (o calcolo) dei predicati. Essa corrisponde a quella che si fa in grammatica tra sintassi del periodo e sintassi della proposizione. Ma mentre nella tradizione dello studio della lingua prima si analizza una singola proposizione nelle sue parti costituenti e poi si vede come si combinano tra loro più proposizioni elementari, nell'ambito della logica matematica si preferisce invertire quest'ordine e privilegiare in un primo momento i nessi tra proposizioni (*connettivi - Logica proposizionale*), e in un secondo momento spingere l'analisi fino ai costituenti ultimi di ogni singola proposizione (*sostantivi e predicati - Logica dei predicati*).

Il programma della scuola Media include le nozioni che riguardano i connettivi, ma qualche breve considerazione sui predicati è tuttavia opportuna, sia perché anche questa parte dovrebbe essere comunque patrimonio dell'insegnante, sia perché la distinzione Calcolo delle Proposizioni / Calcolo dei Predicati ha molto senso nell'ambito formale, ma non è sempre giustificata nel linguaggio comune, sia infine perché possono essere sfruttate conoscenze della teoria degli insiemi che gli studenti già possiedono. Ne parleremo ad ogni modo più avanti (§5 e §6).

Diamo per noti i connettivi principali, con le relative tavole di verità, rappresentate nelle Figure 1 e 2. Adoperiamo per la negazione (che a rigor di termini non è un connettivo, perché opera su una sola proposizione) il simbolo $\neg$, e per i connettivi *binari* congiunzione, disgiunzione (inclusiva), implicazione e doppia implicazione, i simboli $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$. E soffermiamoci invece su qualche aspetto critico sia generale che specifico.

A	$\neg$A
V	F
F	V

Figura 1

A	B	A$\wedge$B	A$\vee$B	A$\Rightarrow$B	A$\Leftrightarrow$B
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

Figura 2

Cominciamo con un esempio. Consideriamo la frase: "Roma è la capitale d'Italia e 4 è minore di 2" e proviamo a chiedere a una persona di buon senso (non competente di logica), come qualifica questa frase, in particolare se la considera: a) vera; b) falsa; c) metà vera e metà falsa; d) né vera né falsa; e) priva di senso. È un test che chiunque può fare senza difficoltà.

È probabile che la risposta più frequente sia la c), quella più vicina al senso comune. Ma qualche risposta può anche essere d) oppure e). È anche ragionevole che nessuno risponda a). Ma quanti saranno a rispondere b)? Ebbene, la risposta "ufficiale" è proprio b): la frase in questione è falsa.

Il fatto è che la convenzione (nient'affatto scontata) che si stipula in logica è che: 1) comunque si prendano due proposizioni (una nel caso della negazione) ed un connettivo, ciò che si ottiene è ancora una proposizione; 2) a ciascuna proposizione - come già detto prima - compete o il valore vero o il valore falso, né ci sono altre possibilità. Siccome, nell'esempio di sopra, c'è da scegliere solo tra a) e b), è ragionevole che la risposta sia b). Quando si definisce la tavola di verità della congiunzione e si stabilisce che una congiunzione è vera solo se sono vere entrambe le proposizioni congiunte, si dà dunque per scontata questa regola generale.

I connettivi logici hanno tutti questa caratteristica (con parola tecnica si dice verofunzionalità). Essi consentono di attribuire alla proposizione composta un valore di verità che dipende dal valore di verità delle proposizioni componenti e da nient'altro. Ogni altro legame che nel linguaggio comune o anche matematico può sussistere tra due proposizioni che si combinano tra loro resta escluso.

Ci sono dunque molti casi in cui la lingua comune e quella formalizzata si discostano. Esaminiamone alcuni, senza avere la pretesa né di esaurire tutte le sfumature, né di dissipare tutti i dubbi, anche perché la lingua naturale è, come già detto, assai complessa.

1. <u>Sulla congiunzione</u>. Spesso nell'uso comune è implicito un legame temporale o di causa ed effetto tra le due proposizioni. Si pensi agli esempi: "Ho fatto colazione e sono uscito" / "Sono uscito e ho fatto colazione". Di solito consideriamo vera la prima frase se ho fatto colazione a casa e vera la seconda se ho fatto colazione al bar.

Ci sono poi altre congiunzioni della lingua italiana, come ad esempio l'avversativa "ma", che trasmettono informazioni che sono inevitabilmente perse quando si passa alla formalizzazione: "10 è un numero pari, ma non è multiplo di 4".

Un altro problema è dato da costruzioni sintattiche identiche che nascondono sensi diversi. Prendiamo il caso di "Luigi e Giuseppe sono alti": possiamo considerare questa frase come la congiunzione di "Luigi è alto" e "Giuseppe è alto". Ma invece "Margherita e Antonio sono fidanzati" è una proposizione atomica. Analogo discorso per le proposizioni "I segmenti a e b giacciono sul piano α" e "I segmenti a e b sono paralleli".

Non si perde certo tempo nella scuola se si riesce a far riflettere gli studenti su questi aspetti della lingua. L'ideale sarebbe anzi che su tali questioni lavorassero in sintonia gli insegnanti di italiano e di matematica.

2. Sulla negazione. La tavola di verità non offre certo problemi. Piuttosto occorre fare attenzione a che si capisca bene come si nega una proposizione nella lingua italiana. Le modalità sono tante: cambiamenti di vocaboli ("Oggi sono felice" / "Oggi sono infelice"); inserimento di particelle negative in vari punti della frase ("Il treno arriva alle 13" / "Il treno non arriva alle 13"); uso appropriato di simboli ("$-3 \in N$" / "$-3 \notin N$"). Il problema è che spesso si confonde negazione e "contrario" o si nega solo parte della frase ("Ti piace il gelato senza la panna" *non* è la negazione di "Ti piace il gelato con la panna") Gli esempi più significativi si hanno quando la negazione è in associazione con altri connettivi o con quantificatori (spesso nascosti): «Sei andato a Roma e hai visto Giulia» dice con tono di accusa la moglie al marito, e questi risponde che non è vero; ed ha ragione, se ad esempio ha incontrato Giulia a Firenze. Infatti la negazione della frase di sopra *non* è "Non sono andato a Roma e non ho visto Giulia". O ancora, la negazione di "Tutti i presenti fumano" è la frase "Non tutti i presenti fumano", che equivale a "Qualcuno dei presenti non fuma", laddove un errore abbastanza frequente è prendere come negazione "Nessuno dei presenti fuma". Torneremo più avanti (§6) su questo punto.

3. Sulla disgiunzione. È nota la diatriba tra l'uso inclusivo della particella "o" e quello esclusivo (in latino, *vel* e *aut*). In italiano raramente prevale il primo, più spesso il secondo, ma ancora più spesso non c'è modo di distinguere tra i due, in quanto sono piuttosto le circostanze di fatto descritte nella frase a precisare la situazione. "Mio figlio si iscriverà al Liceo classico o al Liceo scientifico" e "Potete prendere per primo pasta o riso" sembrerebbero usi esclusivi, così come sicuramente è "$x \geq 3$". Attenzione, il connettivo "o" a volte è subdolamente nascosto nei "doppi segni" (minore o uguale, incluso, più o meno); è assai difficile gestire queste espressioni, e si può fare grande confusione. Invece è un "o" inclusivo quello della frase "In ascensore possono entrare i bambini maggiori di 12 anni o accompagnati da un adulto". Per inciso, attenzione anche alle frasi italiane che contengono i verbi potere, dovere, volere, e simili, che consentono a volte scambi tra i connettivi "e" ed "o", e che richiedono specifiche costruzioni per la negazione.

Di fronte a questa situazione, a me sembra che la giustificazione più ragionevole per la scelta dell'o inclusivo è semplicemente l'analogia che esiste tra i connettivi $\wedge$ e $\vee$ e le operazioni insiemistiche di intersezione e unione, e di conseguenza la grande eleganza che scaturisce dalla simmetria tra le tavole di verità di $\wedge$ e $\vee$. Inoltre in matematica, proprio a causa della detta analogia, si può sostenere che prevale l'uso dell'o inclusivo.

Prima di proseguire nell'esame degli altri connettivi, osserviamo che anche su negazione, congiunzione e disgiunzione si possono proporre vari indovinelli, che anzi possono essere sfruttati proprio per introdurre - e, perché no?, far costruire dai ragazzi - le tavole di verità. Attingiamo ancora alle storie di cavalieri e furfanti (le risposte sono in fondo):

B1. A dice: "Io sono un furfante e 3+3=9". Che cosa è A?

B2. A dice: "O io sono un furfante o 3+3=9". Che cosa è A?

B3. A dice: "O io sono un furfante o B è un cavaliere". Che sono A e B?

B4. A dice: "Io sono un furfante, ma B non lo è". Che sono A e B?

B5. A dice: "B e C sono entrambi cavalieri". Poi aggiunge: "C non è cavaliere". Che cosa sono A, B, C?

4. Sull'implicazione. Abbiamo già visto molti esempi riguardo alla discrepanza tra linguaggio naturale e linguaggio formale, ma le difficoltà più serie riguardano senza dubbio l'implicazione, per vari motivi.

Una proposizione composta del tipo $A \Rightarrow B$ si può leggere in italiano - e già questo è un problema - in molti modi diversi: A implica B, da A segue B, se A allora B, condizione sufficiente per B è A, condizione necessaria per A è B, ed altri ancora. Ma se A e B rappresentano delle particolari proposizioni, tutte queste letture suggeriscono un nesso di tipo causale tra A e B o quanto meno un collegamento nel senso. Una frase come: "Se 4 è minore di 10, allora il treno corre" è, per quanti sforzi si cerchino di fare, priva di senso comune. D'altra parte, i connettivi della logica non possono dar conto di altri nessi, e oltre tutto se si volesse individuare con chiarezza che cosa vuol dire collegamento di senso, non si saprebbe nemmeno da dove cominciare. L'unica cosa che fa un connettivo è, lo sappiamo, associare un valore di verità alla proposizione composta a partire da quelli delle proposizioni componenti, incurante del fatto che le componenti abbiano o no qualche nesso fra loro.

Già diverso è quello che accade se A e B rappresentano delle proposizioni aperte, contenenti qualcosa di variabile o proprio una variabile in senso matematico. Non è un caso che tutti gli esempi che si fanno per giustificare la tavola di verità dell'implicazione, hanno questo carattere. "Se piove, uso l'ombrello". "Se uno ha la patente, può guidare l'auto", "Se un triangolo T ha due angoli uguali, esso è isoscele", "Se un numero naturale finisce per 0 o per 5, allora esso è divisibile per 5", e così via. Si può notare che moltissimi teoremi in matematica hanno proprio la forma di un'implicazione, ma c'è sempre implicita o esplicita una variabile (e, aggiungerei, un quantificatore universale). Grazie alla presenza di una tale variabile, è possibile esaminare i vari casi che si possono presentare e giungere alla conclusione che la cosa più ragionevole è considerare un'implicazione $A \Rightarrow B$ sempre vera, salvo il caso i cui l'antecedente A è vero e il conseguente B è falso.

Ma attenzione che spesso un esempio come "Se piove, uso l'ombrello", nel quale sono presenti proposizioni aperte, viene riportato impunemente poco dopo avere magari affermato che "Piove" non è una proposizione, perché ad essa non si può assegnare in modo certo uno dei valori vero/falso.

Un altro problema è che il connettivo implicazione viene spesso confuso con una nozione diversa, e cioè con l'operatore di *deduzione*, che è una nozione metalinguistica. Diciamo per inciso - anche se l'argomento meriterebbe un discorso più approfondito - che in logica, ma anche per esempio in informatica, è molto importante distinguere tra vari linguaggi. I connettivi sono particelle che fanno parte del linguaggio del calcolo proposizionale, e servono a comporre le proposizioni, né più né meno come le lettere dell'alfabeto servono a comporre le parole. Altra cosa è stabilire ad esempio *relazioni* tra proposizioni, le quali non appartengono al linguaggio in esame ma servono a descrivere proprietà di questo linguaggio. Devono allora appartenere ad un linguaggio diverso, di livello superiore, che viene detto *metalinguaggio*. È proprio questo il caso della deduzione. Dire che da A si deduce B significa in logica dire che esiste una sequenza di proposizioni dotata di particolari caratteristiche che parte dall'*ipotesi* A ed arriva alla *tesi* B.

La confusione tra le due nozioni, implicazione e deduzione, non comporta guai nelle applicazioni, perché un apposito risultato di Logica (noto come Teorema di Deduzione) garantisce precisamente che, salvo in certi casi speciali che qui non ci interessano, per poter dimostrare un'implicazione come $A \Rightarrow B$ è lecito dedurre B sotto l'ipotesi A. E questo è precisamente ciò che normalmente si fa quando si dimostra un teorema di matematica. Ma la confusione rimane pericolosa perché spesso impedisce di capire il ruolo delle varie parti in gioco.

5. Sulla doppia implicazione. Su questo connettivo non c'è per la verità molto da dire più di quanto detto a proposito dell'implicazione, anche perché mi sembra che il modo migliore di trattare la doppia implicazione sia quello di considerarla un'abbreviazione di $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$.

Allora, che fare? Il problema dello studio del connettivo implicazione è così delicato che a mio avviso sarebbe bene posticiparne il più possibile lo studio e limitarsi inizialmente a quei connettivi che offrono meno problemi, come la congiunzione, la disgiunzione e la negazione. Fra l'altro è solo a questi tre connettivi che si riferisce esplicitamente il programma di matematica della scuola media. Più precisamente, la mia personale proposta per quanto riguarda l'ordine con il quale trattare questi argomenti è la seguente:

In primo luogo Negazione e Congiunzione. Seppure sono presenti diversi elementi di difficoltà, come abbiamo visto, tuttavia le relative tavole di verità sono sicuramente accettabili da tutti. Le difficoltà sono tutte nell'accettare il Principio di Bivalenza e nel ricondurre negazione e congiunzione a connettivi verofunzionali, ma una volta superato questo ostacolo, la scelta della tavola di verità non dovrebbe essere controversa.

A questo punto si introduce la Disgiunzione, per simmetria con la Congiunzione e per analogia con le operazioni insiemistiche di Unione e Intersezione. Questo consente di scegliere la Disgiunzione inclusiva in modo naturale, senza forzare l'interpretazione usuale della particella "o", che - abbiamo visto sopra - presenta non pochi problemi.

Questi tre siano i soli connettivi da usarsi con vere e proprie proposizioni. Da questo momento in poi, però, si possono sfruttare le tavole di verità per cominciare a parlare di *forme proposizionali* o *variabili proposizionali* o *proposizioni aperte*, del tipo: "x è un numero dispari", "il triangolo T è ottusangolo", "domani il treno arriverà in ritardo", "uno studente è preparato", eccetera. Solo a questo punto si può parlare di implicazione e di doppia implicazione, definite rispettivamente come "non A o B" e come "A implica B e B implica A"

§3. USARE LE TAVOLE DI VERITÀ.

Una volta apprese le tavole di verità dei connettivi, si può estendere il gioco del vero e del falso a proposizioni più complesse. Nel "gioco" della logica, dove si adotta una disinvoltura tipicamente matematica, non si teme di avere a che fare con proposizioni anche di grande complessità, che invece darebbero molto impiccio nel linguaggio comune. Diventa invece appunto un gioco combinatorio attribuire ad esempio un valore di verità alla proposizione $[A \vee (B \wedge C)] \Rightarrow \{B \wedge [(C \vee \neg A) \vee (A \Leftrightarrow C)]\}$, e naturalmente questo valore di verità dipende unicamente dal valore di verità delle componenti (nel nostro caso A, B, C).

L'esempio dato sopra è volutamente elaborato e può essere visto più che altro come un esercizio di riconoscimento di una proposizione, e di uso delle parentesi. Insistere su oggetti così è un po' come accanirsi con le famigerate espressioni aritmetiche a molti piani. Al riguardo però può essere utile osservare che la costruzione di una formula, non diversamente dalla costruzione di una espressione, è ottenibile utilizzando uno schema ad albero. Gli "alberi" sono strutture grafiche particolari che permettono di rappresentare in modo efficace relazioni d'ordine o gerarchiche di diversa natura e sono molto usati in tutte le discipline. Ad esempio, l'albero di costruzione della proposizione $[A \wedge (B \vee C)] \Leftrightarrow [(A \wedge B) \vee (A \wedge C)]$, che esprime la proprietà distributiva della congiunzione rispetto alla disgiunzione è rappresentato in Figura 3. Per esercizio, si provi a costruire l'analogo albero per la proposizione scritta sopra $[A \vee (B \wedge C)] \Rightarrow \{B \wedge [(C \vee \neg A) \vee (A \Leftrightarrow C)]\}$.

Ma facciamo un esempio più semplice e più "concreto". Un famoso detto cinese recita più o meno così: "Se c'è rimedio, il saggio non si agita, e se non c'è rimedio, il saggio non si agita". Indichiamo con R la proposizione "C'è rimedio", e con A la proposizione "Il saggio si agita". La proposizione composta è allora $(R\Rightarrow\neg A)\wedge(\neg R\Rightarrow\neg A)$. Come si fa a dare valore di verità a questa proposizione? Basta attribuire ad R e ad A tutti i possibili valori di verità e passo a passo arrivare a valutare tutte le "sottoformule" della proposizione composta assegnata, usando le tavole di verità delle Figure 1 e 2. Il procedimento si può disporre come in Figura 4, dove compaiono quattro righe, quante sono le possibili attribuzioni dei valori vero e falso alle due proposizioni R ed A.

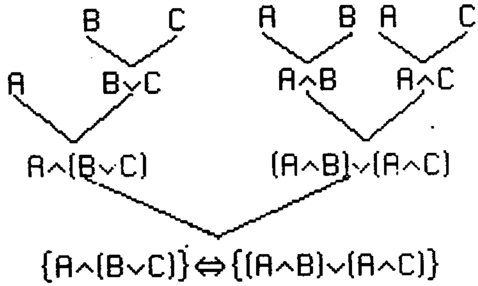


Figura 3

R	A	$\neg R$	$\neg A$	$R\Rightarrow\neg A$	$\neg R\Rightarrow\neg A$	$(R\Rightarrow\neg A)\wedge(\neg R\Rightarrow\neg A)$
V	V	F	F	F	V	F
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V	V

Figura 4

Facciamo un altro esempio. Consideriamo la proposizione "Se si fa tardi e non sei tornato, sarei incosciente se non mi preoccupassi". Indichiamo con F "Si fa tardi", con T "Sei tornato", con I "Sono incosciente" e con P "Mi preoccupo". Naturalmente trascuriamo le variazioni della lingua italiana, come le inflessioni dei verbi e simili. La nostra proposizione è dunque $(F\wedge\neg T)\Rightarrow(\neg P\Rightarrow I)$. Lasciamo a chi ha pazienza la cura di costruire la tavola di verità per questa proposizione, che richiede ben 16 righe essendo presenti 4 proposizioni atomiche F, T, P ed I. (La regola generale è: n proposizioni atomiche diverse, 2^n righe nella tavola di verità). E vediamo invece come in questo caso si può fare più in fretta: ma si badi che l'esempio è studiato a bella posta e non è detto che sempre questa procedura è vantaggiosa.

Supponiamo allora che la nostra implicazione $(F\wedge\neg T)\Rightarrow(\neg P\Rightarrow I)$ sia falsa. Ciò può accadere, tenendo presente la tavola di verità dell'implicazione, solo se l'*antecedente* $F\wedge\neg T$ è vero e il *conseguente* $\neg P\Rightarrow I$ è falso. Ma una congiunzione come $F\wedge\neg T$ è vera solo se sono veri entrambi i congiunti F e $\neg T$, che è come dire vera F e falsa T; invece l'implicazione $\neg P\Rightarrow I$ è falsa quando $\neg P$ è vera (dunque P falsa) e I è falsa. Riassumendo la nostra proposizione è falsa in un solo caso, cioè quando F è vera e T, P ed I sono false; ed è vera negli altri 15 casi.

Ci sono fra tutte, alcune speciali proposizioni che risultano sempre vere qualunque sia il valore di verità che assumono le proposizioni atomiche componenti. Queste speciali proposizioni si chiamano *tautologie*. Si dice anche che esse sono vere a causa della loro forma logica, ed in effetti più che singole proposizioni sono delle *forme proposizionali*, in cui le lettere sono come delle variabili che possono essere sostituite da qualsivoglia proposizione specifica.

Ce ne sono alcune famose, sin dall'antichità, qualche volta dotate di nomi illustri. Le più importanti sono certamente il *principio di non contraddizione* $\neg(A\wedge\neg A)$ e il *principio del terzo escluso* $A\vee\neg A$. Ma possiamo anche citare, un po' a caso, le proprietà commutative e associative della congiunzione e della disgiunzione e distributive dell'una nei riguardi dell'altra:

$(A\wedge B)\Leftrightarrow(B\wedge A)$, $[A\wedge(B\wedge C)]\Leftrightarrow[(A\wedge B)\wedge C]$,

$(A\vee B)\Leftrightarrow(B\vee A)$, $[A\vee(B\vee C)]\Leftrightarrow[(A\vee B)\vee C]$,

$[A\wedge(B\vee C)]\Leftrightarrow[(A\wedge B)\vee(A\wedge C)]$, $[A\vee(B\wedge C)]\Leftrightarrow[(A\vee B)\wedge(A\vee C)]$.

Notiamo in proposito che, a differenza delle operazioni di somma e prodotto fra numeri, con le quali disgiunzione e congiunzione hanno molte analogie, valgono in questo caso tutte e due le proprietà distributive. Si può notare invece la perfetta analogia che sussiste tra le operazioni logiche di congiunzione e disgiunzione e le operazioni insiemistiche di intersezione e unione. Questa analogia si estende a negazione e complemento. E ad esempio, in analogia con le leggi di De Morgan per unione, intersezione e complemento, abbiamo le tautologie, dette anch'esse leggi di De Morgan:

$\neg(A\wedge B)\Leftrightarrow(\neg A\vee\neg B)$, $\neg(A\vee B)\Leftrightarrow(\neg A\wedge\neg B)$.

Tutte le equivalenze sopra scritte possono essere interpretate oltre che come tautologie anche (tenuto conto della tavola di verità della doppia implicazione) come il fatto che i due membri dell'equivalenza "hanno la stessa tavola di verità" ovvero risultano veri o falsi esattamente negli stessi casi. In questo caso le due proposizioni si dicono *logicamente equivalenti*.

È in virtù di questo principio che è possibile talora "semplificare" delle proposizioni composte. E riconoscere che dei connettivi possono essere definiti a partire da altri. È quello che abbiamo già fatto quando abbiamo definito "A implica B" come "non A o B" e la doppia implicazione come la congiunzione di due implicazioni. Un esercizio potrebbe essere quello di riconoscere, esaminando la tabella in Fig. 4, a chi è equivalente la proposizione lì esaminata. Ancora, si può riconoscere che, accanto ai cinque connettivi binari descritti nella Fig. 2, se ne possono, in modo puramente combinatorio, studiare diversi altri (fra questi la disgiunzione esclusiva e i connettivi che gli informatici indicano con NAND e NOR), tutti però definibili a partire da quelli già studiati. In effetti abbiamo già visto che implicazione e doppia implicazione si possono ottenere da congiunzione, disgiunzione e negazione, e si può vedere che addirittura la negazione e la congiunzione possono generare tutti gli altri (basta definire la disgiunzione a partire dalla tautologia $(A \vee B) \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$, che si ottiene come variante della seconda legge di De Morgan).

§4. RAGIONARE CORRETTAMENTE.

Se finisce la benzina, l'automobile si ferma.
La benzina finisce.
Dunque l'automobile si ferma.

È un ragionamento corretto? Sembrerebbe di sì. La *conclusione* "L'automobile si ferma" appare ragionevole conseguenza delle due *premesse* "Se finisce la benzina, l'automobile si ferma" e "La benzina finisce".

Ma, riflettiamo, l'auto potrebbe essere in discesa e non fermarsi. È ancora certo che il ragionamento è corretto? Se qualcuno pensa che il ragionamento cessa di essere corretto, si inganna. Un fatto di grande importanza da capire è che un ragionamento non cessa di essere corretto sol perché perviene a conclusioni false. Un ragionamento si considera corretto se conduce a conclusioni vere quando le premesse sono vere. E se le premesse sono false anche le conclusioni possono esserlo. Nell'esempio di sopra la riflessione sulla strada in discesa può servire a mettere in dubbio la verità di una delle due premesse: "Se finisce la benzina, l'automobile si ferma". Forse non siamo più d'accordo su questo fatto, è lecito ed anzi raccomandabile discutere le premesse. Ma la logica insegna che se si accettano delle premesse e si ragiona correttamente, bisogna accettare anche le conseguenze.

Facciamo un secondo esempio (è uno dei più famosi sillogismi e, come si sa, risale ad Aristotele):

Tutti gli uomini sono mortali.
Socrate è un uomo.
Dunque Socrate è mortale.

Anche qui ci sono due premesse: "Tutti gli uomini sono mortali" e "Socrate è un uomo" e la conclusione "Socrate è mortale". Il ragionamento è corretto. Ciò significa che il fatto che Socrate sia mortale è vero, a condizione che siano vere le due premesse "Tutti gli uomini sono mortali" e "Socrate è un uomo". Che queste due premesse lo siano o no, non è questione che riguardi la

Logica, è materia di conoscenze, di fede o di opinioni. Anche se non fossero vere, non per questo il ragionamento cesserebbe di essere corretto.

I due esempi di sopra sono peraltro diversi per un aspetto importante. Riesaminiamo il primo. Esso ha questa struttura:

$$\frac{\begin{array}{l}A \Rightarrow B\\ A\end{array}}{B}$$

dove, nel nostro caso, A sta per "La benzina finisce" e B sta per "L'automobile si ferma". È la forma di questo ragionamento che garantisce della sua correttezza, ed infatti qualunque cosa noi sostituissimo ad A e a B non potremmo che accettare sempre la conclusione B a partire dalle due premesse $A \Rightarrow B$ e A. Una verifica di questa circostanza si può fare usando le tavole di verità. Per essere certi che B risulta vero ogni volta che A e $A \Rightarrow B$ sono veri, basta infatti costruire una tavola di verità per $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$ e verificare che si tratta di una tautologia.

Questo procedimento può essere utilizzato spesso per verificare se un ragionamento è corretto. Ma vale la pena di precisare che così facendo si sta sfruttando il Teorema di Deduzione; questa osservazione ha lo scopo di non perdere di vista il fatto, già richiamato sopra, che altra cosa è una deduzione e altra un'implicazione.

Gli esercizi seguenti sono adattati da [10]. Per ciascuno di essi si chiede di controllare la correttezza del ragionamento: (Le risposte sono in fondo)

C1. Quando Maria è infelice, cerca compagnia. Maria cerca compagnia. Dunque Maria è infelice.

C2. Se Tizio e Caio non si sono visti l'altra sera, allora o Caio è l'assassino, o Tizio mente. Se Caio non è l'assassino, allora Tizio e Caio non si sono visti l'altra sera e il delitto è stato commesso dopo mezzanotte. Ma se il delitto fu commesso dopo mezzanotte, Caio è l'assassino. Dunque l'assassino è Caio.

C3. Se gli investimenti sono costanti, la spesa pubblica aumenterà oppure cresce la disoccupazione. Ma se la spesa pubblica non aumenta, si possono ridurre le tasse. Se si riducono le tasse e gli investimenti restano costanti, la disoccupazione cresce. Dunque la spesa pubblica aumenterà.

Lo schema visto in precedenza $A \Rightarrow B$, A / B è noto sin dall'antichità con il nome di Modus Ponens, e viene usato continuamente nelle dimostrazioni in matematica. Ad esso si affianca almeno altrettanto spesso il Modus Tollens che consiste nello schema $A \Rightarrow B$, $\neg B$ / $\neg A$. Vi si può leggere il nucleo del ragionamento per assurdo: se dall'ipotesi A scaturisce una tesi B che è in contrasto con l'altra ipotesi già presente $\neg B$, allora dobbiamo rigettare l'ipotesi A.

E veniamo ora all'altro ragionamento, il sillogismo su Socrate. Qui le tre proposizioni in gioco sono tutte diverse e il tentativo di schematizzarle con delle lettere porterebbe a scrivere una forma di deduzione del tipo A, B / C. Ora è ben chiaro che una tale inferenza non è sempre valida, e che tutto dipende dal contenuto di A, B e C. Ecco che, malgrado il ragionamento specifico sia del tutto convincente, esso richiede una spiegazione logica meno semplice che nell'altro caso, e richiede in particolare che l'analisi delle proposizioni si spinga all'interno di ciascuna di esse. Siamo quindi nell'ambito del Calcolo dei Predicati.

Osserviamo dunque che la seconda premessa "Socrate è un uomo" ha la struttura *Un certo soggetto gode di una certa proprietà*. Questa è la struttura di una tipica proposizione atomica. Invece di parlare di proprietà si potrà anche parlare di *predicato*, e così nel nostro caso diremo che al soggetto Socrate si applica il predicato di essere un uomo. Se indichiamo con S Socrate e con U(x) la proprietà (o predicato) "x è un uomo", possiamo esprimere la nostra proposizione nella forma U(S). La prima premessa è più complessa: vi si afferma che ogni individuo che ha la proprietà di essere uomo ha anche quella di essere mortale. A parte la nuova proprietà (possiamo scrivere M(x) per esprimere che "x è mortale"), compare qui un *quantificatore* (tutti). La nostra proposizione "Tutti gli uomini sono mortali" si può esprimere, formalizzata, così: "$\forall x\ (U(x) \Rightarrow M(x))$". Infine la conclusione "Socrate è mortale" diventa M(S). Tutto il ragionamento si schematizza nel modo seguente:

$$\begin{array}{l} \forall x\ (U(x) \Rightarrow M(x)) \\ U(S) \\ \hline M(S) \end{array}$$

e a questo punto non è difficile accettare che la forma acquisita garantisce della sua correttezza. Infatti possiamo provare a dare a U, ad M e a S altri significati, anche strampalati, e ci accorgiamo che il ragionamento continua a "filare". Ad esempio se U significa essere un uccello, M significa essere medico ed S è il Gran Sasso, il nostro ragionamento diventa: "Ogni uccello è un medico. Il Gran Sasso è un uccello. Dunque il Gran Sasso è un medico". Se si ha fantasia e gusto per i paradossi, ci si può divertire.

Ma la forma data sopra non si può dire che sia semplice, né è semplice dominare il linguaggio formale del calcolo dei predicati. Vediamo allora come si può ritradurre tutto il ragionamento in termini di insiemi.

Prima di tutto, dato un insieme ambiente A, ogni predicato individua un particolare sottoinsieme di A. Nell'insieme N dei numeri naturali la proprietà di essere pari individua l'insieme P dei numeri pari, nell'insieme degli alunni di una scuola la proprietà di essere stati promossi in un certo anno individua un ben determinato sottoinsieme, e così via.

È vero anche il viceversa, nel senso che ogni sottoinsieme di un insieme dato si può pensare ottenuto da una proprietà. Ad esempio $\{1, 2, ..., 99\}$, sottoinsieme di N, può essere descritto come costituito dai numeri che si scrivono (in base dieci) con meno di tre cifre. Vale però la pena di osservare che mentre una proprietà individua un unico sottoinsieme, un sottoinsieme non individua un'unica proprietà, nel senso che uno stesso sottoinsieme può essere descritto altrettanto validamente in più modi diversi, come ben sappiamo dallo studio degli insiemi.

Tornando al nostro ragionamento. A partire dall'insieme (ambiente)M dei mortali e dalla proprietà di essere un uomo, otteniamo il sottoinsieme U di M costituito dagli uomini. Abbiamo poi un elemento S dell'insieme U e ne deduciamo che S appartiene ad M. Nel linguaggio più familiare degli insiemi il sillogismo di Socrate diventa:

$$\begin{array}{c} U \subseteq M \\ \underline{S \in U} \\ S \in M \end{array}$$

che è certamente uno schema facile da leggere e assolutamente convincente.

Il collegamento tra proposizioni e insiemi si spinge in verità molto più avanti. Mi limito qui ad un breve accenno. Prendiamo l'insieme N dei numeri naturali e le due proprietà "essere pari" e "avere meno di tre cifre". Esse individuano due sottoinsiemi P e A di N. Se colleghiamo le due proprietà con una congiunzione "essere pari *e* avere meno di tre cifre" otteniamo un'altra proprietà ed un altro sottoinsieme, che è la intersezione di P e A, ovvero l'insieme dei numeri pari minori di 100. Se invece consideriamo la proprietà "essere pari *o* avere meno di tre cifre" otteniamo l'unione di P e A. Se infine neghiamo una proprietà, ad esempio "*non* essere pari", (o, che è lo stesso, "essere dispari") otteniamo il complemento D = N-P. Dunque esiste una analogia tra le operazioni insiemistiche di intersezione, unione e complemento definite sui sottoinsiemi di un determinato insieme ambiente e i connettivi congiunzione, disgiunzione e negazione applicati alle proprietà relative a quell'insieme. Questa analogia permette di trasferire molte proprietà delle operazioni degli insiemi a proprietà dei connettivi e viceversa. Per fare un esempio, la proprietà commutativa dell'unione corrisponde al fatto, già notato sopra, che AvB e BvA sono proposizioni equivalenti. Spingendosi più oltre su questo terreno, qui solo a titolo informativo, segnaliamo che le due strutture che così si costruiscono (sottoinsiemi e proposizioni con le relative *operazioni*) risultano tra loro isomorfe e costituiscono due esempi di quella che viene chiamata un'algebra di Boole.

§5. L'IMPORTANZA DEL LINGUAGGIO.

Quando a scuola alcuni anni fa - qualche volta si fa ancora - veniva sviluppata con cura nell'ora di italiano (o di latino) l'analisi logica, quello era un momento importante nel quale si prestava attenzione alla struttura (morfologia e fisiologia) del linguaggio. Forse una vecchia impostazione aveva il torto di apparire troppo rigida nelle norme e non sarebbe proponibile per la maggioranza dei nostri studenti ma al più solo per una ristretta èlite. Ma, a dispetto di queste difficoltà, la necessità di un'attenzione non episodica alle regole che governano un linguaggio oggi si impone se è possibile con più urgenza di prima, se non altro per l'importanza sempre più grande che hanno assunto i linguaggi artificiali. Inoltre questo campo sempre più sta diventando di pertinenza del matematico invece che del linguista o del filosofo.

Il processo a cui sto accennando non nasce ora: la logica, da secoli e secoli dominio della filosofia, è diventata sempre più nel nostro tempo (se vogliamo una data d'inizio, possiamo prendere il 1854, anno della pubblicazione dell'opera di George Boole *Indagine sulle leggi del pensiero*) parte della matematica o almeno assimilata nei metodi alla matematica; di linguaggi artificiali si parla almeno dagli anni Venti, in vari contesti, soprattutto di informatica; inoltre gli studi sulla lingua naturale sempre più vengono condotti con metodo scientifico o matematico (si pensi a Chomski e alle sue grammatiche, per fare un solo nome).

Questa situazione offre ampio spazio per attività sperimentali e interdisciplinari (con l'insegnante di lettere e non solo), visto che la conoscenza del linguaggio è un fatto trasversale rispetto a tutte le materie scolastiche (e forse sarebbe tempo per una revisione delle tradizionali suddivisioni disciplinari).

Ma da matematici impariamo intanto a riflettere - noi, prima che gli studenti - su quella particolare lingua che usiamo nel fare matematica: per metterne in risalto caratteri generali, analogie e differenze con la lingua comune, difficoltà e insidie. Molto è stato detto in proposito, anche in relazione a quest'ultimo punto e a quanto queste difficoltà possano costituire un ostacolo per l'apprendimento della matematica. Vedi tra le altre cose il gustoso accenno al *matematichese* che ricorre spesso in articoli di B. D'Amore. E un vasto dibattito è in corso in merito al grado di formalizzazione che è opportuno sia presente nell'insegnamento della matematica ad ogni livello della scuola.

Una raccomandazione che farei a tutti gli insegnanti è quella di non considerare mai le formule che si adoperano in matematica (penso soprattutto all'aritmetica e all'algebra, ma anche alle loro applicazioni alla geometria; penso alle procedure per il calcolo di un'espressione o per la risoluzione di un'equazione; ma penso anche alle formule in cui si usano nozioni insiemistiche e logiche); non pensare ad esse come a cose diverse da frasi della lingua italiana. Anche le istruzioni di un linguaggio di programmazione vanno lette sempre conservando un controllo della sintassi italiana.

Gli studenti alla fine della scuola superiore non capiranno la definizione di limite "$\lim_{n\to\infty} a_n = l$" (per ogni numero reale positivo ε, esiste un indice ν appartenente ad N, tale che il valore assoluto della differenza $a_n - l$ è minore di ε per ogni numero n maggiore di ν), oppure la capiranno solo quei pochissimi con capacità molto al di sopra della media, se non hanno imparato per gradi, con pazienza, con metodo, a coordinare le formule con la lingua italiana, a conoscerne le varie parti e a riconoscere i ruoli di queste.

O anche, per trattare bene un'equazione, capire che bisogna chiedersi se esistono numeri che messi al posto della x rendono l'uguaglianza vera e poi trovarli; capire perché un'equazione prodotto si risolve come si risolve, perché un sistema è cosa diversa da un'equazione prodotto, e così via - argomenti, certo, più delle scuole superiori che della scuola media, - ecco, per una buona comprensione di queste nozioni e di queste procedure, si richiede che molto tempo prima si acquisti una buona padronanza del linguaggio.

Prendiamo dunque una semplice espressione: 5+3=8. Ci sono due modi, entrambi legittimi, per "leggere" questa espressione.

C'è un primo modo che definirei "operativo". Già 5+3 può essere letto come una prescrizione, un comando di qualcosa che deve essere eseguito, e 5+3=8 è, come dire, la registrazione dell'esecuzione di quel comando. A ben riflettere, il segno di uguale denota qui una relazione *non* simmetrica, nel senso che 8 è il risultato della somma di 5 e 3, ma non si può certo dire che 5+3 sia il risultato di 8. Secondo me, per inciso, è questo il motivo per il quale tanti studenti stentano a imparare ad eseguire la scomposizione in fattori nel biennio superiore, proprio perché improvvisamente indotti ad eseguire "alla rovescia" delle operazioni finora risolte nel verso "giusto".

Questo modo di leggere "5+3=8" è la manifestazione di una visione della matematica, come dicevo, "operativa" o anche "strumentale" rispetto ad altre scienze. Se si impostano così le cose, gli studenti porranno domande del tipo "Come si fa?" piuttosto che "Che cosa è?" ovvero "Perché è vero questo?"

E c'è un secondo modo, di tipo logico, di leggere 5+3=8. Vi si può riconoscere una proposizione in cui il predicato = è applicato ai due soggetti 5+3 ed 8. Di questi, mentre il secondo è un "nome" semplice del numero otto, il primo 5+3 è un nome composto, cioè un modo per denotare un oggetto facendo riferimento ad una sua proprietà. Anche nella lingua comune si può dire "Dante Alighieri" (nome semplice) ovvero "l'autore della Divina Commedia" (nome composto), "la nave" (nome semplice) ovvero "il mezzo di trasporto che solca le acque del mare e degli oceani" (nome composto), e così via.

Chi sceglie di leggere in questo modo 5+3=8, lo fa in base ad una concezione della matematica come scienza, fatta, come tutte le scienze, di oggetti di studio, di loro proprietà, di conoscenze, di linguaggio appropriato per descrivere queste conoscenze.

Queste due visioni complementari della matematica sono entrambe presenti nella scuola. La mia opinione personale è che il primo modo è troppo pervasivo, soprattutto nell'aritmetica e nell'algebra, mentre al più alla geometria è riservato il ruolo di parte discorsiva e argomentata della matematica. Non credo sia un bene; sicuramente non è in questa direzione che si muovono i programmi in questi anni. E ci sono delle ragioni. In primo luogo si può osservare che le abilità di calcolo ed esecutive sono sempre più delegate alle macchine. Poi c'è l'informatica, che richiede per propri fini elementi di logica e quindi sollecita l'acquisizione di tali elementi nella scuola. E c'è infine una spinta più profonda della intera società a fornire ai ragazzi capacità critiche e interpretative e abilità dialettiche per affrontare un mondo che non si riesce più a prevedere di quali competenze specifiche avrà bisogno nei prossimi anni e decenni. Occorre preparare persone in grado di passare con una certa facilità da un lavoro ad un altro e di acquisire conoscenze nuove e diverse da quelle iniziali. Per ottenere questo scopo, più che conoscenze specifiche occorre una mentalità critica. E la matematica può meglio contribuire a rispondere a questa esigenza se la si concepisce come ragionamento.

§6. PREDICATI E QUANTIFICATORI.

Prendiamo una "frase" come 3(a+b)=9a+9b. Attenzione, ho scritto di proposito una cosa che non è riconoscibile né come una classica formula (così com'è sarebbe falsa!) né come un'equazione (non fosse altro perché le prime lettere dell'alfabeto non siamo abituati a prenderle come incognite, e poi ce ne sono due) e nemmeno come una di quelle formule della Geometria o della Fisica che legano fra loro quantità diverse. L'ho fatto apposta, per poter discutere dell'uguaglianza in quanto tale, e del ruolo delle varie parti del discorso. In altre parole, per sviluppare il discorso esclusivamente sul piano sintattico.

Approfittiamo allora per sottolineare questi due aspetti complementari nello studio dei linguaggi, aspetti che la logica ha avuto il merito di mettere in chiaro e di distinguere con precisione, la *sintassi* e la *semantica*. Schematicamente si può dire che la sintassi si occupa delle regole di formazione delle parole, delle frasi e in generale delle parti costituenti del linguaggio, e la semantica della corrispondenza tra linguaggio e oggetti a cui il linguaggio si riferisce (mondo reale), ovvero del *significato*. La distinzione è di particolare importanza nelle applicazioni della logica all'informatica, perché in un linguaggio che serve per comunicare con un computer si fa riferimento solo alla sintassi per riconoscere una determinata espressione linguistica (ed è per questo fra l'altro che la sintassi di un linguaggio formale ha caratteri esasperati di precisione).

Nella nostra frase "3(a+b)=9a+9b", come si fa con l'analisi logica nella lezione di italiano, cerchiamo prima di tutto il verbo: esso è contenuto nel simbolo di uguaglianza. Poi cerchiamo il soggetto: e qui notiamo una differenza di rilievo con la impostazione tradizionale della analisi logica, dove si evidenziano come parti fondamentali di una frase soggetto, predicato e complementi. Seguendo tale procedura, potremmo dire che nella nostra proposizione il soggetto (indistinto per il momento: provvederemo poi a differenziarne le parti) è "3(a+b)", che il predicato è "è uguale" e che la restante parte può essere descritta come il complemento (di paragone?) "a 9a+9b". Invece la descrizione che si preferisce in logica matematica parte dalla domanda «a quanti argomenti si applica il predicato "essere uguale"?»; poiché la risposta è evidentemente "due" non parleremo di complementi (non esiste questo concetto nella logica matematica) ma diremo semplicemente che 3(a+b) e 9a+9b sono i due soggetti (meglio i due argomenti) a cui è applicato il predicato "essere uguale" e distingueremo il primo dal secondo argomento.

N.B. E' necessario distinguere sempre il primo dal secondo argomento perché in generale i due hanno ruoli diversi: basti pensare alla proposizione 3<4 dove ai due argomenti 3 e 4 è applicato il predicato "essere minore". Se talora accade (come nel caso dell'uguaglianza) che i due argomenti si possono scambiare, ciò deve essere visto come una particolare proprietà (relativa alla semantica!) di quel predicato e non come una buona ragione per confondere ciò che sta prima con ciò che sta dopo.

Passiamo ad esaminare gli argomenti: 3(a+b) è quello che si chiama un *termine*. Con questa parola si intende un complesso linguistico atto a denotare un individuo. Il termine è l'equivalente di un nome, o meglio di un "sintagma nominale" per dirla con una locuzione usata dai linguisti. Se volessimo esplicitarlo a parole (ed è questo un esercizio assai utile) potremmo dire ad esempio "il prodotto di 3 per la somma di a e di b" e ci accorgiamo allora che si tratta di un nome composto all'interno del quale sono rintracciabili nomi semplici, come 3, a e b (sono quelle che vengono chiamate costanti e variabili rispettivamente: 3 è una costante, a e b sono variabili), e simboli di operazioni o più in generale di funzioni che permettono di associare ad uno o più individui altri ottenuti da essi. Nel nostro caso a partire da a e da b si ottiene a+b, la somma di a e di b. Ci accorgiamo dunque che il segno + interposto tra due termini ne produce un terzo, composto. Ma ancora tra il termine (semplice) 3 e quello (composto) a+b si frappone un nuovo simbolo, quello di prodotto, e ciò consente di ottenere il termine finale 3(a+b).

L'analisi è completa, solo resta da osservare che si fa uso di alcuni accorgimenti per permettere una migliore "lettura" del processo: tra questi accorgimenti troviamo le parentesi (servono a capire quale aggregazione avviene prima e quale dopo) o l'uso di sottintendere il simbolo di prodotto. Per evidenziare questa ricostruzione sono molto efficaci gli alberi di formazione. Nella Fig. 5 è rappresentato l'albero di formazione del termine 3(a+b), mentre un'analoga analisi per l'altro termine 9a+9b conduce all'albero rappresentato nella Fig. 6.

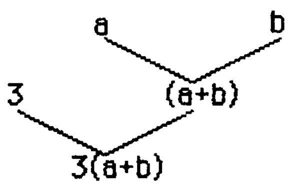


Figura 5

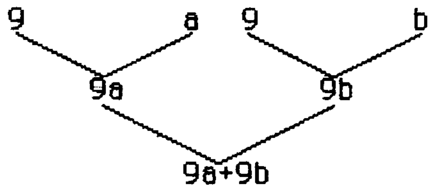


Figura 6

Negli esempi esaminati sono presenti operazioni "a due posti" come addizione e moltiplicazione, o come sarebbero ad esempio l'unione e l'intersezione tra insiemi, ma nulla impedisce di considerare funzioni a un argomento, o anche a più di due. Se trascuriamo quest'ultimo caso, che in una trattazione completa va considerato e che si rivela essere del tutto analogo agli altri, ma che è di impiego piuttosto raro, per funzioni ad un argomento troviamo invece numerosi esempi di uso comune. In tali casi, invece che porre il simbolo dell'operazione *tra* i due argomenti, si adotterà la notazione delle funzioni o anche una semplice giustapposizione: è il caso di -x per denotare l'opposto del numero x oppure di $\complement A$ per il complemento dell'insieme A o, per uscire dai simboli della algebra e provare a simbolizzare situazioni diverse, è il caso di p(T) che potremmo usare per denotare il padre di T o tel(Z) per il numero telefonico di Z, e così via. Quest'uso dei simboli funzionali per costruire termini composti trova spesso un corrispettivo in quello che in analisi logica è noto come complemento di specificazione.

E veniamo al problema dei quantificatori. Non fanno parte del programma della scuola media e gli dedichiamo quindi solo un accenno. Sono due, come è noto, nel linguaggio matematico, il quantificatore universale $\forall$ e quello esistenziale $\exists$. Più che sui formalismi, mi sembra però utile puntare su due obiettivi: scovare i quantificatori che si usano nel linguaggio naturale e in quello matematico e addestrarsi a combinarli con la negazione.

Nel linguaggio comune per denotare individui, oggetti, soggetti, si usano svariate combinazioni di parti grammaticali: nomi propri, nomi comuni eventualmente corredati di articoli e aggettivi, pronomi, combinazioni di questi. La distinzione più importante in logica è invece tra denotazioni di individui ben specifici o di individui generici. Ad esempio è cosa molto diversa dire "Il triangolo ABC è ottusangolo", dal dire "In un triangolo ABC la somma degli angoli interni è 180° gradi". Da un punto di vista linguistico la differenza sta tutta nell'articolo "il" nel primo caso, "un" nel secondo. È importante allora capire il ruolo che in una frase italiana hanno gli articoli indeterminativi e i pronomi indefiniti. Varrebbe la pena che ad un uso corretto e consapevole di queste paroline l'insegnante (di italiano?) dedicasse molta attenzione.

Consideriamo le tre frasi: "Un bambino ha bisogno di amore", "Un bambino deve venire avanti", "Un bambino gioca a palla". Fermo restando che ogni frase della lingua italiana si presta in generale ad avere più significati in dipendenza del contesto in cui essa viene a trovarsi, è probabile che nei tre casi precedenti ci si trovi d'accordo nel ritenere che l'uso dello stesso articolo indeterminativo "un" abbia significati diversi. Nel primo caso l'interpretazione più naturale è che *tutti* i bambini hanno bisogno di amore, nel secondo che c'è un bambino (uno almeno) che deve farsi avanti, mentre nel terzo caso siamo in presenza di una dipendenza decisa dal contesto.

Altro esempio: "Un rettangolo è un parallelogrammo" e "Un rettangolo è disegnato alla lavagna". Nel primo caso abbiamo un quantificatore universale, nel secondo esistenziale. Più che svolgere esplicitamente esercizi di questa natura, il mio suggerimento al riguardo è di approfittare delle occasioni che spontaneamente si presentano nelle ore di matematica per mettere a fuoco il senso preciso delle varie affermazioni.

E provare anche a non confondersi con la negazione. Ad esempio se per negare le due proposizioni precedenti dicessimo, in modo meccanico, "Un rettangolo non è un parallelogrammo" e "Un rettangolo non è disegnato alla lavagna", è probabile che perdiamo il controllo su quello che effettivamente vogliamo dire. Se dicessimo, per la prima, più accuratamente "Nessun rettangolo è un parallelogramma", staremmo sbagliando a formare la negazione. La negazione corretta è: "Esiste un rettangolo che non è un parallelogramma". Fermiamoci qui, si potrebbero allineare altri esempi ma sarebbe peraltro difficile aggiungere qualcosa di significativo a meno di non rendere troppo complesso o formale il discorso. Resta un invito a ciascuno a riflettere da solo su questi aspetti della lingua in tutte le possibili occasioni.

§7. DIMOSTRAZIONI E ALTRE PROPOSTE.

Proposte di attività da svolgere in classe sono sparse qua e là nei precedenti paragrafi. In questo ultimo forniremo qualche altro suggerimento. Ma prima, discutiamo brevemente intorno ad una questione alquanto spinosa: «È opportuno o no dimostrare nella scuola media? Se sì, quanto e che cosa?»

Osserviamo che la scuola media è fase di passaggio tra la scuola elementare in cui la matematica si basa sulla esperienza e sull'osservazione guidata delle proprietà (delle figure, dei numeri, e così via), e la scuola superiore in cui, seppure con diversa accentuazione a seconda del tipo di scuola e a seconda dei punti di vista, si cerca di dare un'impostazione della matematica come di un sistema ipotetico-deduttivo. Tipica al riguardo è la presentazione della geometria, più o meno fedele all'impianto che già Euclide le diede più di duemila anni or sono. Ora, mentre nella scuola superiore si discute su quanta accentuazione debba essere data a questa presentazione della matematica, nella scuola dell'obbligo la presenza della logica, così significativa nell'ambito dei nuovi programmi di matematica, suggerisce di privilegiare una concezione della matematica come ragionamento a scapito di una sua visione come abilità di calcolo. Abbiamo già riflettuto su questo punto.

E allora, il metodo dimostrativo deve essere tenuto presente come obiettivo da acquisire; sarebbe monca e inadeguata ai suoi obiettivi una conoscenza della matematica senza questa caratteristica. Senonché in questa fase, non è tanto importante l'impianto generale dei vari teoremi e dei loro collegamenti, e meno ancora la ricerca dei presupposti primitivi da cui partire. Addirittura potrebbe rivelarsi pericoloso imporre delle dimostrazioni di fatti intuitivi e magari chiedere agli studenti di ripeterle a memoria o quasi.

Il problema è che non è affatto facile capire in profondità una dimostrazione, capirne i vari passaggi e soprattutto capire le ragioni dei passaggi e la opportunità o necessità degli stessi. E' difficile questa attività per gli stessi studenti di matematica, per gli stessi addetti ai lavori, figuriamoci per dei ragazzi alle prime armi. E tuttavia a mio avviso è in questa direzione che bisogna andare, spendendo tutto il tempo che occorre. Meglio, molto meglio stare su una stessa dimostrazione per intere settimane e limitarsi solo ad una, che studiarne una sfilza in poco tempo.

E, se è possibile, con una dimostrazione si può giocare. Giocare a farla e a disfarla, a decomporla in pezzi e a ricomporla come un puzzle. Vedi al riguardo, la sperimentazione proposta in [9], dove si ricostruisce una dimostrazione data per frasi staccate come si fa con quei giochi di ordinamento di sequenze di immagini. Vedi la possibilità di cercare l'errore (magari a gara) in una dimostrazione sbagliata (ve ne sono tante, dai paradossi dell'induzione alle decomposizioni errate di uno stesso rettangolo eseguite su carta quadrettata; o anche a dimostrazioni sbagliate su cui ci si imbatte per caso). Vedi la possibilità di chiamare dimostrazioni le cose più varie: la strategia vincente di un gioco, l'analisi di un percorso stradale, la ricerca dell'assassino in una storia poliziesca. Soprattutto quest'ultima attività (cfr. ad esempio [11]) può costituire una situazione stimolante, fra l'altro per capire che cosa significa argomentare "per capire" e "per convincere".

Si può anche procedere alla scoperta o all'intuizione di una proprietà (il computer può avere un ruolo in tal senso, specialmente con l'impiego dei software didattici specifici), e poi tentare, come consegna da eseguire in gruppo o nell'intera classe, di pervenire a una dimostrazione. Si può ancora provare a tradurre dimostrazioni astratte in dimostrazioni "concrete", facendo uso di metafore e analogie, o viceversa ricavare una dimostrazione formale a partire da una argomentazione informale o da un disegno. Interessanti proposte sono ad esempio in [5]. Si può lavorare a giochi di intelligenza di tipo enigmistico, come se ne trovano nelle riviste apposite, e si possono fare dimostrazioni usando giochi alla Smullyan o ragionando sui paradossi matematici, per esempio quelli sull'infinito (vedi ad esempio [8]).

Altre proposte di lavoro per attività nella scuola di tipo logico sono contenute in [15], dove fra l'altro viene presentata nei particolari una esperienza nella quale si fa uso delle parole crociate e si sfrutta la capacità di fornire "definizioni" di vario genere, per arrivare a impadronirsi della nozione di *definizione* che è un po' l'altro pilastro, insieme alla nozione di dimostrazione, sul quale si regge la conoscenza matematica. Anche prezioso al riguardo è l'uso che si può fare del vocabolario, ed utilizzabili per attività di classe sono anche molti giochi di parole (per esempio, gli anagrammi). Per un'ampia rassegna di questi ultimi, vedi [7].

Per gli esercizi che hanno a che fare più direttamente con la Logica matematica, abbiamo visto i giochi dei cavalieri e furfanti, ma una vera miniera di indovinelli sono i libri di R. Smullyan [12], [13]. Oltre ad essi segnalo soltanto ancora [2], ma di fonti a cui attingere se ne trovano abbondanti. Probabilmente è preferibile lavorare prima con queste situazioni, come dire, artificiali, cioè con storie di fantasia; ma non sarebbe male approfittare anche degli spunti che la vita quotidiana, sia a scuola che fuori, ci offre di continuo, per affinare abilità di tipo logico. Ogni occasione è buona per provare ad analizzare la correttezza di ragionamenti (letture dai giornali, dai libri, dai manuali scolastici, temi e altri scritti degli studenti, linguaggio parlato). Ma s'intende che per fare questo occorre da parte dell'insegnante una sicura padronanza della materia e una capacità di gestire con sapienza la discussione nella classe.

Attività preziose sono infine quelle relative al linguaggio. Si possono fare confronti tra lingua formale e lingua italiana ed esercizi di passaggio dall'una all'altra, come tradurre una formula matematica in parole e viceversa. Ad esempio scrivere in formula "il doppio del quadrato di due quinti è minore di uno" oppure all'opposto, rendere a parole "$3+2xy > (x-7)^2$". Eventualmente si possono fornire a queste domande risposte multiple fra cui scegliere. Ma si possono fare anche attività meno comuni, più stimolanti, e soprattutto suscettibili di vari approfondimenti, sulla base di quanto visto sopra.

Ad esempio, si può proporre l'analisi logica di una "frase" come "$3x+4 = 2$". Intervengono conoscenze di due materie diverse, italiano e matematica, ed è sorprendente rendersi conto che concetti studiati all'interno di una materia possono applicarsi ad un'altra anche molto diversa; inoltre può essere la via per riconoscere che in matematica si ha a che fare sempre con affermazioni di senso compiuto anche quando si usano formule (è la visione della matematica come scienza e non come strumento).

Si può poi approfittare di queste attività per approfondire altri aspetti. Ad esempio fare una puntata nella storia della matematica, per capire quando sono entrate in uso le attuali forme del linguaggio matematico. Oppure rivedere questioni matematiche elementari, ma delle quali gli studenti hanno scarsa padronanza, sulla base di criteri linguistici. Esempi al riguardo sono riportati in [15].

Bibliografia

N.B.: I concetti basilari della logica si possono trovare in molti testi. Qui ci limitiamo a segnalare un manuale universitario molto diffuso e tuttora valido [10], un volume a carattere generale contenente anche discussioni storico-filosofiche [1], un testo pensato per linguisti e come tale molto discorsivo e accessibile [3] e tre testi destinati specificamente agli insegnanti, [6], [16] e [19].

[1] E. AGAZZI - La Logica Simbolica - La Scuola, Brescia, 1990.

[2] F. AGOSTINI - Le stravaganze della logica - Mondadori, Milano, 1992

[3] J. ALLWOOD, L.-G. ANDERSSON, Ö. DAHL - Logica e linguistica - Il Mulino, Bologna, 1981.

[4] C. BERNARDI - La logica nella scuola secondaria - *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 16 (1993), 1041-1060

[5] C. BERNARDI - Intuizione, percezione, dimostrazione nel ragionamento matematico - in *Cento Anni di Matematica*, atti del Convegno "Mathesis Centenario 1895-1995" - Palombi, Roma, 1996, 110-116.

[6] M. L. CALDELLI - La matematica del certo - Cappelli, Bologna, 1986.

[7] G. DOSSENA - Dizionario dei giochi con le parole - Garzanti-Vallardi, Milano, 1994.

[8] L. LOMBARDO RADICE. - L'infinito - Editori Riuniti, Roma, 1981.

[9] N. A. MALARA - L'insegnamento della geometria nella scuola media: questioni teoriche e didattico-metodologiche - in *L'insegnamento della Geometria*, Seminario di formazione per docenti MPI-UMI, Lucca, 1995-96, 13-76.

[10] E. MENDELSON - Introduzione alla Logica Matematica - Boringhieri, Torino, 1972.

[11] G. NAVARRA - Itinerari attraverso la logica per il potenziamento delle capacità linguistiche e argomentative - *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 16 (1993), 731-756

[12] R. SMULLYAN - Qual è il titolo di questo libro? L'enigma di Dracula ed altri indovinelli logici - Zanichelli, Bologna, 1981.

[13] R. SMULLYAN - Donna o tigre? - Zanichelli, Bologna, 1982.

[14] G. SPIRITO - Matematica senza numeri - Tascabili Economici Newton, Roma, 1995.

[15] R. TORTORA - Matematica, linguaggio e gioco: un'esperienza interdisciplinare - in *Cento Anni di Matematica*, atti del Convegno "Mathesis Centenario 1895-1995" - Palombi, Roma, 1996, 417-425.

[16] T. VARGA - Fondamenti di logica per insegnanti - Boringhieri, Torino, 1973.

[17] P. VIGHI - Attività logiche: come, quando, perché - in *Insegnare ad apprendere la matematica in aula: situazioni e prospettive* (a cura di B.D'amore), Pitagora, Bologna, 1995, pag. 69-75.

[18] AA.VV. - Atti degli incontri di Logica Matematica, vol. 5: La Logica Matematica nella Didattica, Roma, 1988. - Dip. di Matematica, Università di Siena.

[19] AA.VV. - Introduzione alla Logica - Editori Riuniti, Roma, 1976.

Risposte ai problemi nel testo

A1. A è un cavaliere, B è un furfante.
A2. A è un furfante, B un cavaliere.
A3. B è un cavaliere. Di A non si può dire nulla.
A4. La situazione non è possibile.
A5. A è un cavaliere, B è un furfante.
A6. A furfante, B cavaliere, C furfante.
A7. A è un furfante e C un cavaliere. B può essere sia un furfante che un cavaliere.

N.B. Il problema A4 è un trabocchetto: a scuola servirebbe a dare vivacità. I problemi A3 e A7 non hanno risposta unica e si possono usare per indurre gli studenti a non fermarsi alla prima soluzione e cercarne altre: in generale è utile abituarsi a pensare che un problema non deve per forza avere una sola soluzione.

B1. A è un furfante.
B2. A è un furfante.
B3. A e B sono entrambi cavalieri.
B4. A e B sono entrambi furfanti.
B5. A è un furfante, B un furfante e C un cavaliere.

C1. Non corretto
C2. Corretto.
C3. Non corretto.

INFORMATICA E STRUMENTI INFORMATICI

Paolo Boieri
Dipartimento di Matematica - Politecnico di Torino

1. Introduzione

Bisogna iniziare con una premessa a chiarimento dei termini utilizzati e degli scopi del nostro discorso, per evitare una confusione sia sull'oggetto stesso che si vuole trattare sia sui limiti da imporre alla trattazione per evitare una eccessiva genericità.
Con la parole *informatica* intendiamo tutti quei concetti che sono riconosciuti dalla grande maggioranza degli studiosi come parte della "computer science", quali la codifica dell'informazione, la struttura e la rappresentazione dei dati, la natura e l'implementazione degli algoritmi e così via: in modo informale, possiamo dire che si tratta del contenuto di testi di riferimento come (Aho-Ullmann 1984) e (Wirth 1976).
Con il termine *strumento informatico* vogliamo invece indicare qualcosa di meno definito: tutto l'insieme degli utilizzi che il calcolatore ha nella vita quotidiana e delle abilità che sono connesse con questi utilizzi, da quella "di livello zero" di accendere il computer e far partire il programma desiderato a quella, ad esempio, di interpretare i più arcani messaggi di errore del sistema operativo e operare in base ad essi.
Questo utilizzo dello strumento informatico è sempre più diffuso e varia in modo considerevole da un individuo all'altro; può entrare nella vita professionale di un impiegato (che usa per parecchie ore al giorno il calcolatore ma facendo girare un unico programma), nella vita di un hobbista (che invece utilizza decine di pacchetti e rincorre sempre l'ultima novità e l'ultima release) e anche in quella di un ragazzo della scuola media (che magari usa il computer solamente per i videogiochi o per vedere qualche CD, ma che è molto curioso del funzionamento della macchina).
La questione fondamentale per noi è: quale ruolo devono avere queste conoscenze (informatica e strumento informatico) nella scuola media?
A differenza di quanto avviene per le elementari e per le superiori, non abbiamo la traccia dei programmi ministeriali, in quanto nei programmi vigenti, che sono stati redatti prima dell'era dell'informatica "di massa", non è prevista alcuna trattazione specifica di questi temi.
D'altra parte il crescente interesse per tutto ciò che riguarda il computer rende abbastanza antistorico non fare entrare il computer in classe. Si tratta quindi di stabilire quali possano essere i contenuti da trasmettere da parte dell'insegnante di Matematica, nel triennio della scuola media, tenuto conto di quello che è già stato fatto (se è stato veramente fatto...) alle elementari e di quanto è previsto nelle superiori.

Distinguiamo a questo punto tre piani diversi di intervento del docente (in tutto quello che segue sono riportate le opinioni personali di chi scrive; non lo ripeto a ogni riga, ma si tenga presente che quelle che seguono sono sempre e solamente delle proposte):

a) Strumento informatico di tipo generale e "pervasivo"
Le abilità minime da trasmettere sono la conoscenza "fisica" del computer (per molti ragazzi, ma non per tutti, già acquisita a casa con l'esperienza ludica) e di almeno di un programma di trattamento testi; a questo si può aggiungere un software di disegno (molto gradito in genere ai ragazzi) facile da usare.
L'interesse per la multimedialità è in costante crescita e molti insegnanti fanno realizzare dai ragazzi piccole applicazioni multimediali; in questo caso la conoscenza dello strumento informatico deve essere ampliata con programmi di trattamento di suoni, immagini e filmati e di un pacchetto per la costruzione di ipertesti.
La presentazione di questi strumenti informatici, così come la fruizione del prodotto che viene elaborato, non è necessariamente legato all'insegnante di matematica e non fa parte della sua professionalità specifica; anche docenti di altre materie, purché dotati realmente delle necessarie conoscenze, possono trattare questi temi.

b) Informatica come disciplina a sé stante
L'analisi di questo aspetto è molto più problematica e ad essa sarà dedicata la maggior parte di questo articolo.
Lo studio dell'Informatica nella scuola media è stato a volte visto come coincidente con l'apprendimento di un linguaggio di programmazione o comunque come finalizzato principalmente ad esso; il linguaggio comunemente utilizzato è il BASIC.[1]
Questa identificazione tra Informatica e linguaggio di programmazione, dopo un periodo di generale accettazione, è ora oggetto di riflessioni critiche e di ripensamenti.
Lo stesso è accaduto al ben noto programma Logo, che dopo aver conosciuto un grande successo e diffusione, ora è in parte (e ingiustamente) trascurato; per una analisi dell'uso di Logo si veda, tra gli altri, (Pellegrino e Malara, 1991) e la relativa bibliografia.

[1] Sull'apprendimento della programmazione come "apprendistato cognitivo" si veda (Arzarello et al. 1993), mentre per un approfondito studio dei problemi che si presentano nella introduzione di un linguaggio di programmazione (il BASIC in questo caso) nella scuola media si vedano (Reggiani 1994) e (Reggiani e Vercesi 1993) e le relative bibliografie.

Logo è un ambiente completo, con un linguaggio di programmazione molto evoluto e può essere l'indiscusso protagonista del laboratorio di Informatica nella scuola media. La limitazione di Logo, che può essere la causa dell'abbandono da parte di molti insegnanti, sta forse nella sua limitata gamma di applicazioni (questa limitazione non è intrinseca a Logo, ma alle capacità di programmazione che si possono ragionevolmente pretendere da un ragazzo della scuola media).

c) Strumenti informatici per la Matematica

Negli ultimi sono stati sviluppati ambienti informatici che sono pensati come micromondi per lo studio di un particolare settore della matematica e non come ambienti di programmazione.

Tra questi un programma che sta suscitando molto interesse è Cabri-géomètre, un "quaderno interattivo" per lo studio della geometria euclidea; Cabri ha come primitive gli oggetti di base della geometria euclidea, come punti, rette, segmenti e circonferenze e consente di realizzare delle costruzioni a partire da esse. Alcune costruzioni sono disponibile nel menu (ad esempio, asse di un segmento, retta parallela, bisettrice di un angolo), altre possono essere definite dall'utente, salvate in una macro-costruzione e poi riutilizzate.

Le figure generate da Cabri possono essere sottoposte a deformazione dinamica: spostando con il mouse un punto di base, l'intera costruzione viene riaggiornata, mantenendo valide le relazioni tra gli oggetti. Si può in questo modo verificare la validità di una costruzione effettuata, scoprire proprietà nuove, verificare congetture.[2]

Le considerazioni che emergono dai punti precedenti sono molte e non possono essere sviluppate compiutamente nello spazio a disposizione. Nel seguito ci concentriamo su uno degli aspetti, che è quello della introduzione di alcune idee di base dell'Informatica.

In questa presentazione si vuole proporre un nuovo approccio all'Informatica nella scuola media, indipendente dalla conoscenza di un linguaggio di programmazione (ma propedeutico alla sua presentazione, da fare nella scuola superiore) e basato sull'utilizzo di un ambiente informatico: il foglio elettronico.

Questa scelta è motivata da alcune considerazioni:

1. il foglio elettronico è uno strumento ampiamente utilizzato nel mondo del lavoro, per applicazioni gestionali e contabili; la sua conoscenza è utile anche per chi, al termine della scuola media, non prosegue gli studi;

[2] Alla presentazione delle principali caratteristiche di Cabri sono state dedicate durante il corso di Lucca 1997 due sedute di laboratorio. In queste note non illustriamo le caratteristiche di Cabri, rimandando chi fosse interessato alle indicazioni bibliografiche in fondo a questo articolo.

2. è un ambiente informatico completo in cui si possono studiare molti problemi sulla struttura dei dati (ad esempio, i dati di tipo numerico) e sugli algoritmi, come si vedrà nel seguito;
3. è un ambiente aperto che permette estensioni di grande portata delle sue potenzialità (si pensi alla possibilità di scrivere macro in Visual Basic);
4. nonostante la sua potenza, non necessita di essere affrontato "tutto e subito", ma può essere introdotto molto gradualmente: nel seguito non faremo ricorso che a una piccola parte delle sue potenzialità e, di riflesso, non avremo bisogno di conoscere le caratteristiche delle centinaia di funzioni che prevede;
5. il foglio elettronico si presta molto bene allo studio di importanti aspetti della matematica, quali le successioni definite per ricorrenza e allo studio della statistica; ha inoltre una grafica efficace e relativamente semplice da utilizzare.

Nel paragrafo 2 vediamo alcuni aspetti di base della struttura e dell'uso del foglio elettronico, mentre nel paragrafo 3 vengono presi in considerazione alcuni algoritmi e la loro implementazione "semi-automatica" sul foglio.

2. L'ambiente del foglio elettronico

Il foglio elettronico è stato ideato come uno strumento per applicazioni di tipo contabile e gestionale, ma possiede numerose caratteristiche che lo rendono adatto per un utilizzo di tipo più generale. Come tutti i programmi applicativi che hanno avuto una vasta diffusione sul mercato, i fogli elettronici si sono potenziati con il passare del tempo a partire dai semplici prodotti disponibili a metà degli anni '80 fino alle attuali versioni, che possiedono centinaia di funzioni e la possibilità di programmazione interna al pacchetto stesso.
Il nostro scopo non è quello di esplorare tutte queste potenzialità; anzi vogliamo *limitare al massimo* le funzioni e le potenzialità sfruttate, in modo da rendere il foglio uno strumento di facile apprendimento anche per uno studente della scuola media.
I principi generali su cui si basa la struttura di un foglio elettronico sono comuni a tutti i programmi di questo tipo e gli esempi riportati possono adattati a ognuno di essi, variando alcuni dettagli, come la sintassi dei comandi. Nel seguito facciamo riferimento al foglio più diffuso, Excel della Microsoft.

Un foglio elettronico è una matrice di celle, ognuna delle quali è identificata da un indirizzo costituito dal riferimento alla colonna (una singola lettera dell'alfabeto per le prime colonne, una coppia di lettere come AA, AB, ... per le colonne seguenti) e da un riferimento alla riga (un numero); possiamo quindi definire la cella B7 oppure AA34.
In ogni cella possiamo introdurre una stringa di testo, un numero, una formula; stringhe di testo e numeri sono riconosciuti automaticamente, mentre le formule devono iniziare con il simbolo "=".

Nella definizione delle formule si evidenziano alcune delle caratteristiche peculiari del foglio elettronico: supponiamo di voler calcolare il quadrato di un numero, ad esempio 4. Scriviamo 4 nella cella A1 e nella cella attigua B1 calcoliamo il quadrato, scrivendo "=A1^2".
In B1 vediamo apparire il risultato desiderato, il numero 16, mentre nella barra delle formule che sta sopra la zona delle celle si legge, quando è evidenziata la cella B1, la formula "=A1^2" (vedi la figura 1).
Se ci posizioniamo di nuovo sulla cella A1 e in essa cancelliamo il 4 e scriviamo 8 vediamo apparire nella B1 il numero 64. Questo fatto mostra che la cella B1 mostra il risultato di un calcolo, ma contiene in realtà la formula stessa, che viene ricalcolata automaticamente ogni volta che sono modificati i contenuti delle celle a cui essa si riferisce.

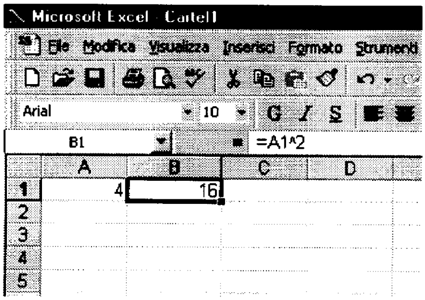


Figura 1

Una formula può essere copiata in un'altra cella con il meccanismo del Copia e Incolla; se copiamo B1 in B2, vediamo che in quest'ultima cella è presente ora la formula "=A2^2". Questo ci mostra un altro fatto fondamentale del foglio elettronico: i riferimenti alle celle sono da intendersi in senso relativo e non assoluto. Questo significa che la formula in B1 viene interpretata come "calcola il quadrato del contenuto della cella che sta sulla stessa riga immediatamente a sinistra" e che questa indicazione viene riportata in B2, facendo quindi riferimento a A2. Possiamo quindi definire una serie di formule in una riga o in una colonna e poi ricopiarle su un'area più vasta.
Ovviamente non sempre il riferimento relativo è adatto alle esigenze dell'utente.
Supponiamo di volere studiare la funzione $y = ax^2$ al variare del parametro a; definiamo un intervallo in cui mettiamo dei valori di x (nell'esempio della figura 2 si tratta di A1:A11). Nella cella B1 possiamo scrivere, ad esempio, "=2*A1^2" , che poi copiamo in B2:B11; se vogliamo modificare il parametro 2, possiamo scrivere "=3*A1^2" in B1 e poi copiare in B2:B11.

Il foglio elettronico ci consente di eseguire questa operazione in maniera molto più efficiente e veloce.

Introduciamo il valore del parametro *a* in C1 e poi scriviamo "=C1*A1^2" in B1 e copiamo in B2:B11. In questa zona compaiono però tutti zeri e non il risultato desiderato (vedi la figura 2); infatti il meccanismo dell'indirizzo relativo viene applicato anche a C1, per cui nelle celle sottostanti si fa riferimento alle celle vuote C2:C11.

In questo caso noi vogliamo un riferimento relativo per le celle A1:A11, mentre il riferimento a C1 deve essere fisso. Per ottenere questo riferimento assoluto, indichiamo la cella C1 con il simbolo di $ e scriviamo in B1 la formula "=$C$1*A1^2" e copiamo; otteniamo il risultato desiderato, mostrato nella figura 3.

Osserviamo che è possibile mescolare i due tipi di riferimento, bloccando una colonna, scrivendo "$C1", oppure una riga, scrivendo C$1.

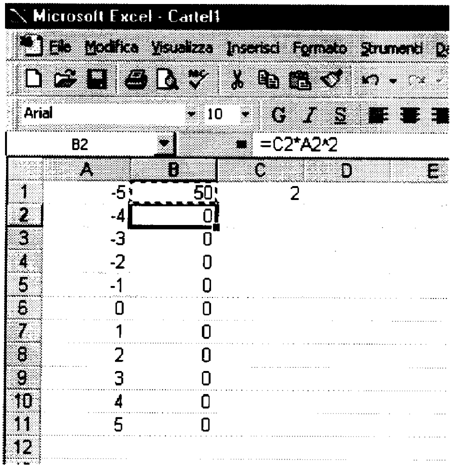


Figura 2

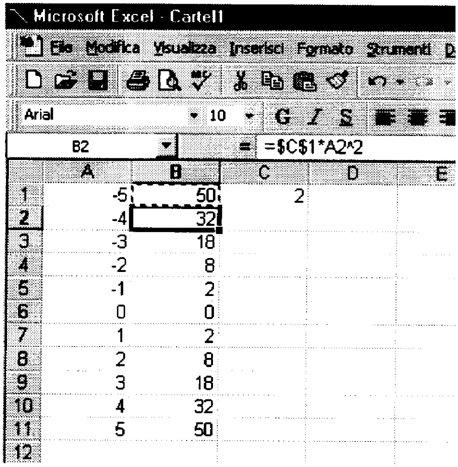


Figura 3

3. Analisi di alcuni algoritmi con il foglio elettronico

Dopo aver esposto le caratteristiche di base del foglio elettronico, vediamo come possiamo utilizzarlo per introdurre e analizzare alcuni algoritmi.

Nel programma di matematica della scuola media vengono presentati alcuni procedimenti di calcolo che ben si prestano alla traduzione in forma di algoritmo e alla implementazione in un ambiente informatico.

Per un primo approccio agli algoritmi è conveniente utilizzare questi esempi invece che cercarne di nuovi; in questo modo possiamo far lavorare lo studente in un ambito già familiare e concentrare quindi la sua attenzione sulla traduzione in algoritmo e

sulla implementazione, piuttosto che sulla comprensione del procedimento da svolgere.
Bisogna ricordare che lo scopo di queste attività non è (almeno in questo stadio iniziale) quello di introdurre metodologie matematiche nuove, ma piuttosto quello di studiare come metodi già noti sono tradotti e interpretati quando lavoriamo con il calcolatore.
In questa prospettiva è *assolutamente indispensabile* che ogni procedimento algoritmico sia già stato applicato "con carta e matita" in alcuni esercizi. Questo da una parte migliora la padronanza tecnica dell'argomento, dall'altra è utile per fare emergere in modo concreto nello studente quello che vogliamo evidenziare, inducendolo a porre e a rispondere (anche in modo parziale, ovviamente, data la sua età) alle seguenti domande, che formuliamo in linguaggio informale:

- come devo spiegare al computer che cosa deve fare per risolvere il problema?
- il computer si comporta come me (ovvero esegue gli stessi passaggi) nella soluzione del problema oppure si comporta diversamente?
- perché in certi casi sembra che sia più bravo io e in altri casi sembra più bravo lui?

In questo approccio l'idea di base è quella di analizzare i vari passi dell'algoritmo e di <u>farne eseguire alcuni dalla macchina</u> (utilizzando alcune funzioni matematiche, come il quoziente e resto della divisione tra interi, o logiche, come la funzione SE, presenti nel foglio) e di <u>eseguirne altri manualmente</u>, con l'immissione di opportuni dati e la procedura di copia e incolla.
In questo modo si evitano tutti i problemi sintattici connessi con la programmazione, mentre si evidenziano in modo <u>operativo</u> tutte quelle caratteristiche degli algoritmi che potranno in seguito essere facilmente implementate con l'ausilio di un linguaggio.

3.1 Esempio 1: il cambiamento di base

Dato un numero naturale n e una base b (maggiore o uguale a due) vogliamo scrivere n come allineamento in base b. Ricordiamo che, fissato un naturale $b \geq 2$, un allineamento del tipo $(d_n d_{n-1} d_{n-2} \ldots d_2 d_1 d_0)_b$, dove $d_0, \ldots, d_n \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$ si dice rappresentazione in base b del numero naturale

$$d_n \cdot b^n + d_{n-1} \cdot b^{n-1} + \ldots + d_2 \cdot b^2 + d_1 \cdot b^1 + d_0 \cdot b^0 .$$

I numeri $d_0, \ldots, d_n \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$ sono detti cifre della rappresentazione.

Ecco alcuni esempi:

1. base binaria: (le cifre sono due: 0 e 1)

$$(101)_2 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 4 + 1 = 5$$ [3]

$$(111001)_2 = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 32 + 16 + 8 + 1 = 57$$

$$(100000000)_2 = 1 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + ... + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 256$$

2. base ottale : le cifre sono gli elementi dell'insieme {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}.

$$(101)_8 = 1 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8^1 + 1 \cdot 2^0 = 64 + 1 = 65$$

3. base esadecimale : usando una base (come 16) maggiore di 10, bisogna introdurre nuovi simboli per rappresentare i numeri con due cifre (vengono utilizzate le lettere dell'alfabeto, ponendo A=10, B=11,..., F=15).

$$(12)_{16} = 1 \cdot 16^1 + 2 \cdot 16^0 = 18$$

$$(D)_{16} = 13$$

$$(1BC)_{16} = 1 \cdot 16^2 + B \cdot 16 + C = 444$$

Uno stesso numero ha quindi rappresentazioni diverse al variare della base.

Il problema che vogliamo affrontare è quello del cambiamento di base: si tratta di scrivere in una base b diversa da dieci un numero assegnato nella usuale base decimale.

Affrontiamo il problema in modo intuitivo, senza ricorrere ai formalismi di rappresentazione dell'algoritmo (in questo primo esempio vogliamo evidenziare le idee di base, piuttosto che l'impianto formale, che può risultare difficile per lo studente di questa età).

Una traccia per la soluzione del problema viene proprio dalla definizione che abbiamo dato. Infatti notiamo che si può scrivere

$$d_n \cdot b^n + d_{n-1} \cdot b^{n-1} + ... + d_2 \cdot b^2 + d_1 \cdot b^1 + d_0 \cdot b^0 =$$
$$[\ d_n \cdot b^{n-1} + d_{n-1} \cdot b^{n-2} + ... + d_2 \cdot b \ + d_1\ ] \cdot b \ + d_0 .$$

Se dividiamo il numero per b otteniamo come resto l'ultima cifra d_0 della rappresentazione; il quoziente, che è l'espressione contenuta nella parentesi quadra, può essere ancora diviso per b ottenendo come resto la penultima cifra; possiamo proseguire in questo modo fino ad ottenere un quoziente nullo.

Ecco un esempio, in cui riotteniamo la scrittura di 57 in base binaria:

[3] I risultati vengono sempre espressi in base decimale.

$$57 = 2 \cdot 28 + 1$$
$$28 = 2 \cdot 14 + 0$$
$$14 = 2 \cdot 7 + 0$$
$$7 = 2 \cdot 3 + 1$$
$$3 = 2 \cdot 1 + 1$$
$$1 = 2 \cdot 0 + 1$$

e quindi, come visto direttamente, $57 = (111001)_2$.

L'algoritmo del cambiamento di base può essere svolto senza problemi con carta e matita e ben si presta come primo esempio di traduzione informatica in quanto mette in luce aspetti importanti senza introdurre eccessive difficoltà.
Innanzitutto identifichiamo *l'operazione di base* che l'algoritmo deve realizzare: si tratta della determinazione del quoziente e del resto nella divisione tra interi; questo compito viene lasciato alla macchina, che possiede due funzioni predefinite, la funzione QUOZIENTE(a,b) e la funzione RESTO(a,b)[4].
Bisogna poi *realizzare un ciclo*, in cui questa operazione viene ripetuta, finché permane vera la *condizione* che il quoziente non sia nullo.
La realizzazione del ciclo è invece "manuale" e viene realizzata con il meccanismo del copia e incolla: in questo modo si evidenziano le caratteristiche del ciclo e la condizione di uscita.
L'algoritmo viene implementato nel foglio realizzando i seguenti passaggi (vedi la figura 4):

1) scriviamo in B5 il numero *n* da rappresentare e in B6 la base *b*;
2) riportiamo in B8 il numero *n* e scriviamo:
    i) in C8 il quoziente della divisione tra *n* e *b*;
    ii) in D8 il resto della divisione tra *n* e *b*;
3) in E8 scriviamo la condizione di controllo del ciclo, che consiste nel verificare se il quoziente è nullo oppure no; l'istruzione da introdurre è
    =SE(C8=0;"STOP"; "OK")
4) realizziamo il secondo passo del ciclo:
    i) riportando in B9 il valore contenuto in C8
    ii) copiando nell'area C9:E9 il contenuto di C8:E8

[4] La funzione RESTO è disponibile direttamente, mentre per avere anche la funzione QUOZIENTE bisogna scegliere Strumenti Aggiunte e abilitare la casella alla sinistra di Strumenti di analisi e fare clic su OK.

5) proseguiamo copiando tutta l'area B9:E9 in B10:E10 e così via, finché non otteniamo un quoziente nullo nella colonna C e il messaggio "STOP" nella colonna E.

	A	B	C	D	E
1					
2	Scrittura di un numero intero in base b>=2				
3					
4					
5	Numero=	12345			
6	Base =	3			
7					
8		12345	4115	0	OK
9		4115	1371	2	OK
10		1371	457	0	OK
11		457	152	1	OK
12		152	50	2	OK
13		50	16	2	OK
14		16	5	1	OK
15		5	1	2	OK
16		1	0	1	STOP
17					

Figura 4

3.2 Esempio 2: la scomposizione in fattori

Supponiamo che, prima di affrontare il problema della scomposizione con il foglio elettronico, siano già stati presentati il concetto di numero primo, i più semplici criteri di divisibilità, che sia nota la sequenza dei numeri primi minori di 30 e che sia già stato svolto qualche esempio con numeri relativamente piccoli, di tre o quattro cifre.

Il passaggio più importante e anche più difficile è quello di determinare i passi dell'algoritmo; il primo passo è quello di analizzare a fondo tutti i passaggi dell'approccio umano, che si rivela profondamente diverso da quello che dobbiamo impostare per il computer.

Di fronte a un numero da scomporre in fattori una tendenza è quella di utilizzare alla rinfusa i criteri di divisibilità più semplici, senza preoccuparsi di testare tutti i possibili fattori in modo sequenziale. Ad esempio, di fronte al numero 1125, il ragazzo è più frequentemente portato a dividere per 5, applicando il criterio di divisibilità più immediato che conosce, senza notare esplicitamente che il numero non è divisibile per 2 e senza provare la divisibilità per 3; il risultato della divisione è 225, che viene diviso ancora per 5, ottenendo 45, che, diviso ulteriormente per 5, fornisce un numero in cui vede chiaramente la presenza del fattore 3.

Un altro passaggio che resta spesso implicito (rivelando a volte un approccio troppo disordinato al problema) è quello di provare di nuovo la eventuale divisibilità per un fattore che è già stato trovato. Difficilmente l'utente umano dopo avere diviso 1262 per 2 esplicita la verifica che il quoziente 631 sia o non sia ulteriormente divisibile per 2, passando invece direttamente alla verifica della divisibilità per 3.
Si osservi che tutto questo non è "sbagliato": il procedimento utilizzato nella decomposizione di 1125 non è altro che la realizzazione di un implicito principio di ottimizzazione, quello di eseguire il numero minore possibile di calcoli. Questa minimizzazione dello sforzo ha come contropartita una certa confusione (a ogni passo non sappiamo bene quali fattori abbiamo già provato e quali dobbiamo ancora provare) che però può essere facilmente controllata, in esempi così semplici, dalla intelligenza naturale.
Non possiamo proporre al computer un procedimento confuso, ma dobbiamo fornirgli ricette precise e infallibili. Nessun dubbio sull'operazione di base da eseguire: si verifica se il numero è divisibile per un certo fattore; se lo è, si divide e si prosegue cercando i fattori del quoziente, mentre se non lo è si prova per il successivo numero primo. Dalla discussione precedente emerge la necessità di:

- testare la divisibilità per fattori primi crescenti. Il computer non utilizza i criteri di divisibilità, ma esegue semplicemente delle divisioni, per cui non "ha interesse" a semplificare i passaggi; utilizziamo la funzione RESTO, in quanto se essa fornisce zero significa che il numero è divisibile per il fattore, mentre se essa fornisce un valore non nullo non si ha la divisibilità;
- dopo avere verificato che il numero è divisibile per un fattore, bisogna controllare ancora se il quoziente sia divisibile per lo stesso fattore.

Restano aperti ancora due problemi: quello della lista dei numeri primi e del criterio di arresto. Non potendo fare ricorso a una formula generatrice di tutti e soli i numeri primi possiamo:

1. provare il fattore 2, poi 3 e tutti i dispari;
2. memorizzare la lista dei numeri primi fino a un certo valore e poi prendere da questa lista i numeri da utilizzare nel procedimento.

La prima alternativa costringe a calcoli inutili e modifica in un punto essenziale la natura del procedimento (usiamo i numeri dispari e non i numeri primi); la seconda è sicuramente più soddisfacente, ma costringe ad appesantire molto il programma, introducendo delle procedure (definizione di un vettore, utilizzo dei suoi elementi...) che non vogliono essere oggetto di studio a questo livello.

Il criterio di arresto non è per ora una questione essenziale. Si può iniziare considerando dapprima numeri piccoli e tutti i primi minori o uguali del numero da fattorizzare; applicando poi il programma si vede facilmente che il criterio può essere ottimizzato, arrivando ad arrestarsi quando abbiamo raggiunto la radice quadrata del numero da fattorizzare. Questo è il criterio adottato nell'algoritmo che è presentato tra breve, criterio che può essere facilmente modificato.

Algoritmo per la fattorizzazione di un numero
1. Si assegna n e si scrive n
2. Si pone p=2
3. Finché p^2<=n si ripete:
   Se n è divisibile per p allora si pone $n=n/p$, si scrive n
   altrimenti
   si pone p uguale al successivo numero primo
4. Fine

Evidenziamo alcuni aspetti di questo procedimento:
1. il controllo della divisibilità: questo passaggio può essere lasciato al foglio elettronico, utilizzando la funzione RESTO(a,b);
2. l'esecuzione della divisione n/p tra interi, realizzata dal foglio elettronico;
3. il calcolo del successivo numero primo: questo passaggio viene lasciato alla esecuzione manuale da parte dello studente, che si suppone fornito di una tabella dei numeri primi;
4. il controllo della condizione $p^2 \leq n$, che viene fatta dal foglio elettronico.

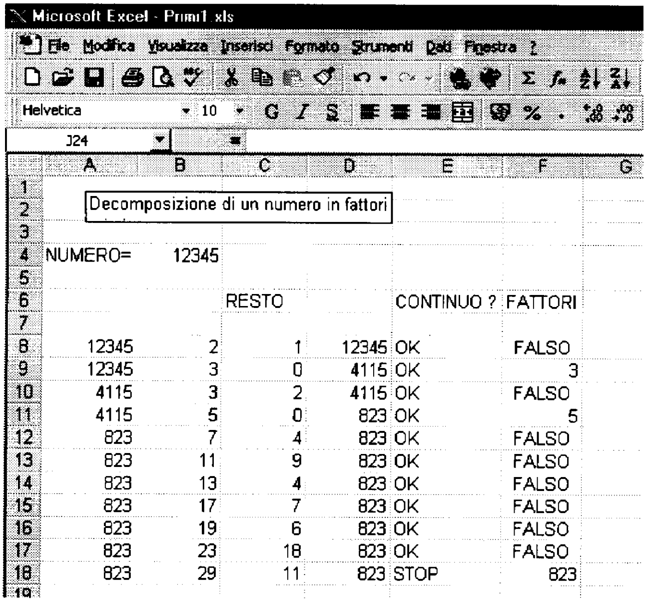
Vediamo ora in dettaglio la realizzazione del foglio, elencando tutti i passaggi (vedi la figura 5):

1. Il numero n da fattorizzare viene introdotto in B4 e ricopiato in A8;
2. il numero primo p=2 viene introdotto dall'utente in B8;
3. in C8 si scrive la formula =RESTO(A8;B8), che fornisce il resto della divisione intera;
4. in D8 la formula =SE(C8=0;A8/B8;A8) esegue l'istruzione di controllo; se il resto è zero (caso della divisibilità) si divide n per il numero primo, altrimenti lo si lascia immutato; la casella D8 è ricopiata in A9 per iniziare la nuova iterazione;
5. in E8 viene eseguito il controllo per l'arresto del procedimento, mediante la formula =SE(B8<RADQ(A8);"OK"; "STOP"); viene visualizzato il messaggio OK se si deve proseguire, STOP in caso contrario;
6. in F8 abbiamo infine un doppio controllo, realizzato mediante una coppia di SE annidati: =SE(C8=0;B8;SE(E8="STOP"; A8)). Nel caso di divisibilità viene scritto il fattore che è stato trovato; in caso contrario appare il messaggio FALSO (per indicare che il primo considerato non è un fattore) oppure il numero stesso se nella casella adiacente appare STOP. In questo caso abbiamo

raggiunto il divisore massimo da considerare e il numero rimasto è quindi primo.

7. ora ricopiamo la zona B8:F8 in B9:F9 e scriviamo 3 in B9; viene realizzato in questo modo il secondo passo della iterazione.

Per proseguire basta ora ricopiare A9-F9 in un rettangolo opportuno e continuare a introdurre nella colonna B i numeri primi successivi (sempre ripetendo il controllo nel caso di divisibilità) finché nella colonna E non appare il messaggio STOP. A questo punto abbiamo nella colonna F l'elenco dei fattori primi di n.



Decomposizione di un numero in fattori

	A	B	C	D	E	F
4	NUMERO=	12345				
6			RESTO		CONTINUO ?	FATTORI
8	12345	2	1	12345	OK	FALSO
9	12345	3	0	4115	OK	3
10	4115	3	2	4115	OK	FALSO
11	4115	5	0	823	OK	5
12	823	7	4	823	OK	FALSO
13	823	11	9	823	OK	FALSO
14	823	13	4	823	OK	FALSO
15	823	17	7	823	OK	FALSO
16	823	19	6	823	OK	FALSO
17	823	23	18	823	OK	FALSO
18	823	29	11	823	STOP	823

Figura 5

3.3 Esempio 3: il crivello di Eratostene

Affrontiamo ora un esempio più complicato: si tratta del metodo del crivello di Eratostene per individuare i numeri primi compresi in un certo intervallo, nel nostro caso da 2 a 100.

Come nell'esempio precedente utilizziamo la conoscenza della sequenza dei numeri primi e il fatto che per determinare i numeri primi fino a un certo valore è sufficiente testare la divisibilità con i numeri minori o uguali della radice quadrata di tale valore; nel nostro caso è quindi sufficiente considerare la divisibilità per 2, 3 5 e 7.

Osserviamo che il metodo presentato è comunque di carattere generale e può essere adattato con piccole modifiche a qualunque intervallo di interi; questa generalizzazione è un utile esercizio che può essere proposto dopo la soluzione del problema modello.
Ricordiamo il metodo del crivello di Eratostene:

1) si assegna l'intervallo da considerare;
2) si verifica quali dei numeri di questo intervallo maggiori di 2 sono divisibili per 2 e li si elimina;
3) si considerano i numeri maggiori di 3 e si eliminano quelli divisibili per 3;
4) si considerano i numeri maggiori di 5 e si eliminano quelli divisibili per 5;
5) si considerano i numeri maggiori di 7 e si eliminano quelli divisibili per 7.

I numeri rimasti sono i primi compresi nell'intervallo.
Nel nostro caso l'operazione di eliminazione consiste nella sostituzione di zero al posto del numero che viene riconosciuto come composto.

Iniziamo dalla costruzione della tabella dei numeri (vedi figura 6):

1) in B4 scriviamo 2 e completiamo la riga con la formula =B4+1 in C4 che poi copiamo in D4:J4 fino ad arrivare a 10;
2) in A5 scriviamo 11 e poi completiamo la riga fino ad avere 20 in J5;
3) in A6 introduciamo la formula =A5+10, che ricopiamo fino a J6;
4) copiamo la riga 6 nella zona A7:J13, completando la tabella.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1												
2		Crivello di Eratostene										
3												
4		2	3	4	5	6	7	8	9	10		2
5	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20		
6	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30		
7	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40		
8	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50		
9	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60		
10	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70		
11	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80		
12	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90		
13	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100		

Figura 6

Scriviamo in una cella (ad esempio L4) il fattore 2; si tratta ora di eseguire l'eliminazione dei numeri divisibili per 2 (che sostituiamo con uno zero), lasciando invariati quelli non divisibili. Per fare questo creiamo una nuova tabella nella zona A15:J24, che riempiamo nel seguente modo:

1) lasciamo vuota A15;
2) in B15 scriviamo la formula =B4 (questo è un punto importante, che rende questo algoritmo più sofisticato dei precedenti: l'operazione di base, l'eliminazione dei numeri composti, deve essere svolta su un range di numeri che cambia ad ogni passaggio iterativo. Nel prossimo passaggio dovremo escludere anche il tre e così via)
3) in C15 scriviamo la formula =SE(RESTO(C4;$L$4)=0;0;C4)), che poi ricopiamo in tutto il resto della zona, che assume il seguente aspetto

	2	3	0	5	0	7	0	9	0
11	0	13	0	15	0	17	0	19	0
21	0	23	0	25	0	27	0	29	0
31	0	33	0	35	0	37	0	39	0
41	0	43	0	45	0	47	0	49	0
51	0	53	0	55	0	57	0	59	0
61	0	63	0	65	0	67	0	69	0
71	0	73	0	75	0	77	0	79	0
81	0	83	0	85	0	87	0	89	0
91	0	93	0	95	0	97	0	99	0

Per realizzare il passaggio seguente scriviamo il fattore 3 nella casella L15 e costruiamo la nuova tabella in A26:J35; lasciamo vuota la casella A26 e ricopiamo la zona B26:C26 da quella sovrastante B15:C15 (in questo caso il controllo della divisibilità deve partire da 4); in D26 introduciamo la formula

=SE(RESTO(F15;$L$15)=0;0;F15)

che poi ricopiamo nell'intera zona, ottenendo

	2	3	0	5	0	7	0	0	0
11	0	13	0	0	0	17	0	19	0
0	0	23	0	25	0	0	0	29	0
31	0	0	0	35	0	37	0	0	0
41	0	43	0	0	0	47	0	49	0
0	0	53	0	55	0	0	0	59	0
61	0	0	0	65	0	67	0	0	0
71	0	73	0	0	0	77	0	79	0
0	0	83	0	85	0	0	0	89	0
91	0	0	0	95	0	97	0	0	0

Proseguiamo allo stesso modo con il fattore primo 5, che scriviamo in L26. Ricopiamo i valori B26:E26 in B37:E37; in F37 immettiamo la formula

=SE(RESTO(F26;$L$26)=0;0;F26)

che viene ricopiata nel resto della zona; procediamo analogamente per 7, ottenendo le due tabelle seguenti, la seconda delle quali costituisce il risultato che ci eravamo prefissi.

	2	3	0	5	0	7	0	0	0
11	0	13	0	0	0	17	0	19	0
0	0	23	0	0	0	0	0	29	0
31	0	0	0	0	0	37	0	0	0
41	0	43	0	0	0	47	0	49	0
0	0	53	0	0	0	0	0	59	0
61	0	0	0	0	0	67	0	0	0
71	0	73	0	0	0	77	0	79	0
0	0	83	0	0	0	0	0	89	0
91	0	0	0	0	0	97	0	0	0

	2	3	0	5	0	7	0	0	0
11	0	13	0	0	0	17	0	19	0
0	0	23	0	0	0	0	0	29	0
31	0	0	0	0	0	37	0	0	0
41	0	43	0	0	0	47	0	0	0
0	0	53	0	0	0	0	0	59	0
61	0	0	0	0	0	67	0	0	0
71	0	73	0	0	0	0	0	79	0
0	0	83	0	0	0	0	0	89	0
0	0	0	0	0	0	97	0	0	0

3.4 Esempio 4: scrittura di un razionale in forma di allineamento

Supponiamo assegnato un numero razionale $x=p/q$, tale che x sia compreso tra zero e uno e che p e q non abbiano fattori comuni.

Vogliamo scrivere x in forma di allineamento decimale. Se utilizziamo la base 10 basta applicare il noto algoritmo di divisione che riportiamo nella tabella seguente: è facile convincersi che l'operazione di base è una divisione tra interi con la determinazione del quoziente e del resto.

Al primo passaggio si divide p per q, ottenendo, in virtù delle ipotesi fatte, come quoziente zero (la parte intera di p/q) e come resto p.

Questo resto viene moltiplicato per dieci (la base della rappresentazione); si determina poi il quoziente (che è la prima cifra decimale di p/q) e il resto della divisione del numero così ottenuto per q. Questo resto viene inserito al posto del precedente e si ripete il procedimento.

1	7
10	0,142857
30	
20	
60	
40	
50	
10	

Possiamo implementare questo procedimento nel foglio elettronico (vedi la figura 7). In A7, B7 e D7 scriviamo i dati del problema, e precisamente p, q e b.
Vogliamo scrivere nella colonna B le cifre decimali della rappresentazione (trascurando la parte intera, che sappiamo essere sempre uguale a zero) e nella colonna C i resti della divisione; riserviamo la colonna A ai prodotti dei resti per la base.
Iniziamo il procedimento nella riga 10; in A10 possiamo quindi introdurre la formula =$A$7*$D$7 (ricordiamo che il primo resto è uguale a p), mentre in B10 determiniamo la prima cifra della rappresentazione con la formula =QUOZIENTE(A10/$B$7), in C10 il primo resto con la formula =RESTO(A10/$B$7) .
Riportiamo il resto nella prima colonna scrivendo in A11 la formula =C10*$D$7; possiamo poi copiare le altre formule in B11 e C11 e poi la zona A11:C11 nelle celle sottostanti.

L'aspetto maggiormente interessante di questo algoritmo sta nella condizione di uscita: è infatti immediato constatare che il procedimento si ripete indefinitamente. Osservando i resti che compaiono nella colonna C possiamo però notare una regolarità: dopo avere ottenuto sei diversi valori del resto in C10:C15, in C16 osserviamo il resto 3, identico a quello che compare in C10.
In questo esempio, coerentemente con l'impostazione adottata di esecuzione in parte manuale e in parte automatica degli algoritmi, demandiamo la verifica della condizione di arresto all'utente, che deve controllare a ogni riga se il resto che compare è diverso dai precedenti oppure è uguale. Possiamo così introdurre

operativamente le idee di periodo e antiperiodo e fare esperimenti interessanti sulla lunghezza del periodo e sulla sua relazione con il denominatore..

Scrittura di un numero razionale p/q (con p<q) in forma di allineamento in base b>=2.

	A	B	C	D	E
6	Numer.	Denom.		Base	
7	1	7		10	
8					
9		Cifre	Resti		
10	10	1	3		
11	30	4	2		
12	20	2	6		
13	60	8	4		
14	40	5	5		
15	50	7	1		
16	10	1	3		
17	30	4	2		
18	20	2	6		
19	60	8	4		
20	40	5	5		

Figura 7

3.5 Esempio 5: approssimiamo la radice di due

Vediamo un utilizzo del foglio elettronico estremamente semplice dal punto di vista dell'utilizzo dello strumento informatico, ma interessante per i contenuti matematici.
Il foglio elettronico è qui infatti utilizzato come puro strumento di calcolo, ma esso può rendere interessante e significativo un procedimento che, se svolto con carta e matita oppure con strumenti più poveri, come una calcolatrice tascabile, presenta difficoltà di realizzazione pratica (tempi di calcolo troppo lunghi) tali da rendere difficoltoso e in pratica impossibile l'utilizzo didattico.
Vogliamo presentare un procedimento di approssimazione di un numero irrazionale, la radice di due, utilizzando calcoli nella familiare base decimale, prima di passare a un esempio più complesso che fa intervenire la base binaria.
Il procedimento è quello della "divisione in dieci" , che, sebbene sia più complicato del metodo di bisezione, conduce a calcoli più facili da seguire per uno studente delle medie.

Una volta appurato che la radice di due è compresa tra uno e due, procediamo per approssimazioni successive, dividendo l'intervallo [1,2] in dieci parti; calcoliamo il quadrato dei valori ottenuti in questo modo e vediamo quando il quadrato di questi valori diventa maggiore di due; osserviamo che in questo procedimento è sottinteso che lo studente possieda, in modo intuitivo, l'idea che la funzione $x \to x^2$ sia monotona crescente nella sua forma più intuitiva "se dei numeri crescono anche i loro quadrati crescono").

La realizzazione nel foglio elettronico è semplice:
1. nella cella A1 scriviamo l'incremento 0,1;
2. nella cella B1 scriviamo il valore iniziale 1;
3. nella cella B2 scriviamo la formula =B1+$A$1, che poi copiamo in B3:B11;
4. nella cella C1 scriviamo la formula =B1^2, che poi copiamo in C2:C11.

Otteniamo la tabella seguente:

0,1	1	1
	1,1	1,21
	1,2	1,44
	1,3	1,69
	1,4	1,96
	1,5	2,25
	1,6	2,56
	1,7	2,89
	1,8	3,24
	1,9	3,61
	2	4

Non abbiamo trovato nessun valore che elevato al quadrato sia esattamente uguale a due; lo studente è invitato a identificare qual è il numero più grande il cui quadrato sia minore di due, mentre il successivo ha quadrato maggiore di due; si tratta di 1,4 che evidenziamo (in grassetto e centrato nella tabella precedente).
La radice di due si trova nell'intervallo compreso tra 1,4 e 1,5; è immediato porsi la domanda "Se miglioriamo l'approssimazione aggiungendo una cifra, otteniamo la radice di due?"
Possiamo quindi ripetere il procedimento partendo da 1,4 e dividendo l'intervallo [1,4,1,5] in dieci parti; con semplici modifiche dei passaggi precedenti. Il passaggio seguente ci porta a suddividere l'intervallo [1,41, 1,42]. Si ottengono le seguenti tabelle.

0,01	1,4	1,96
	1,41	1,9881
	1,42	2,0164
	1,43	2,0449
	1,44	2,0736
	1,45	2,1025
	1,46	2,1316
	1,47	2,1609
	1,48	2,1904
	1,49	2,2201
	1,5	2,25

0,001	1,41	1,9881
	1,411	1,990921
	1,412	1,993744
	1,413	1,996569
	1,414	1,999396
	1,415	2,002225
	1,416	2,005056
	1,417	2,007889
	1,418	2,010724
	1,419	2,013561
	1,42	2,0164

A questo punto, perlomeno negli studenti più dotati, si pone la domanda: fino a quando dobbiamo andare avanti prima di trovare questa benedetta radice di due?
L'esempio dei numeri razionali ha già mostrato esempi di allineamenti infiniti, per cui la risposta "per sempre" dovrebbe essere accettata

3.6 Esempio 6: la radice di due e il suo allineamento binario

Concludiamo con un esempio più complesso; la ricerca per bisezione di una approssimazione della radice di due e di un allineamento binario che la esprima.[5]
Il procedimento è più semplice di quello visto nel paragrafo precedente, anche se i calcoli sono certamente più "strani" agli occhi di un ragazzo delle medie.
Indichiamo con r la radice di due. Suddividiamo l'intervallo [1,2] in due parti e valutiamo la funzione x^2 in x=1,5.

---

[5] Nel corso di Lucca 1997 sono state svolte anche considerazioni sulla rappresentazione dei numeri nel calcolatore, sulle operazioni di macchina e sui fenomeni di propagazione dell'errore numerico che non vengono qui riportate, per ragioni di spazio. Per una panoramica dal punto di vista teorico si possono vedere (Boieri 1986) e (Boieri 1995), mentre in (Arpinati 1988) si trova il resoconto di una presentazione di alcuni questi concetti in una classe di scuola media.
In particolare in questo esempio utilizziamo la rappresentazione binaria di un numero reale sotto forma di allineamento e il concetto di precisione di macchina; ricordiamo che la precisione di macchina è il minimo numero positivo z rappresentato nel calcolatore tale che $1+z \neq 1$ (in termini molto intuitivi, si tratta del valore positivo più piccolo che "non sparisce in confronto a uno" nella somma).

Se $1{,}5^2<2$ allora r è contenuto nell'intervallo [1,5, 2] e nella sua rappresentazione binaria il primo bit dopo la virgola è uno; se invece $1{,}5^2>2$, r sta nell'intervallo [1, 1,5] e il primo bit dopo la virgola è zero.
Se realizziamo il test, vediamo che si presenta la seconda eventualità e quindi r appartiene a [1, 1,5] e l'allineamento che lo esprime è 1,0… .
Consideriamo ora l'intervallo [1, 1,5] e ripetiamo il procedimento di bisezione; avendo verificato che $1{,}25^2<2$, abbiamo che r sta nell'intervallo di destra in cui è diviso [1, 1,5], vale a dire in [1,25, 1,5]; quindi il secondo bit è uguale a uno e l'allineamento risulta uguale a 1,01…
Il procedimento viene poi iterato. Prima di fare ulteriori considerazioni, vediamo come è possibile implementare la bisezione sul foglio elettronico.

Scriviamo il numero di cui vogliamo trovare la radice in B6 (vedi la figura 8).

Rappresentazione decimale e binaria della radice di 2.
Viene indicato (colonna F) quando i risultati non sono più significativi in quanto si è raggiunta la precisione di macchina.

	A	B	C	D	E	F
6	Numero=	2				
7	Prec. macch.=	1,12157E-16				
8						
9	1	1				
10	0,5	1,5	MAGG.	0	OK	
11	0,25	1,25	MIN.	1	OK	
12	0,125	1,375	MIN.	1	OK	
13	0,0625	1,4375	MAGG.	0	OK	
14	0,03125	1,40625	MIN.	1	OK	
15	0,015625	1,421875	MAGG.	0	OK	
16	0,0078125	1,4140625	MIN.	1	OK	
17	0,00390625	1,41796875	MAGG.	0	OK	
18	0,001953125	1,416015625	MAGG.	0	OK	
19	0,000976563	1,415039063	MAGG.	0	OK	
20	0,000488281	1,414550781	MAGG.	0	OK	
21	0,000244141	1,414306641	MAGG.	0	OK	

Figura 8

Nella colonna A scriviamo le ampiezze degli intervalli: partiamo da uno nella cella A9, scriviamo la formula =A9/2 in A10 e copiamo nella colonna A.
Nella colonna B vogliamo scrivere i valori dei punti medi degli intervalli che determiniamo con il metodo di bisezione; questi numeri costituiscono delle approssimazioni, per difetto o per eccesso, sempre più precise di r.

In B9 riportiamo il numero 1 (oppure mettiamo la formula =INT(RADQ($B$6)), dove INT(a) è la parte intera di *a* se vogliamo che il nostro algoritmo sia utilizzabile in generale).
In B10 riportiamo la formula =B9+A10 che ci fornisce il valore 1,5 in cui effettuiamo il primo test; in C10 scriviamo il risultato del test

=SE(B10^2<$B$6;"MIN."; "MAGG."),

mentre in D10 possiamo scrivere il valore del bit nella rappresentazione binaria di *r*

=SE(B10^2<$B$6;1;0).

Abbiamo così completato il primo passo dell'algoritmo. Ora dobbiamo realizzare il ciclo. La formula da inserire in B11 è più complicata:

=SE(B10^2<$B$6;B10+A11;B10-A10+A11)

Interpretiamo questa formula:

1. se il valore precedente B10 elevato al quadrato è minore di due, allora si sceglie l'intervallo di destra; il nuovo valore da testare è quindi il precedente incrementato del nuovo passo A11;
2. se il valore precedente B10 elevato al quadrato è maggiore di due, allora si sceglie l'intervallo di sinistra; per trovare il nuovo valore da testare dobbiamo sottrarre l'incremento del passo precedente e sommare quello del nuovo passo (in termini intuitivi, ci siamo spinti troppo avanti e quindi dobbiamo ritornare indietro e avanzare solo di metà).

Dal punto di vista teorico, è noto che questo procedimento non termina mai, non esistendo alcun numero razionale (tutti i numeri di cui calcoliamo il quadrato sono razionali) che elevato al quadrato sia uguale a due; nel calcolatore il procedimento continua fino a che l'incremento non diventa troppo piccolo e raggiunge l'underflow.
In realtà dobbiamo fermarci molto prima, quando l'incremento raggiunge la precisione di macchina. Infatti quando si arriva a questo punto l'incremento che viene aggiunto non viene "sentito" dal computer che continua ad operare in realtà con lo stesso valore. Questo fatto risulta evidente dall'esame della tabella; a partire dalla riga 63 i valori della colonna B non vengono più incrementati e il test fornisce sempre lo stesso risultato (vedi la figura 9).
Per evitare questo inconveniente viene aggiunto nella colonna E il confronto tra l'incremento e la precisione di macchina (determinata sperimentalmente); quando l'incremento è maggiore della precisione di macchina compare nella colonna E il messaggio "OK; in caso contrario il messaggio "NO" ci avverte della inattendibilità del risultato.

58	1,77636E-15	1,414213562	MAGG.	0	OK
59	8,88178E-16	1,414213562	MIN.	1	OK
60	4,44089E-16	1,414213562	MAGG.	0	OK
61	2,22045E-16	1,414213562	MAGG.	0	OK
62	1,11022E-16	1,414213562	MIN.	1	NO
63	5,55112E-17	1,414213562	MIN.	1	NO
64	2,77556E-17	1,414213562	MIN.	1	NO
65	1,38778E-17	1,414213562	MIN.	1	NO
66	6,93889E-18	1,414213562	MIN.	1	NO
67	3,46945E-18	1,414213562	MIN.	1	NO
68	1,73472E-18	1,414213562	MIN.	1	NO

Figura 9

Bibliografia

Lavori citati nel testo

Aho A.V., Ullmann J.D.: 1994, Fondamenti di Informatica, Zanichelli, Bologna

Arpinati A.M.: 1988, 'Alla scoperta dei numeri di macchina', *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate* **11**, 137-165

Arzarello F., Chiappini G., Lemut E., Malara N. and Pellerey M.: 1993, 'Learning to program as a cognitive apprenticeship through conflicts' in Lemut, DuBoulay, Dettori (eds.) *Cognitive Models and Intelligent Environment for Learning Programming*, NATO ASI Series, Springer - Verlag, Berlin, Vol. 111, 284-298.

Boieri, P.: 1986, 'Rappresentazione dei numeri e operazioni in virgola mobile: una applicazione del calcolatore nell'insegnamento della matematica, *Periodico di Matematiche*, Serie VI, **62**, 91-141.

Boieri P.:1995 'Rappresentazione dei numeri, operazioni in virgola mobile e propagazione dell'errore' *Dispense del seminario "Software per la didattica" nell'ambito del corso di Matematiche Complementari*, Università di Torino.

Pellegrino C. e Malara N.A.: 1991, 'The LOGO in the teaching of Mathematics: problems, experiences and requests', Proc. *EUROLOGO 1991,* Parma, 507-530

Malara N.A. e Pellegrino C., Tazzioli R.: 1992, 'I fogli elettronici in attività di Matematica per allievi di 11-16 anni', CDE Comune di Modena, Modena,

Reggiani M.: 1994, 'Insegnare a programmare nella scuola media inferiore: obiettivi, risultati, difficoltà, riflessioni', *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate* **17B**, 66-91

Reggiani M. e Vercesi N.: 1993, 'Schematizzazioni, diagrammi di flusso, tabelle e attività matematiche con il computer nella scuola media inferiore', *La Matematica e la sua Didattica* **1**, 39-50

Wirth N.: 1976, Algoritmi + Strutture dati = Programmi, Tecniche Nuove, Milano.

Per avere una panoramica delle ricerche svolte in Italia nell'ultimo decennio sulla introduzione dell'Informatica nella scuola media la fonte bibliografica più completa è l'articolo *Technology and Mathematics* di P.Boieri, G. Chiappini e M. Fasano in Malara N.A., Menghini Marta M., Reggiani,M. (editors.) *Italian Research in Mathematics Education 1988-1995,* Consiglio Nazionale delle Ricerche, Roma, 1996 (questo volume può essere richiesto alla seconda delle curatrici presso il Dipartimento di Matematica –Università la Sapienza – Roma).

Per una presentazione delle funzionalità di base di Cabri 1.7:
Boieri P., Cazzanelli M., 'Conoscere Cabri', in P.Boieri (a cura di) *Fare geometria con Cabri,* Centro Ricerche Didattiche Ugo Morin, G. Battagin Editore, S. Zenone degli Ezzelini, 1996
mentre la nuova versione Cabri II è descritta in
Boieri P., Ramassotto A., 'Da Cabri 1.7 a Cabri II', Cabrirrsae, n.12, 1997.

Sulla rivista Cabrirrsae e sui Quaderni di Cabrirrsae (che possono essere richiesti all'IRRSAE Emilia Romagna – Sezione Scuola Media- Via Ugo Bassi, 7- 40121 Bologna – email: cabri@arci01.bo.cnr.it) si trova molto materiale sull'utilizzo di Cabri nella scuola media.
Un'altra fonte preziosa di informazioni è il sito Internet
http://arci01.bo.cnr.it/cabri/.

INTEGRAZIONE DI TEMI VECCHI E NUOVI

Raimondo Bolletta
Centro Europeo dell'Educazione - Villa Falconieri Frascati

Premessa

Il ciclo di lezioni che mi è stato affidato è centrato sul problema dell'integrazione dei 'nuovi temi' nel curricolo. Che i responsabili del corso abbiano sentito la necessità di riservare parte del tempo a tale tema è una prova della rilevanza che a livello diffuso esso ancora probabilmente riveste.

Testualmente il titolo è un po' ambiguo e può riferirsi almeno a due significati:

- integrazione nel curricolo nel senso di un'effettiva implementazione anche di queste parti dei programmi nel curricolo realmente svolto (la preoccupazione è che siano svolti da pochi insegnanti e spesso in modo marginale),
- integrazione nel curricolo come realizzazione di visione unitaria ed armonica delle varie parti del programma, quelle più tradizionali e quelle più *nuove*.

Se tale problema a quasi vent'anni dall'introduzione dei programmi, che impropriamente continuiamo a chiamare 'nuovi', emerge ancora, significa forse che è di per sé irresolubile e il volerlo affrontare potrebbe apparire un tentativo troppo ambizioso e forse vano: mi sono allora accinto a questa riflessione con la preoccupata consapevolezza della difficoltà del compito ma anche con la curiosità di chi spera di potersi confrontare con la competenza e l'esperienza di altri colleghi che condividono le stesse preoccupazioni e le stesse responsabilità.

In premessa va aggiunto inoltre che il presente intervento è ovviamente connotato dalla personale esperienza di docente di scuola secondaria superiore che ha insegnato per molti anni calcolo della probabilità, statistica e ricerca operativa a studenti dell'indirizzo informatico ma che comunque con la scuola media ha interagito dai tempi della tesi di laurea (1972), centrato su uno stage nelle classi di Emma Castelnuovo, per continuare poi con la stesura di un libro di testo nel 1989 e due indagini valutative VAMIO nel 1986 e nel 1996.

Obiettivi generali dell'intervento

- acquisire maggiore consapevolezza dei problemi posti da uno sviluppo integrato dei programmi;
- discutere alcuni dati sulla situazione effettiva, emergenti da indagini sul campo;
- proporre ipotesi di soluzione centrate su qualche concetto guida unificante;
- analizzare esempi di attività didattica suscettibile di operare una integrazione tra temi diversi

Attività previste

Prima

- Analisi dei programmi con particolare riferimento ai criteri che ne hanno determinato l'impostazione.
- Elementi per una ricostruzione storica del contesto che ha generato i programmi
- La realizzazione dei programmi: analisi di alcuni dati sul curricolo realmente svolto

Seconda

- Un esempio di possibile trama unificante: il concetto di funzione.
- Spunti di riflessione dalla psico-pedagogia, dalla didattica, dalla pratica educativa.

Terza

- Contesti per integrare: la simulazione, il gioco, il calcolo, il laboratorio.
- Problemi, modelli, sistemi.

Quarta

- Le *contraddizioni* lasciate alle scelte didattiche dei docenti: concreto vs astratto, esatto vs approssimato, formale vs informale, dichiarativo vs procedurale.

La genesi dei programmi 1979

Per discutere il problema dell'integrazione dei nuovi temi nel curricolo reale è opportuno partire da un'analisi, seppur accennata, del contesto culturale e politico che ha generato tali programmi per poter apprezzare meglio le implicazioni soggiacenti certe scelte operate dall'allora commissione di esperti[1]. E se quello scenario è probabilmente superato in quanto un ventennio è un periodo lunghissimo con l'attuale tasso di cambiamento, la consapevolezza dei cambiamenti intervenuti è un requisito indispensabile per chi singolarmente o collettivamente traduce i programmi in condotte e attività che condizionano la vita di molti ragazzi.

Schematicamente possiamo descrivere il contesto di allora distinguendo almeno cinque piani: politico, disciplinare, didattico, psicopedagogico e applicativo.

I programmi del 1979 costituiscono il compimento di un lungo e radicale processo di riforma scolastica che ha unificato la scuola media eliminando l'avviamento e innalzando di tre anni l'obbligo scolastico. Rispondono a un progetto di allargamento della scolarizzazione e ad una fase di democratizzazione della società che, tramite l'istruzione, intende rendere possibile la mobilità sociale verso l'alto. Nei programmi è evidente l'intenzione di ridurre l'impatto formalistico e chiuso di una disciplina troppo strutturata, rimandandolo agli studi successivi, per presentare una pluralità di argomenti e di approcci in cui tutti possano trovare la possibilità di studiare proficuamente.[2] Mentre nel vecchio ginnasio era possibile concepire un curricolo matematico ben definito e relativamente ridotto in funzione di sbocchi professionali e sociali già determinati, l'università e le professioni liberali per alcuni, il lavoro subordinato o esecutivo per altri, nella nuova scuola media occorre invece una preparazione flessibile, ampia, compatibile con le molte opzioni degli studi successivi (Villani[3]).

Veniamo al contesto disciplinare. La prima metà del secolo ha segnato un travaglio importante centrato sul problema dei fondamenti e sulla necessità di ritrovare un paradigma unitario ad un edificio che, oltre a rivelare fondamenta cedevoli, si andava diversificando e specializzando secondo linee imprevedibili ed irriconoscibili. La teoria degli insiemi, le strutture alge-

---

[1] La necessità di tale premessa nasce dalla constatazione che per ovvi motivi anagrafici la porzione di docenti che non ha vissuto direttamente quel contesto e che quindi non è forse consapevole del senso di alcune scelte è largamente maggioritaria e che gran parte dell'attuale attività di aggiornamento e di prima formazione è centrata su aspetti metodologici e tecnici o su questioni di ricerca didattica centrate su problematiche micro.

[2] Selezione, merito, eccellenza, competizione vent'anni dopo sono maggiormente presenti nel lessico scolastico.

[3] V. Villani, Il dibattito sull'insegnamento della matematica dalla realtà alla formalizzazione ... in F. Furinghetti (a cura di) *Matematica oggi dalle idee alla scuola.* Bruno Mondadori 1990 pagg. 68-78.

briche, l'assiomatizzazione e l'accentuata importanza del formalismo e della logica hanno segnato l'innovazione dei contenuti entrando già dagli anni cinquanta e sessanta nei curricoli universitari e quindi nella formazione dei nuovi docenti. I programmi sono allora anche un tentativo di adeguamento dei curricoli scolastici secondari al radicale processo di cambiamento della disciplina e la presenza dei nuovi temi, ivi compresa la geometria delle trasformazioni, risponde ad una esigenza di completezza e fedeltà rispetto alla complessità assunta dalla matematica nel suo insieme.

Per livello *didattico*[4] qui ci si riferisce all'ampio e vivace dibattito cominciato fin dai primi anni del secolo in cui matematici di grande rilievo scientifico cercarono di accreditare la matematica come disciplina di insegnamento da diffondere non solo tra pochi cultori superspecializzati ma anche, come componente fondamentale della cultura, tra tutti coloro che frequentavano le scuole secondarie[5].. Al radicale processo di formalizzazione e assiomatizzazione delle teorie matematiche che portava alla progressiva riduzione dell'importanza della effettiva interpretazione della teoria in modelli reali (Bourbakisti)[6] si opponeva strenuamente una corrente di pensiero intuizionista e dinamica (Poincarè) per la quale la matematica non poteva rinunciare ai suoi legami con la realtà, alla trattazione di significati legati all'intuizione e all'esperienza. Parallelamente, a livello della matematica insegnata, due correnti innovative ugualmente interessate ad un allargamento e a un miglioramento dell'insegnamento della matematica si sono fronteggiate: la prima più centrata su un aggiornamento dei contenuti, la cosiddetta *matematica moderna,* la seconda più preoccupata degli aspetti metodologici e motivazionali.

Al momentaneo successo della prima corrente, i difetti della quale sono stati parzialmente riconosciuti, più tardi, dai Bourbakisti stessi[7], ha involontariamente ma fortemente contribuito il lavoro di Piaget. Quello che abbiamo definito contesto psicopedagogico può essere assimilato, per l'epoca che precede i programmi del 79, alla grande diffusione delle teorie piagettia-

---

[4] Si tratta dell'accezione A assegnata alla parola da D'amore in B. D'Amore e F. Frabboni: *Didattica generale e didattiche disciplinari* F.Angeli 1996.

[5] Sul versante italiano non possiamo non citare Federico Enriques e per una ricostruzione complessiva della sua Figura consigliamo a cura di O. Pompeo Faraconi: Federico Enriques , Approssimazione e verità, Belforte, Livorno, 1982.

[6] Per una analisi storico/epistemologica del bourbakismo v. G. Israel, Il bourbakismo in AA.VV. Matematica e Fisica, struttura e ideologia, De Donato, 1977.

[7] *Documento dell'accademia delle scienze francese* NUMI marzo 1978 Anno V n.3.

ne sullo sviluppo dell'intelligenza nel bambino e nell'adolescente, teorie nelle quali l'uso di concetti matematici, applicati alla interpretazione e alla rappresentazione della genesi dell'intelligenza rafforzava l'idea che la matematica, attraverso le sue strutture fondamentali, potesse essere un elemento indispensabile nell'educazione per lo sviluppo dell'intelligenza. Si trattava evidentemente di un grande equivoco poiché concetti matematici che erano serviti a rappresentare e spiegare condotte intelligenti divennero oggetto di apprendimento scolastico, nella vana speranza di poter facilitare o anticipare il passaggio degli studenti da uno stadio piagettiano al superiore. La Scuola francofona ha sperimentato con grande entusiasmo, e con scarso successo, un curricolo centrato sulla *matematica moderna* e sullo strutturalismo, verificando rapidamente i rischi di un approccio troppo astratto e formale.

Il quinto contesto, quello delle applicazioni, ha giocato un forte ruolo propulsivo riservando alla matematica un posto importante nel curricolo, sia come quantità di ore sia come vastità degli obiettivi e dei contenuti. A livello internazionale, l'attenzione per l'educazione scientifica e tecnologica, e in particolare per quella matematica, si ravviva negli anni sessanta con lo shock dello Sputnik in cui lo scontro decisivo tra i due sistemi politici ed economici dell'epoca doveva giocarsi anche attraverso la diffusione della formazione scientifica e tecnologica nelle nuove generazioni. L'attenzione agli aspetti applicativi della matematica nasce quindi anche dalla fiducia che una formazione scientifica e matematica possa essere un fattore di sviluppo economico per tutta la società.

Se questi sono i tratti del panorama di sfondo, seppur in modo molto schematico, possiamo ricordare alcuni protagonisti e alcune tappe del processo che ha portato alla stesura dei programmi.

Nell'immediato dopoguerra (1950) vi è stata la costituzione della CIEAEM[8] (Commissione per lo Studio e il Miglioramento dell'Insegnamento della Matematica) formata da matematici e da insegnanti che promuove convegni annuali, rappresenta per molti anni un punto di incontro e di confronto di varie tendenze e promuove tra i suoi partecipanti azioni in-

[8] Non esistono gli atti delle prime *rencontres* della Commissione che sono stati pubblicati regolarmente solo a partire dal 1976 in occasione dell'incontro di Louvain la Neuve. In occasione dell'incontro di Villa Falconieri Frascati 1985 L.Felix preparò un *Aperçu historique de la CIEAEM* (poligrafato e diffuso tra i membri attivi) contenente una ricca ricostruzione dell'influenza della Commissione del processo di rinnovamento dell'insegnamento matematico in campo europeo.

novative e ricerche nei vari paesi. Tra i primi fondatori G. Choquet (matematico) J. Piaget (psicologo) C. Gattegno (pedagogista). Tale commissione, ad esempio, organizzò nel 1974 a Bordeaux un convegno, tra i primi del genere, dedicato all'introduzione delle probabilità nell'insegnamento primario e secondario. Anche altri gruppi internazionali quali il CBPM (Centre Belge de Pedagogie de la Mathematique) che fa capo fin dagli inizi degli anni 60 alla scuola di F. Papy e successivamente, agli inizi degli anni 70, il GIRP (Groupe International de Recherche et Pedagogie de le Mathématique), operano coinvolgendo gruppi di insegnanti attivi nell'aggiornamento, nella sperimentazione didattica e nella produzione di libri di testo.

L'Unione Matematica Internazionale (IMU), attraverso la sua Commissione per l'Educazione Matematica (ICMI) fondata già agli inizi del secolo e di cui fu primo presidente F. Klein, dà l'avvio nel 1969 a periodici congressi internazionali dedicati ai problemi dell'insegnamento della matematica. Soprattutto i primi, Lione, Exeter, Karlsruhe, determinano una forte rottura rispetto alle concezioni tradizionali rendendo possibile un ricco scambio tra la ricerca matematica e il mondo della scuola. Anche l'UNESCO sponsorizza riunioni e pubblicazioni come il volume del 1972 tradotto in italiano nel 1983 dalla SEI con il titolo *Tendenze attuali dell'insegnamento della matematica.* In Italia l'UMI fin dal 1964 con i programmi di Frascati per il Liceo svolge una azione propulsiva e di animazione coinvolgendo sempre più largamente i docenti della scuola secondaria. Parallelamente anche la Mathesis, associazione di insegnanti di matematica, è attiva nella sensibilizzazione degli insegnanti in particolare sotto la presidenza di B. De Finetti.

Grande influenza nel dibattito italiano sull'educazione scientifica hanno avuto le traduzione di alcuni progetti inglesi in particolare il Nuffield (fondato nel 1963), l'SMP partito analogamente agli inizi degli anni 60[9], l'Open University etc. segnati da una impostazione interdisciplinare, sperimentale, attiva. Per la matematica la diffusione di tali materiali, che rapidamente hanno influenzato anche l'impostazione di molti libri di testo innovativi, ha permesso di contrastare qualche eccesso sul versante della formalizzazione e dell'astrazione. Sicuramente l'esempio dell'SMP ha fortemente accreditato presso il pubblico italiano l'introduzione della statistica e delle probabilità e il modello ciclico della realizzazione dei curricoli. La stessa ripartizione in temi dei programmi riflette in parte quella prevista nel progetto SMP.

[9] School Mathematics Project progetto di curricolo matematico per la scuola comprensiva inglese di cui l'UMI curò la traduzione in italiano per i tipi della Zanichelli nel 1972.

La traduzione delle opere di Polya[10] diffondevano un'impostazione più tipicamente americana centrata sull'apprendimento attivo e sulla centralità della soluzione di problemi nell'apprendimento della matematica. Rafforzata dal successo di proposte pedagogiche legate all'attivismo al gioco e alla scoperta, Bruner è l'autore più conosciuto, il *problem solving* assurge a metodologia capace di conciliare le varie correnti, più o meno formaliste. Le posizioni di B. De Finetti e i lavori G. Prodi[11] rafforzano l'idea che i nuovi temi siano contesti adatti a fornire nuove situazioni problematiche in cui sviluppare il lavoro di ricerca dei ragazzi più legate al reale di quanto non siano gli esercizi - problema tradizionali.

I lavori di T. Varga, tradottisi in significative innovazioni del curricolo del suo paese, furono alla base di una delle prime ricerche sperimentali italiane concernenti il curricolo di matematica della scuola primaria il RICME (1976-1980)[12]. Da questo versante viene un rafforzamento dell'idea che tra logica, insiemi e probabilità siano possibili delle sintesi attraverso il gioco, la risoluzione dei problemi e la scoperta, con attività didattiche proponibili sin dai primi anni della scuola elementare.

Un altro protagonista della nostra storia è il materiale strutturato[13]: in questa oscillazione tra concreto e astratto tra tradizione ed innovazione, giocò un ruolo forte l'idea che attraverso la manipolazione di materiale didattico fosse possibile rendere più concreto ciò che poteva apparire troppo astratto, promuovere la scoperta e stimolare comportamenti attivi e non solo ricettivi[14].

---

[10] G. Polya, *Come risolvere i problemi di matematica. Logica e euristica nel metodo matematico*. Feltrinelli 1967 e G. Polya, *La scoperta matematica,* 1962 con traduzione italiana Feltrinelli 1971.

[11] Al ritorno dal seminario di Lucca ho ricevuto la Lettera Pristem n.24 contenente un articolo di G. Prodi che traccia, da protagonista, un interessante profilo storico del periodo che stiamo esaminando. Non ho modificato il mio testo, già distribuito a Lucca, ma consiglio vivamente il lettore che voglia approfondire queste tematiche di riferirsi a G. Prodi, Una scuola senza memoria, in *Lettera Pristem* n. 25 Springer, Milano, Giugno 1997.

[12] RICME Rinnovamento del Curricolo Matematico Elementare. A. Armando Roma 1979 e CETEM Milano 1985.

[13] G. Gattegno, W. Servais, E. Castelnuovo, J. Nicolet. J. Gletcher, L, Motard, L. Campedelli, A. Biguenet, W. Feskeh, P. Puig-Adam *Le Matériel pour l'Enseignement des Mathématiques*, Delachaux et Niestle Neuchâtel 1958, tradotto nel 1965 da La Nuova Italia Firenze.

[14] U. Pampallona, I materiali strutturati, in *Scuola e città*, 9-10, 1965, pag. 584 e seg.

Il quadro non sarebbe completo se non si citasse infine il lavoro di Emma Castelnuovo: membro della CIEAEM sin dai primi incontri, autrice di un diffuso libro di testo spesso aggiornato e rivisto, ha rappresentato la tradizione geometrica, dinamica e intuizionista di Guido Castelnuovo e Federico Enriques. Per prima ha pubblicato in Italia un libro di didattica della matematica (per altro tradotto in molte lingue) in cui molti di noi giovani studenti di matematica scoprirono le implicazioni pedagogiche e psicologiche dell'apprendimento matematico[15]. Nel 1972 e nel 1974 realizzò, nelle sue classi della scuola media Tasso, due mostre di matematica centrando l'attenzione della sua scelta pedagogica sul rapporto tra matematica e realtà.[16] Si tratta di un'attività affatto isolata, legata a numerosi contatti internazionali, tra cui molto importante l'Ecole Decroly di Bruxelles, tanti colleghi in Italia e un gruppo molto affiatato a Roma[17]. Quest'ultima citazione, oltre ad essere una affettuosa nota autobiografica, intende tra l'altro sottolineare il fatto che la stesura dei programmi sintetizza una fase di elaborazione fortemente partecipata da un numero assai vasto di docenti di scuola secondaria in un clima di adesione e di speranza di cui forse si è persa memoria.

Dallo scenario sin qui tracciato discende una possibile spiegazione sia della forza sia della debolezza dei programmi di scuola media: la commissione che ha steso i programmi, in cui gran parte dei protagonisti del dibattito era direttamente o indirettamente rappresentata, ha raccolto un po' tutte le istanze, dall'aggiornamento dei contenuti, alla definizione delle metodologie creando una impalcatura entro la quale le varie scuole di pensiero potevano ritagliare un percorso compatibile con la norma e coerente rispetto alla propria opzione didattica.

Questa scelta comporta due ovvie conseguenze. La prima è che i programmi appaiono eccessivamente vasti ed impegnativi nell'ipotesi che li si voglia sviluppare integralmente, con obiettivi forse troppo generali ed ambiziosi. La seconda è che non sono abbastanza prescrittivi da identificare ciò che è indispensabile e da permettere un effettivo controllo della loro attuazione.

---

[15] E. Castelnuovo, *La didattica della matematica*, La Nuova Italia , 1963

[16] E. Castelnuovo, *Documenti di un'esposizione di matematica*, Boringhieri. 1972 ed E. Castelnuovo, M. Barra, *Matematica nella realtà*, Boringhieri, 1976.

[17] Emma Castelnuovo, Lina Mancini, Ugo Pampallona, Liliana Ragusa Gilli, e il giovane Michele Pellerey.

La giustapposizione dei temi, necessaria nella stesura di un documento formale con valenze amministrative, avvalora una interpretazione a mosaico formalizzata in capitoli distinti nei libri ed in unità didattiche differenziate nelle classi proprio a spese di una possibile *integrazione* dei vari temi e a spese proprio dei temi nuovi. E' quanto emerge dai dati che ora stiamo per esaminare.

La realizzazione del curricolo

Nel 1986, a quasi 10 anni dall'introduzione dei programmi di matematica di scuola media, e successivamente nel 1996, mi sono occupato al CEDE Villa Falconieri di una indagine valutativa denominata VAMIO[18] (Verifica Abilità Matematiche Istruzione dell'Obbligo) avente lo scopo di verificare lo stato di attuazione dei programmi.

Tale verifica si basa sull'accertamento mediante un test oggettivo degli apprendimenti conseguiti dai ragazzi alla fine della terza media, e sulla rilevazione di quanto i docenti dicono del curricolo effettivamente svolto. Purtroppo i confronti diacronici tra le due somministrazioni sono stati pubblicati sono in rapporti tecnici interni e potremo fare solo qualche cenno provvisorio.

Dal confronto emerge una sostanziale stabilità della situazione con un leggero miglioramento nel punteggio del test. Sia detto per inciso, questo risultato contraddice comunque una diffusa aspettativa circa un peggioramento dei livelli di apprendimento. Meraviglia meno se si osservano i risultati ottenuti in numerose altre somministrazioni del test VAMIO avvenute in varie realtà locali in cui appunto si trovano quasi sempre dati molto stabili.

Ma per ciò che concerne il nostro discorso, la parte dei risultati che più ci interessa è quella sul curricolo reale dichiarato dai docenti. Nel 1986 era emerso un profilo del programma che è stato riscontrato puntualmente anche nella rilevazione del 1996.

Ai docenti tra le altre cose era stato chiesto di dichiarare l'importanza che i vari argomenti del programma aveva nella loro programmazione. L'importanza era identificata come tempo dedicato in classe a sviluppare un determinato argomento. Tale variabile 'importanza', una scala a sei valori,

---

[18] Il rapporto generale della ricerca è stato pubblicato nel maggio 1988 nella collana **I quaderni di Villa Falconieri** con il titolo *Il rendimento in Matematica in Italia alla fine della Scuola Media.* Altri risultati dell'indagine sul curricolo reale sono stati pubblicati in vari altri interventi, tra gli altri, in un rapporto dell'UNESCO curato da David F. Robitaille dal titolo *Evaluation and Assessment in Mathematics Education*, Parigi 1989.

si è rilevata ad una accurata analisi statistica abbastanza attendibile sebbene fosse passibile di una certa ambiguità nella sua definizione. Il primo risultato eclatante è la mancanza di accordo tra i docenti: lo stesso argomento trascurato da alcuni è svolto con intensità da altri, ma ciò e perfettamente compatibile con l'impostazione dei programmi. Nonostante questa variabilità di scelte, si è notato che i 157 argomenti in cui era stato suddiviso il programma potevano essere classificati in tre categorie:

- argomenti in cui i valori modali dell'importanza erano 1 o 2 e che cioè erano in sostanza non svolti o solo brevemente accennati,
- argomenti in cui valori modali erano 4 o 5 e che cioè era svolti in modo accurato per più di venti ore o ripresi in più anni,
- gli altri in cui la distribuzione delle scelte era in genere bimodale separando il campione dei docenti in due parti non concordi.

In base a questa classificazione il programma dichiarato dai docenti si ristruttura in tre parti: un *core curriculum* su cui c'è un buon accordo per una trattazione intensiva, accurata e diffusa, un curricolo *escluso* che la maggior parte degli intervistati concordemente dice di non svolgere e un curricolo *opzionale* su cui il campione dei docenti sostanzialmente si divide in parti che compie scelte assai differenziate. La lista seguente distingue le tre categorie di temi attraverso un diverso incolonnamento: gli argomenti più a sinistra sono quelli del curricolo comune che ha una maggior enfasi, quelli più a destra costituiscono la parte esclusa mentre quelli incolonnati più al centro costituiscano la parte cosiddetta opzionale.

Geometria prima rappresentazione del mondo fisico

1 Studio delle figure del piano a partire da modelli naturali	
	2 Costruzione del triangolo con materiale
3 Disegno di figure geometriche piane	
4 Nomenclatura relativa ai poligoni	
	←5 Rappresentazione di Venn dell'insieme dei poligoni
6 Calcolo di perimetri ed aree di quadrilateri	
	7 Simmetrie nel quadrato
	8 Simmetrie nei quadrilateri
	9 Assi di simmetria nei triangoli
10 Figure equivalenti	
	11 Convessità e concavità dei poligoni
12 Studio di poligoni regolari	

13 Il teorema di Pitagora
14 Appl. di Pitagora alla soluzione di problemi geometrici
15 Uso di riga squadra e compasso nelle cost.geometriche
16 Il problema del calcolo del pi greco
17 Problema della quadratura del cerchio
18 Poligoni iscritti e circoscritti
19 Tangenza tra circonferenza e rette
20 Angoli alla circonf. e angoli al centro
←21 Posizioni reciproche di rette nello spazio.
22 Diedri
23 Angoloidi
24 Studio delle fig. solide a partire da modelli naturali
→25 Poliedri regolari
26 Assi di simmetria in poliedri regolari
27 Rel. di Eulero tra gli elementi di un poliedro
28 Cubo
29 Sezioni piane del cubo
30 Parallelepipedo
31 Prisma
32 Piramide
33 Cilindro
34 Cono
35 Sfera
36 Sezioni piane del cono e dei cilindro
37 Solidi composti

Insiemi numerici

1 Insieme dei numeri naturali
2 Sistemi di numerazione antichi
3 Sistema metrico decimale
4 Aritmetica dei pari e dei dispari
5 Operazioni con numeri relativi
6 Confronto di numeri relativi
7 Rappresentazione grafica di numeri relativi
8 Frazione come operatore
9 Frazioni equivalenti
10 Concetto di rapporto
←11 Percentuali.

12 Espressioni con numeri razionali.
13 Proporzioni
14 Calcolo di un termine incognito in una proporzione.
15 Applicazioni di proporzioni alla soluz. di problemi
←16 Rappr. dei razionali sulla retta orientata.
17 Scrittura decimale dei numeri razionali
18 Decimali limitati e decimali periodici.
19 Sistema di numerazione in base 2.
20 Sistemi di numerazione in base diversa da dieci.
←21 Ordine di grandezza
22 Operazioni numeriche dirette e inverse
23 Proprietà delle operazioni numeriche.
24 Elevamento a potenza
25 Regola per l'estrazione di radice quadrata.
26 Metodi per il calcolo appross. della radice
27 Multipli e divisori comuni a più numeri.
28 Scomposizione in fattori primi.
29 Regole per il calcolo del MCD e mcm.
30 Esercizi di calcolo esatto e approssimato
←31 Appross. successive come avvio ai numeri reali.
32 Uso ragionato di tavole numeriche.
33 Uso di calcolatori tascabili.

Matematica del certo e matematica del probabile

1 Affermazioni di tipo vero falso e di tipo probab.
2 Connettivi logici
3 Circuiti elettrici
←4 Operazioni logiche e operazioni tra insiemi
5 Rilevamenti statistici
6 Areogrammi
7 Ideogrammi
8 Istogrammi.
9 Cartogrammi.
10 Frequenza assoluta.
11 Frequenza relativa.
12 Percentuali.

13 Media aritmetica semplice.
14 Rilevazione statistica
15 Fasi di un'indagine statistica
16 Variabili discrete e continue
17 Serie e seriazioni
←18 Vari tipi di tabelle
19 Moda
20 Mediana.
21 Media aritmetica ponderata.
22 Leggi sperimentali e interpolazione.
23 Campionamento.
←24 Statistica e probabilità.
25 Media geometrica semplice.
26 Proprietà della media aritmetica
27 Dispersione
28 Numeri indice
29 Curva di Gauss
30 Estrapolazione
31 Rappresentazioni grafiche in coord. polari
32 Proprietà della mediana
33 Correlazione.
34 Tavole di numeri casuali.
35 Struttura di popolazioni per età.
36 Accrescimento di popolazioni.
37 Caratteristiche dei censimenti.
38 Frequenze

Problemi ed equazioni

1 Individuazione di dati e variabili in un problema.
←2 Diagrammi di flusso.
3 Impostazione di espressioni per la soluzione di un problema.
←4 Calcolo di espressioni *geometriche.*
5 Lettura, scrittura, uso e trasformazioni di semplici formule.
6 Equazioni numeriche di primo grado.
7 Disequazioni numeriche di primo grado.

Il metodo delle coordinate

1 Metodo delle coordinate in situazioni concrete.

2 Lettura di carte topografiche e geografiche.

←3 Coordinate di un punto sulla retta.

4 Coordinate di un punto sul piano.

5 Rappresentazioni di poligoni sul piano quadrettato.

6 Rappres. cartesiane di semplici leggi.

7 Rappres. grafica della crescita esponenziale.

→8 Rappres. cartesiana della proporzionalità diretta

→9 Rappres. cartesiana della proporzionalità inversa.

←10 Rappres. cartesiana della dipendenza quadratica

←11 Equazioni di rette per l'origine.

12 Equazioni di rette parallele

13 Equazioni di rette generiche.

←14 Cond. di perpendicolarità tra due rette.

15 Rappresentazione grafica di disequazioni

16 Applic. a problemi di programmazione

17 Studio analitico delle coniche

Trasformazioni geometriche

1 Misure di angoli.

←2 Uso del goniometro.

3 Costr. geom. di una bisettrice di un angolo.

4 Somma degli angoli interni e esterni di un triangolo.

5 Movimenti rigidi del piano

6 Traslazioni

7 Rotazioni

8 Simmetrie

9 Insieme delle isometrie e operazioni di composizione

10 Omotetie

11 Similitudini piane

12 Proprietà di figure simili

13 Rapporto tra le aree di figure simili.

14 Riduzioni in scala.

15 Osservazione di ombre sul piano.
16 Proprietà delle trasformazioni affini.
17 Equazioni dell'affinità
18 Equazioni della similitudine.
19 Equazioni delle simmetrie rispetto agli assi
20 Rappresentazioni prospettiche.
21 Immagini deformate.

Corrispondenze e analogie strutturali

←1 Concetto di relazione.
2 Concetto di corrispondenza
→3 Concetto di funzione.
4 Ricerca e scoperta di analogie di struttura.

Senza voler dare a tale schematizzazione un valore eccessivo e tenendo comunque in conto che argomenti di per sé ridotti dovevano comunque avere una enfasi ridotta, si concluse, nel primo rapporto, che l'innovazione introdotta dai programma trovava delle resistenze sia nella diffusa persistenza delle parti più tradizionali, sia nel rischio di interpretazioni riduttive che optavano per l'aggiunta per questa o quella parte del programma più vicine alla 'opzioni' culturali del docente. In particolare i nuovi temi, rimanendo nell'area opzionale o esclusa, sembravano avere un'importanza ancora marginale, scarsamente integrati con il resto dell'attività didattica.

La situazione rilevata nella seconda somministrazione 10 anni dopo è praticamente identica. Usando lo stesso tipo di elaborazione delle scelte dei docenti si perviene praticamente alla stessa struttura del programma, solo con leggeri spostamenti di qualche argomento da una colonna a quella adiacente. Tali spostamenti sono segnalati nell'elenco da freccette che indicano il verso dello spostamento. Ad esempio la *rappresentazione di Venn dell'insieme dei poligoni* passa dalla parte esclusa a quella opzionale. Tali spostamenti sembrano denotare un tendenza positiva soprattutto a favore di qualche argomento di geometria analitica secondo un'impostazione maggiormente applicativa.

Anche sui nuovi temi la situazione sembra stabile con una distribuzione delle scelte dei docenti praticamente identica nell'intervallo di tempo considerato. Nella tabella seguente sono messe a confronto per ogni argomento le percentuali di risposta per ciascun livello di importanza, la riga superiore si riferisce alle distribuzione dell'86 mentre quella inferiore al 96. La colonna ***Var*** riporta le differenze tra le medie della variabile *importanza*. In genere si hanno scostamenti negativi tranne che per pochi argomenti quali ‘operazioni logiche e operazioni tra insiemi, tabelle, moda, mediana’; si riscontra cioè una diminuzione, seppur lieve, dell’importanza di questo tema.

	Importanza						
	0	1	2	3	4	5	***Var***
1 Affermazioni vero falso e di tipo probab.	15	25	30	14	13	3	-0,16
	21	29	23	7	19	1	
2 Connettivi logici	43	18	21	10	7	1	-0,22
	48	22	19	5	7	0	
3 Circuiti elettrici	49	16	20	11	4	1	-0,33
	59	18	15	4	4	0	
4 Operazioni logiche e operazioni tra insiemi	36	14	23	15	10	1	0,30
	23	17	29	18	12	1	
5 Rilevamenti statistici	17	16	29	21	13	3	-0,24
	19	24	28	18	11	1	
6 Areogrammi	8	21	32	22	16	2	0,02
	2	24	37	19	16	1	
7 Ideogrammi	9	26	31	18	15	2	-0,05
	6	27	39	14	13	1	
8 Istogrammi.	7	21	30	23	17	3	-0,06
	4	21	40	17	16	1	
9 Cartogrammi.	29	21	24	14	11	2	-0,37
	41	21	21	8	9	1	
10 Frequenza assoluta.	30	27	26	12	6	1	-0,30
	37	27	26	6	3	0	
11 Frequenza relativa.	30	25	27	12	6	1	-0,23
	36	25	27	8	4	1	
12 Percentuali.	7	11	30	28	21	3	-0,01
	3	16	35	21	22	4	
13 Media aritmetica semplice.	11	29	33	16	10	1	-0,18
	11	37	34	10	8	1	
14 Rilevazione statistica	29	18	25	15	11	2	-0,19
	29	25	26	11	8	1	
15 Fasi di un’indagine statistica	35	21	24	12	8	1	-0,06
	34	23	26	10	6	1	
16 Variabili discrete e continue	70	13	11	4	3	0	0,03
	70	12	10	4	4	1	

	Importanza						
	0	1	2	3	4	5	*Var*
17 Serie e seriazioni	82	7	6	2	3	0	-0,04
	83	7	6	1	3	0	
18 Vari tipi di tabelle	41	18	19	9	12	2	0,35
	26	24	23	8	16	3	
19 Moda	45	23	19	7	5	1	0,10
	33	34	21	8	4	1	
20 Mediana.	44	23	20	8	5	1	0,06
	34	33	21	7	4	1	
21 Media aritmetica ponderata.	58	17	15	6	4	0	0,05
	51	24	17	5	2	1	
22 Leggi sperimentali e interpolazione.	70	10	11	5	4	0	-0,18
	75	13	9	1	2	1	
23 Campionamento.	58	20	13	4	4	1	-0,07
	57	26	10	4	3	0	
24 Statistica e probabilità.	29	17	27	15	10	2	-0,03
	23	20	34	16	6	1	
25 Media geometrica semplice.	64	17	12	4	3	0	-0,19
	73	14	9	3	1	0	
26 Proprietà della media aritmetica	68	14	11	4	2	0	-0,02
	67	17	12	3	0	0	
27 Dispersione	83	9	4	2	1	0	-0,07
	85	10	4	1	0	0	
28 Numeri indice	84	8	5	2	1	0	-0,11
	88	9	4	0	0	0	
29 Curva di Gauss	57	24	13	3	2	0	-0,13
	61	28	8	2	1	0	
30 Estrapolazione	81	11	5	2	1	0	-0,08
	85	11	3	1	1	0	
31 Rappresentazioni grafiche in coord. polari	83	7	5	3	2	0	-0,10
	85	8	6	1	0	0	
32 Proprietà della mediana	80	11	5	2	2	0	0,10
	75	13	8	3	1	0	
33 Correlazione.	86	7	5	1	1	0	-0,04
	88	7	3	1	0	0	
34 Tavole di numeri casuali.	90	5	3	1	1	0	-0,07
	94	3	3	1	0	0	

Integrazione intorno a concetti chiave

Il quadro, sofferto e ricco, che ha generato la complessità dei programmi di scuola media ci suggerisce che il problema dell'integrazione delle varie parti e dei vari temi non si può esaurire nel semplice coordinamento tra lezioni e nella più accurata pianificazione delle attività: si tratta di una questione più difficile, legata fortemente ad un approccio culturalmente ricco ai vari contenuti. La difficoltà sta nel riuscire a creare tra le varie attività un potenziamento reciproco che potrebbe anche determinare un certo risparmio di tempo nella stessa attività di classe. Occorrerebbe aver ben presenti alcune idee guida principali, alcune abilità fondamentali intorno alle quali costruire linee di lavoro coerenti ed integrate. Tenteremo qui di suggerire un percorso integrato su un contenuto del programma riflettendo su quale intricata rete di connessioni si può giocare per gettare lungo tutto l'arco dei tre anni dei ponti tra attività e concetti apparentemente distanti tra loro.

Concetto di funzione

Cercherò di sviluppare questa riflessione accennando a tre aspetti, tre punti di vista, quello storico, quello psicologico e quello didattico allo scopo di evidenziare alcune delle molteplici implicazioni di un concetto solo apparentemente semplice.

Aspetti storici

Se proviamo a risalire alle origini storiche del concetto di funzione troviamo che queste risalgono a epoche molto remote addirittura all'epoca preellenistica. Se si pensa alle tabelle babilonesi a doppia colonna in cui erano riportate da una parte i tempi e a fianco i valori degli angoli allo scopo di indagare sul moto degli astri o se si riflette sulla misurazione del tempo fatta dagli egiziani in base alla lunghezza dell'ombra di un bastoncino possiamo dire che l'idea di funzione, come dipendenza di una grandezza da un'altra era già presente in un'epoca ben anteriore alla matematica greca. Nella matematica greca la nozione di funzione, come dipendenza dal tempo, sembra arrestarsi e non evolve come invece accade ad altre parti della matematica. Le ragioni di tale difficoltà possono essere fatte risalire

- alla mancanza di un simbolismo adeguato a rappresentare leggi in modo compatto,
- alla difficoltà a trattare questioni legate al continuo e all'infinito per il blocco posto dai paradossi di Zenone,

- alla difficoltà, ancora forse legata a Zenone, a sanare l'apparente contraddittorietà tra la percezione della realtà fisica e l'astrazione matematica.

La ricerca di perfezione e di equilibrio propria della mentalità greca probabilmente porta Aristotele ad assimilare ogni legge di dipendenza alla proporzionalità e ha reso difficile la formazione di un pensiero dinamico. '*La scienza greca fu una scienza di riposo e di equilibrio: geometria e statica*'[19].

La nascita matematica della nozione di funzione è il frutto del profondo e vasto rivolgimento operato dall'opera di grandi matematici e fisici quali Galilei, Keplero, Leibnitz e Newton. Per la verità un pensatore del tardo Medio Evo, Nicola d'Oresme, preludeva ai lavori di Galileo facendo l'ipotesi che il moto di caduta dei gravi fosse uniformemente accelerato e facendo per primo uso dei grafici. Ma è con Galileo che si riesce ad esprimere la legge di caduta dei gravi mediante una formula; egli affronta il problema della corrispondenza tra insiemi infiniti, tratta questioni concernenti il continuo, opera una forte riconciliazione tra conoscenza empirica e astrazione matematica.

Successivamente attraverso la geometria analitica ci si rende conto della priorità e della maggiore semplicità di considerazioni algebriche rispetto alle classiche costruzioni geometriche e si passa dalla concezione della funzione come grafico di d'Oresme a quella di legge esprimibile in forma analitica cioè con operazioni algebriche.

In sintesi si può affermare che la nozione sia nata da un contesto segnato dai progressi nel campo delle notazioni algebriche, da una visione più dinamica della realtà, da un maggiore interesse della matematica per le applicazioni, dalla nascita della geometria analitica e dell'analisi infinitesimale.

Schematizzando molto, le tappe dell'evoluzione della definizione di funzione potrebbero essere le seguenti:

D'Oresme	*Funzione come descrizione di un fenomeno che varia nel tempo espressa tramite grafici*
Definizione classica	*... legge ...... esprimibile in forma analitica cioè con operazioni algebriche*
Gregory (1667)	*.... e di ogni altra operazione immaginabile*

La rottura determinata dallo studio dello sviluppo in serie e la necessità di definizioni matematicamente più rigorose e generali portarono ad un impoverimento di significato della nozione di funzione: si perde l'idea di varia-

[19] Josè Silva, *Compendio de Algebra*. LPFF, Lisbona, 1957.

zione, di variabile indipendente come parametro temporale, l'idea di causalità[20].

Con Leibnitz *x è elemento generico di un insieme qualunque* ed Eulero nota che: *Quantitas variabilis est quantitas indeterminata seu universalis, quae omnes omnino valores determinatos in se complectitur.* Con Eulero si arriva all'interpretazione di funzione come applicazione, come *sottoinsieme del prodotto cartesiano di due insiemi* ovvero come *caso particolare di relazione binaria.*

Aspetti psicologici

Interessante notare che la scuola di Piaget, affrontando la questione della genesi e dell'evoluzione del concetto di funzione si chiede se anche nel pensiero del bambino si ripercorra lo stesso processo intervenuto a livello storico[21].

Mentre per un bambino è facile mettere in relazione due oggetti concreti, ad esempio sfruttando la loro posizione reciproca, non è altrettanto facile pensare ad un oggetto come funzione di un altro. 'Ciò significa- si chiede il Grize- che il processo di mettere in relazione è in qualche maniera più primitivo di quello di mettere in rapporto funzionale? Che la funzione appartiene a uno stadio di astrazione più elevato di quello di relazione? Sembrerebbe di no visto che certe relazioni sono il risultato di rapporti di tipo funzionale." Il Grize analizza appunto il passaggio dalla nozione classica di funzione a quella moderna di applicazione giungendo alla conclusione che la nozione di funzione merita una considerazione a parte proprio perché vi sono dei caratteri che la rendono più ricca e comunque ben individuata rispetto alla nozione di relazione. In particolare sottolinea che nel concetto di funzione gioca un ruolo importante la dinamicità della variazione, spesso pensata nel tempo, l'idea che la legge di dipendenza esprima un nesso causale tra due grandezze variabili, la possibilità di specificare in termini di operazioni aritmetiche il modo in cui y dipende da x ovvero la costruttività e calcolabilità della legge. Alla base di tutto c'è l'idea di *conservazione,* per poter ammettere che un fenomeno che si vuol descrivere si ripeterà sempre nello stesso modo a parità di condizioni, altrimenti non si può parlare di legge.

---

[20] M.A. Malik, Historical and pedagogical aspects of the definition of function. *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.,* 1980, vol 11, n.4, 489-492.

[21] J.B. Grize, A. Szeminska. T. Vinh Bang. *Epistèmologie et psycologie de la fonction.* Paris, P.U.F. 1967.

Punto di vista didattico.

Le problematiche storico-epistemologiche e quelle psicologiche ci conducono a riflettere sui numerosi problemi posti dalla conduzione di un percorso didattico. Notiamo innanzitutto il forte parallelismo tra i due precedenti punti di vista ed anche le evidenti tracce riscontrate nella panoramica del dibattito culturale che ha generato i programmi della scuola media.

Citerò alcuni esempi di attività didattiche relativamente consuete che si prestano a uno sviluppo integrato del concetto che stiamo trattando.

Sin dai primi giorni di scuola si può affrontare il problema della costruibilità di un triangolo, dati tre segmenti arbitrari, presentato come problema aperto in cui i ragazzi possono manipolare concretamente delle asticelle di varia lunghezza, avendo tempo sufficiente per tentare. E' un'esperienza in cui i ragazzi possono sbagliare, discutere, sono messi nella condizione di dover trattare una infinità di casi possibili, di dover verbalizzare le loro ipotesi, di dover cercare di generalizzare ciò che hanno osservato in qualche singolo caso. Un argomento di geometria statica, se affrontato in modo attivo ed aperto, può stimolare una visione dinamica e attivare contemporaneamente quel processo di affinamento del linguaggio, considerato come uno degli obiettivi del tema della logica.

Stessa situazione con la variazione dell'area di un rombo articolabile. L'insegnante muove opportunamente la figura che i ragazzi osservano dal banco: è possibile affrontare sin dall'inizio della scuola media proprio la necessità di studiare in modo continuo la variazione di una grandezza rispetto a un'altra. Senza che si parli di funzioni e rimanendo al semplice livello qualitativo possono emergere in questa semplice esperienza svariate difficoltà che è utile affrontare e discutere al più presto: l'abitudine ad applicare regole di calcolo meccanicamente, rinunciando ad una analisi accurata della situazione presentata, la tendenza a considerare costante una grandezza che varia di poco (basta variare di poco l'angolo perché tutta la classe sia concorde nell'affermare che l'area non cambia per una sorta di legge di compensazione tra la diagonale che si accorcia e quella che si allunga), il rifiuto dell'evidenza del caso limite (rombo completamente schiacciato) per continuare a difendere la costanza dell'area e l'idea che ci possa essere un salto, una discontinuità nel processo che *vedono* perfettamente continuo.

Nello studio dei rettangoli isoperimetrici i ragazzi osservano uno spago legato tenuto teso tra il pollice e l'indice delle due mani. Avvicinando le dita e allontanando le mani si possono vedere rettangoli di altezza sempre minore e di base sempre maggiore. Anche questo può essere un avvio a quella visione dinamica della realtà presupposto essenziale per la nascita del concetto di funzione. Non è così ovvio per tutti che il perimetro rimanga costante né è immediata la capacità di verbalizzare correttamente la variazione concomitante della base e dell'altezza. '*Se l'altezza aumenta di 2 la base diminuisce anch'essa di 2*' riescono a dire i più bravi appoggiandosi ad un caso particolare ma più difficilmente riescono a descrivere il caso generale con espressioni del tipo '*qualunque*' '*arbitrario*' '*preso a piacere*'. L'affinamento del linguaggio verso un più accurato controllo sia della forma sia del significato di quanto viene detto passa lentamente in un ripetuto esercizio in contesti svariati e motivanti.

Non si tratta solo di arricchire il linguaggio naturale con perifrasi ipotetiche o con quantificatori ma anche di rappresentazioni simboliche capaci di sintetizzare efficacemente una situazione concreta, una idea da comunicare ad altri. Riprendendo la classica distinzione tra segno e simbolo[22], occorre evitare che il linguaggio matematico sia costituito solo da segni convenzionali privi di agganci a significati realmente pregnanti per sviluppare gradualmente l'uso di simboli di per sé carichi di molteplici e ricchi significati, condivisi con il gruppo con cui si studia e lavora. In questo senso il linguaggio insiemistico utilizzato per semplificare, schematizzare, rappresentare, classificare come negli esempi precedenti delle situazioni geometriche, può diventare un contesto molto efficace che conduce gradualmente alla rappresentazione di una dipendenza funzionale.

Occorre continuamente abituare i ragazzi ad una varietà di rappresentazioni della stessa situazione. Ad esempio lo studio dei rettangoli equivalenti permette di avere una prima rappresentazione di una curva sovrapponendo opportunamente tanti cartoncini rettangolare aventi la stessa area e ottenendo tanti vertici che individuano una iperbole: anche in questo caso occorre un salto che, superata la discontinuità dei pochi casi costruiti, riesca ad immaginare l'infittimento dei punti, la continuità della curva per arrivare infine ad una prima intuizione dell'andamento asintotico rispetto agli assi. E' ovvio che tutto ciò può apparire del tutto prematuro se non si accetta che le nuove conoscenze possono essere acquisite per gradi di approssimazione, rigore e formalizzazione progressivi.

Non posso qui entrare nel dettaglio ma proprio il fatto che una funzione possa essere rappresentata in tanti modi, tabella, grafico, mappa, equazione,

---

[22] J. Piaget, *Dal bambino all'adolescente la costruzione del pensiero*. La Nuova Italia Firenze. 1970.

quasi tutti accessibili a livello di scuola media, consente di far apprezzare agli studenti l'importanza dell'uso di un linguaggio simbolico, del linguaggio della matematica che pian piano si diversifica dal linguaggio naturale.

Nell'analisi storico-epistemologica abbiamo notato come le questioni legate all'infinito fossero connesse strettamente allo sviluppo della nozione matematica di funzione. Come abbiamo già notato lo studio di dispositivi mobili, anche molto semplici permette di analizzare sia la dinamicità del movimento sia la continuità e alcune questioni legate all'infinito: riflettere sui paradossi di Zenone, chiedersi se Ulisse riuscirà a superare la tartaruga serve a stimolare un primo distacco dalla semplice percezione del concreto verso primi processi di astrazione.

Nello studio delle trasformazioni geometriche si può passare dalla dinamicità dell'approccio intuitivo alla formalizzazione statica della corrispondenza tra punti e all'astrazione di operazioni di composizione di trasformazioni successive fino alla loro rappresentazione mediante equazioni. Anche qui è possibile familiarizzare i ragazzi con le corrispondenze tra insiemi di punti e con la possibilità di rappresentarle simbolicamente con equazioni molto semplici e sintetiche.

Solo un accenno a temi che sono entrati solidamente nella prassi didattica diffusa: lo studio di tabelle di dati, i vari tipi di rappresentazioni statistiche, la geometria analitica sono altrettanti contesti in cui il processo di costruzione del concetto di funzione può essere sviluppato e consolidato. Purtroppo, a volte, accade che rimangano come compartimenti stagni anche a causa della preoccupazione per il rigore delle definizioni e delle distinzioni tra oggetti di studio solo apparentemente diversi. Claude Janvier[23], in un lavoro che ha largamente influenzato le ricerche didattiche in questo campo ha fornito una utile schematizzazione[24] delle attività implicate nel passaggio da un tipo di rappresentazione ad un'altra.

Nella tabella della pagina seguente potremmo provare a verificare se e quanto tempo viene dedicato a ciascuna delle attività presenti in ogni cella e potremmo scoprire una eccessiva tendenza ad insistere solo su qualche cella a scapito di altre attività che restano del tutto marginali. Si vedrà molto bene che, ad esempio, gran parte delle attività svolte nell'ambito della statistica,

[23] C. Janvier, Translation processes in mathematics education in *PME80* Berkeley.

[24] Riportiamo la traduzione presente in M. Pellerey, *Esplorazioni di matematica.* Mursia 1985

dalla rappresentazione di dati statistici all'interpretazione dei grafici, possono rientrare anche nel processo di costruzione del concetto di funzione.

	situazioni disegni o descrizioni verbali	tabelle di dati	grafici e diagrammi	espressioni algebriche e formule
situazioni disegni o descrizioni verbali		misurare	fare disegni qualitativi	modelli descrittivi
tabelle di dati	leggere e interpretare		costruzione per punti	generalizzazioni
grafici e diagrammi	leggere e interpretare	corrispondenze		corrispondenze
espressioni algebriche e formule	riconoscere le formule adatte	tabulazioni e calcoli	disegno di curve	

La precedente tabella oltre ad illustrare efficacemente la ricca connessione di attività possibili e a confermare quanto si sta cercando di dimostrare (che è nostro compito di docenti pianificare un itinerario che raccordi tanti aspetti diversi dell'esperienza e della scoperta dei ragazzi integrandoli in abilità più complesse e significanti), ci permette di introdurre il secondo assunto dei questo intervento: l'integrazione delle varie parti del programma e delle varie conoscenze acquisite avviene soprattutto mediante condotte attive e non meramente recettive.

Nuovi ambienti di lavoro, il foglio elettronico e i videogiochi

Posso qui solo elencare alcuni problemi e alcuni aspetti della questione, quelli che mi sembrano più importanti sui quali cui occorrerà nel prossimo futuro condurre una approfondita riflessione.

Sta avvenendo rapidamente ciò che in passato è già successo con le macchinette calcolatrici: i ragazzi sempre più spesso possono accedere a fogli elettronici, anche piuttosto sofisticati, e passano molte ore della giornata davanti a videogiochi. Questo fatto lo possiamo vedere come una nuova opportunità oppure come un nuovo problema. Il problema sta nel fatto che molti dei nostri ragazzi accedono facilmente ad un ambiente così ricco e stimolante da acquisire nuove competenze e nuove attese che mutano l'atteggiamento nei confronti delle attività da noi proposte: ad esempio tracciare a mano un grafico statistico su un foglio a partire da una tabella di dati è un'attività che si connota diversamente per un ragazzo che abbia imparato dal fratello maggiore come si possono ottenere di splendidi grafici con un foglio elettronico. Non sto dicendo che non si debbano più tracciare a mano i grafici, ma solo che lo scenario è cambiato radicalmente.

Ma parliamo delle opportunità. Già la sola schermata di un foglio elettronico veicola implicitamente tutta una serie di fondamentali concetti matematici. Facciamo qualche esempio. Il foglio è costituito di celle individuate da coordinate ... l'asse delle y è orientato verso il basso ... i pulsanti per i comandi contengono notazioni, simboli molto astratti come ad esempio f_x per denotare una funzione in x ... vi è un pulsante che permette l'annullamento dell'ultima operazione, ovvero l'operazione inversa ... etc.

Si tratta di un ambiente di lavoro, di un laboratorio in cui è diffusa molta più matematica di quanto i nostri ragazzi di scuola media possano dominare e che impone immediatamente il rispetto di una serie di regole sintattiche perché si possa ottenere quanto ci serve. Si pensi soltanto ai vari formati in cui possiamo scrivere numeri dentro una cella, al fatto che possiamo sommare delle date o delle misure del tempo... risultati inattesi e curiosi ci costringono a rispettare notazioni precise, ad acquisire un lessico specifico simile a quello matematico. Si possono scrivere formule contenenti nomi di celle oppure riferimenti assoluti o relativi a posizioni delle celle, si possono comporre operazioni semplici ottenendo il calcolo di formule equivalenti alle usuali espressioni con parentesi. Il nesso con il tema della logica e dello sviluppo di un linguaggio formalizzato è evidente.

Una volta acquisita un minimo di familiarità con il linguaggio e con le regole, la potenza del calcolo e la velocità con cui si possono rappresentare grafici, anche piuttosto complessi, ci permette di fare più calcoli e di fare più grafici. Ad esempio diventa accessibile la rappresentazione in grafico dell'andamento della frequenza relativa dei successi all'aumentare del numero di lanci di una moneta, si possono accumulare e memorizzare dati realistici raccolti nel tempo (ad esempio le estrazioni delle monete o l'andamento dei prezzi o di una temperatura), si possono costruire elenchi di oggetti da selezionare con criteri di ricerca che fanno uso dei connettivi logici (costruire un listino prezzi o una classificazione di una collezione). L'ampia scelta di rappresentazioni grafiche di dati statistici ci permette di apprezzarne immediatamente le diverse caratteristiche, di verificare cosa succede se cambiamo unità di misura o l'origine degli assi, di distinguere tra variabili quantitative e mutabili senza dovere dettare o apprendere vuote definizioni ma verificando operativamente che se non abbiamo le idee chiare i risultati òttenuti sono proprio inaccettabili.

Concludo con un esplicito accenno alla questione dei videogiochi, una questione molto complessa di cui posso citare solo un aspetto, forse apparentemente secondario. Ancora una volta propongo di trascurare i problemi e di guardare alle opportunità.

Molti ragazzi, e il numero va aumentando, sono introdotti in ambienti artificiali molto complessi e sofisticati che non solo accrescono la loro velocità di reazione agli stimoli percettivi proposti ma veicolano rappresentazioni spaziali e grafiche, concetti matematici, nozioni che possono entrare in conflitto, o che invece potrebbero avere una positiva funzione sinergica, con il nostro insegnamento. La gamma delle esperienze condotte in modo virtuale dai ragazzi è praticamente infinita, dalla guida di un bolide, al percorso in un labirinto per sparare ai nemici, alla gestione di un luna park, alla simulazione di lunghi periodi storici, alla soluzione di enigmi polizieschi.

Tra gli altri si vanno anche diffondendo dei giochi di simulazione, un classico è *Simcity*, in cui il modello di una, città o di un sistema molto complesso, comprende la rappresentazione grafica nel tempo di varie grandezze caratteristiche quali l'inquinamento, il consumo d'acqua la distribuzione dell'età della popolazione ed altre ancora. Durante il gioco con molta naturalezza 12-13nni vivono l'esperienza del sindaco che, consultando grafici, tabelle, mappe prende decisioni, combatte contro la sorte avversa, cerca di ottimizzare guadagni o qualità della vita della propria città.

L'opportunità didattica è abbastanza evidente: modelli così particolareggiati di sistemi complessi sono una ottima occasione per acquisire, verificare, sperimentare concetti, conoscenze abilità in modo altamente integrato e contestualizzato, seppure in una realtà virtuale. Potrebbero trovare prima o poi anch'esse cittadinanza nell'attività in classe.

Certamente potrebbero trovare immediata cittadinanza giochi di simulazione[25] da realizzare con supporti poveri, schede cartacee, macchinette calcolatrici, dadi o monete. Nel testo citato, ad esempio nel gioco della fattoria

---

[25] J.L Taylor, R. Walford,. *I giochi di simulazione per l'apprendimento e l'addestramento*. Mondadori, Milano 1979

dell'Herefordshire (pag.71 del citato volume), occorre pianificare l'allocazione di colture diverse in appositi appezzamenti con rese che dipendono dal clima; il clima ha un andamento casuale regolato dall'estrazione di un dado. Se il gioco, come a Monopoli consiste nel massimizzare il guadagno in competizione con gli altri compagni della classe, si riesce finalmente ad associare la nozione di rischio alla casualità e alla probabilità, a discutere se sia meglio lasciare all'insegnante il compito di fare da Giove pluvio fissando a *caso* il clima oppure affidarsi a un dispositivo che non danneggi nessuno... e ... come fare se i climi possibili non sono 6 ugualmente probabili ma ad esempio 5 con qualche esito più probabile di altri? Posso assicurare che in un'ora o due di gioco collettivo i ragazzi avranno fatto una tale quantità di calcoli e si saranno preoccupati così spesso della accuratezza del compagno con cui erano in competizione da avere modificato o comunque migliorato sensibilmente la propria attitudine nei confronti del calcolo numerico, e avranno certamente approfondito il senso da dare alla parola probabilità.

Abbiamo iniziato parlando di bastoncini con cui costruire triangoli per finire con i videogiochi ultrasofisticati, volevamo trovare delle semplificazioni ma la prospettiva si è ampliata e si è arricchita.

La sfida rimane aperta e la nostra navigazione dentro i programmi difficilmente potrà trovare un percorso unico e stabile che sia indipendente dalla variabilità degli studenti e dall'evoluzione del mondo che ci circonda: ogni anno dovremo decidere la nostra collocazione tra tante alternative tra concreto ed astratto, tra applicativo e teorico, tra esatto e approssimato, tra comprensione ed automatismo, tra procedurale e dichiarativo, tra utile e dilettevole, tra la disciplina e lo studente, tra il formale e l'informale .... ma non è anche questo il bello del nostro lavoro?

L'INFORMATICA NELLA MATEMATICA: OCCASIONI DIDATTICHE NEL TRIENNIO DELLA SCUOLA MEDIA

Loretta Ferrante
Insegnate di S.M.C.F.N., Scuola Media Statale "Montello", Roma

Il problema informatica e strumenti informatici nella scuola media è particolarmente complicato dal fatto che non è presente nei P.M. del 1979 questa disciplina. Le esperienze che si registrano in questo campo sono le più varie e soprattutto disomogenee. Finora è stato lasciato alla libera scelta degli insegnanti decidere come, quando e quanto introdurre di questa disciplina nella propria programmazione. Ancora più problematico è allora pensare ad un possibile curricolo da introdurre a questo livello di scuola. Si possono proporre delle idee, delle tracce (vedi le successive attività), ma la mancanza di una tradizione culturale omogenea e la scarsa diffusione di esperienze rendono prioritario e fondamentale porre l'attenzione su questioni di carattere generale e metodologico.

L'informatica e gli strumenti informatici svolgono sostanzialmente tre ruoli (Boieri-Lucca 1997): a) informatica come strumento pervasivo che esula completamente dalla specificità della materia; b) informatica come disciplina a sé stante: c) informatica per la matematica.

E' di quest'ultimo aspetto che ci occuperemo.

E' necessario chiedersi e valutare con attenzione, prima di proporre una attività informatica in classe, se il computer offre un effettivo contributo per quanto riguarda l'apprendimento e lo sviluppo cognitivo, se offre un reale valore aggiunto alla didattica della matematica, se è in grado di fornire situazioni problematiche nuove e significative per la didattica della matematica. Le attività proposte non vogliono essere delle "ricette" ma esclusivamente degli spunti di riflessione, dunque non sono particolarmente dettagliate. E' rischioso generalizzare l'uso di strumenti informatici se non si sono approfondite considerazioni metodologiche; è inutile fornire unità didattiche preconfezionate se non c'è stata una attenta valutazione, da parte del docente, della valenza formativa che tali strumenti possono offrire.

Possiamo individuare quattro ambiti di applicazione dell'informatica per la matematica: a) computer come allenatore (esercizi ripetitivi, verifica di proprietà); b) computer come strumento (uso di pacchetti software);

c) computer per programmare; d) computer per comunicare.

Con le attività di seguito proposte, già sperimentate nelle classi, si è scelto di riflettere sul secondo aspetto e quindi di esaminare la valenza didattica di alcuni pacchetti software esistenti: CABRI, FOGLIO ELETTRONICO, DATABASE.

La scelta di un software rispetto ad un altro non deve essere condizionata solo dalla piacevolezza del prodotto, occorre fare attenzione ai pericoli a cui si può andare incontro: uso del pacchetto solo per la motivazione , uso finalizzato al prodotto e non all'obiettivo cognitivo, libera navigazione,...

Non bisogna sottoporre uno strumento se non si sono analizzate a priori le valenze didattiche ed eventuali conflitti cognitivi o conflitti per conoscenze non acquisite (es.: usare Excel senza che sia chiaro il concetto di funzione o ancor più semplicemente il concetto di lettera al posto del numero).

L'esperienza ha mostrato che l'introduzione di diversi pacchetti soprattutto se integrati e con logica di accesso omogenea, non provoca particolare disorientamento se essi vengono introdotti in momenti opportuni e come strumenti per risolvere problemi già concretamente affrontati (schedario-database): il computer non sostituisce l'attività operativa e concreta ma la affianca.

Nella presentazione delle attività scelte vengono premesse le valenze didattiche individuate dal punto di vista cognitivo.

CABRI-Géomètre

⇒ Favorisce la riflessione consapevole sul concetto di misura e sulla precisione degli strumenti di misura.

⇒ Non dimostra ma induce l'intuizione.

⇒ Favorisce la riflessione sugli aspetti relazionali della geometria.

⇒ Favorisce il passaggio dall'operatività all'uso delle relazioni per la costruzione di figure.

⇒ Permette la rimozione di posizioni standard delle figure.

⇒ Induce la scoperta di proprietà, la visione spaziale della geometria e l'uso consapevole di termini.

⇒ Favorisce l'insegnamento individualizzato e il recupero specifico.

⇒ Richiede conoscenze informatiche molto limitate.

ATTIVITA': **LA CIRCONFERENZA COME LUOGO DI PUNTI**

Obiettivi: - capacità di mettere in relazione enti geometrici;
- acquisizione di un linguaggio rigoroso anche in senso logico;
- scoperta di proprietà;
- costruzione del concetto di luogo geometrico;
- acquisizione del concetto di circonferenza come luogo di punti;

Prerequisiti: - capacità di rappresentare gli insiemi per caratteristica;
- conoscenza delle istruzioni base di CABRI.

In questa attività la costruzione viene suggerita dall'insegnante.

	COSTRUZIONE	COMANDI CABRI	
1	disegna un segmento	creazione	segmento
2	indica con A e B gli estremi del segmento	edizione	nomi:A e B
3	disegna due punti	creazione	punto
4	indica con C e P i due punti	edizione	nomi:C e P
5	disegna la retta passante per C e P	creazione	retta per due punti
6	trasporta il segmento AB sulla retta contenente il segmento CP, a partire da C e nella direzione di P	diversi MACRO costruzione	 trasporto di un segmento trasporto di un segmento
7	indica con Q il secondo estremo del segmento trasportato	edizione	nomi: Q
8	cancella la retta e il segmento	edizione	aspetto degli oggetti: gomma
9	disegna il luogo descritto dal punto Q al variare del punto P nel piano (fai girare P intorno a C)	costruzione	luogo di punti

I ragazzi, disposti uno per computer, dopo aver realizzato la figura con CABRI procedono con la seguente consegna:

Cancella il luogo, trascina l'estremo B del segmento AB.
Ripeti la costruzione del luogo (punto 9).
Quale figura hai ottenuto?
Formula una definizione di questa figura geometrica.

A questa consegna segue una fase di socializzazione durante la quale gli alunni confrontano le loro definizioni sotto la guida dall'insegnante (inteso come moderatore), che all'occorrenza offre nuovi stimoli.

Successivamente i ragazzi vengono divisi in gruppi di tre per computer e viene loro data la seguente consegna:

Esiste una caratteristica comune a due o più punti della circonferenza?

Esistono punti che non appartengono alla circonferenza che presentano la stessa caratteristica?
Fornisci una nuova definizione di circonferenza come insieme di punti.

Le nuove definizioni vengono discusse e l'insegnante introduce il termine "luogo di punti" che viene identificato come insieme di tutti e solo i punti che hanno una certa caratteristica.

In base alla tipologia della classe ed al livello di acquisizione degli obiettivi, è l'insegnante a decidere se proporre altre attività guidate sui luoghi geometrici e in quale momento passare alla costruzione non guidata dei luoghi stessi.

FOGLIO DI CALCOLO ELETTRONICO

⇒ Ausilio all'introduzione del concetto di variabile.
⇒ Rispetto all'uso ragionato della calcolatrice ha il vantaggio di presentare tanti numeri insieme e quindi favorisce il riconoscimento di invarianze e regolarità.
⇒ Sviluppa sensibilità sulla valutazione dell'errore e nella scelta dell'unità di misura perché esalta la relazione tra questa scelta e la forma della funzione.
⇒ Strumento utile per ideare semplici algoritmi.
⇒ Ottimizza i tempi delle ripetizioni di rinforzo quando il concetto è già stato appreso in classe.
⇒ Utile per proporre molte situazioni analoghe che differiscono per alcuni aspetti (famiglia di curve).
⇒ Favorisce l'intuizione della continuità di una funzione.

ATTIVITA': **SUCCESSIONI AL FOGLIO ELETTRONICO**

L'attività fa parte di un itinerario didattico ideato per le III classi[1] che nella sua estensione massima prevede una cinquantina di lezioni, variamente distribuite nel triennio, di cui 2/3 circa in laboratorio di informatica. L'esemplificazione riportata corrisponde al segmento iniziale dell'itinerario e può essere collocata anche nella prima classe, con obiettivo

[1] presentato al XI Convegno Internuclei (Cagliari 1-3 marzo 1990), pubblicato in Marina Rocco, "Modelli di crescita di popolazioni al F.E.". Quaderno didattico n. 10, Dip. di Scienze Matematiche, Univ. di Trieste, maggio 1991

a breve termine "il saper formalizzare"; essa deve comunque prevedere un proseguimento che si ponga come obiettivo a lungo termine (fine triennio) almeno la formazione del concetto di funzione.

L'attività si svolge in più fasi:

1. Vengono assegnate, con modalità diverse, regole per costruire successioni o loro segmenti iniziali.
   a) *Numera per 7 a partire da 12 e fino ad 8.*
   b) *Usa gli operatori per completare la sequenza:*
   $$12 \xrightarrow{+5} ? \xrightarrow{-3} ? \xrightarrow{+5} ? \xrightarrow{-3} ? \xrightarrow{+5} ? \xrightarrow{-3} ?$$
   c) *Aggiungi il numero da sostituire a ? nelle sequenze:*
   47 141 235 ? 423 517
   17 34 68 136 ? 544
   1 1 2 3 5 8 13 21 34 75 ?
   d) *Produci un elenco di numeri secondo l'istruzione:*
   "Il numero che occupa un certo posto dell'elenco si ottiene moltiplicando per 7 il numero che "conta" il posto ed aggiungendo 5 al risultato".
   e) *Scrivi i primi 20 termini della successione descritta da: $a_n=91-7*n$ dove n "conta" il posto in cui scrivi ciascun numero della successione.*
2. Si chiede di esprimere ogni legge in una forma diversa da quella assegnata, l'esempio a) viene tradotto nella forma dell'esempio b),...; vengono accettate anche forme verbalizzate "ogni numero è ottenuto sommando i due precedenti".
3. Si usa il F.E. per produrre le stesse successioni proposte nella fase 1. La forma verbalizzata è generalmente la più facile da tradurre nelle formule adatte al F.E. Quest'ultima costituisce una formalizzazione accettabile ma non sempre ottimale.
   Es.: - da 3,6,9,12,... si può ottenere la verbalizzazione "aggiungi 3 al precedente" e la formalizzazione $a_n=a_{n-1}+3$, equivalente a $a_n=3*n$.
   - da 1,4,9,16,25,... si ottiene di solito la verbalizzazione "aggiungi un dispari sempre più grande", abbastanza corretta ma meno facilmente traducibile in formule per il F.E. dell'equivalente $a_n=n^2$.

In questa fase il ruolo del F.E. è quello di un rapido strumento di verifica della correttezza della formula ideata per descrivere la successione. Se il F.E. riproduce i valori già noti, allora la formula si accetta come valida in generale.

4. Il lavoro sul F.E. deve essere presente sul quaderno, come progettazione del suo aspetto nella modalità che mostra le formule anziché i valori contenuti nelle celle.

La verifica riguarda l'obiettivo a breve termine ed avviene all'interno dei normali compiti in classe, dove vengono richieste formalizzazioni di diverso tipo sia per descrivere successioni che per altre situazioni.

DATABASE

⇒ La struttura a record favorisce l'introduzione del concetto di n-pla.
⇒ Favorisce l'attività di classificazione.
⇒ Favorisce l'uso ragionato dei connettivi logici.
⇒ Favorisce l'introduzione di codici.

ATTIVITA': **DALL'ERBARIO ALL'USO DEL DATABASE**

Obiettivo principale: utilizzo dei connettivi logici in una situazione operativa per effettuare una classificazione.

Descrizione a grandi linee dell'attività:

1. Raccogliere un insieme significativo di foglie di alberi rappresentativi di una zona o di un ambiente, o di un giardino storico, ecc..., con cui costruire un erbario secondo le modalità note della botanica.
2. Analizzare le qualità osservabili delle foglie che le differenziano: le qualità (che rappresentano le variabili dell'insieme) devono essere dicotomiche, cioè essere o non essere presenti.
3. Costruire il data base facendo in modo che ogni record corrisponda ad un albero specifico e che contenga un numero di campi logici corrispondenti alle variabili evidenziate al punto 2. I campi logici sono quelli il cui contenuto è Vero o Falso.
4. Sfruttare le caratteristiche relazionali del data base per realizzare selezioni attraverso l'uso dei connettivi logici AND e OR applicandoli su valori attesi di uno o più campi.

Utilizzare il codice binario per descrivere un sistema naturale.

Osservazioni ed esemplificazioni relative ai punti precedenti:

1. si potrebbe considerare il seguente insieme di alberi caratteristici del bosco antropizzato di collina prealpina (trevigiana): faggio, castagno, rovere, robinia, ciliegio, betulla, pioppo, carpino, olmo, tiglio, biancospino, frassino, sambuco.
2. La tabella presenta le qualità adatte per descrivere l'insieme considerato, così come possono emergere da una analisi collettiva:

a) foglia decidua stretta intera	f) foglia decidua pennato-lobata
b) foglia decidua larga intera	g) foglia decidua trifogliata
c) foglia decidua stretta dentata	h) foglia decidua palmato-composta
d) foglia decidua larga dentata	i) foglia decidua pennato-composta
e) foglia decidua palmato-lobata	l) foglia decidua bipennata

3. Ogni record potrebbe essere costituito da almeno 11 campi: il primo contenente il nome dell'albero e gli altri dieci corrispondenti alle descrizioni del punto precedente. Questi campi devono essere di tipo logico il cui contenuto è V/F oppure 1/0 a seconda delle caratteristiche del data base. In ogni caso per codificare in modo binario bisognerà porre l'equivalenza tra Vero e 1 e Falso e 0. Ad esempio il faggio è descritto come : 0100000000, mentre il castagno come 0010000000 ecc. Alcuni record potranno avere la stessa sequenza, ciò evidentemente indica che il numero di variabili utilizzate non è ancora sufficiente per differenziare ogni singolo albero. Ad esempio la betulla potrà essere : 0001000000 così come il pioppo.
   Potrà nascere quindi l'esigenza di ulteriori indagini.
4. Osservazioni analoghe emergeranno dall'uso dei connettivi logici applicati nella selezione del contenuto di uno o più campi. A questo proposito diventa significativo prevedere il risultato della selezione o formalizzarlo attraverso schemi ad albero o diagrammi di Venn.
5. Questa attività permette di introdurre i numeri binari a partire da una situazione concreta che ne giustifica l'uso; permette inoltre di descrivere un percorso all'interno di un diagramma di flusso.

E' evidente che un'attività di classificazione di questo tipo ha bisogno del data base se la quantità di informazioni da controllare è sufficientemente grande da giustificarlo. Si presta quindi ad un lavoro cooperativo tra più classi per la raccolta dei dati e il successivo inserimento nel data base.

Riferimenti bibliografici

[1] PELLEREY M., 1990, *L'informatica nella scuola media, come e perché* , Convegno INFO90, Fossano

[2] BARBERO R., 1996, *Ostacoli nell'apprendimento geometrico e uso di strumenti informatici nella scuola dell'obbligo*, , Convegno INFO90, Fossano

[3] MOLINARI M. , DONATO M.R., 1991, *Apprendimento in campo algebrico e utilizzo di un F.E.: alcune possibili integrazioni,* XII Convegno Internuclei, Salice Terme.

[4] BOIERI P. (a cura di),1996, *Fare geometria con Cabri,* Centro Ric. Didattiche U.Morin Giovanni Battagin Editore

[5] BRAMBILLA M., LAMANNA E., 1995, *Cabri-géomètre e i luoghi geometrici. Schede di laboratorio.* Quaderni di CABRIRSSAE n. 8

[6] ROCCO M., 1991, *Modelli di crescita di popolazioni al Foglio Elettronico,* Quaderno didattico n. 10, Dip. di Scienze Matematiche, Univiversità di Trieste

[7] POLUMIN O., *Guida agli alberi d'Europa*, , Zanichelli, Bologna

PROBABILITÀ E STATISTICA: ELABORAZIONE DI UN PERCORSO DIDATTICO

Michele Boffa, S.M.S. "Anna Frank" - Mondovì (Cuneo)
Susanna Armiento, Ada Fiorucci, Patrizia La Pegna, Maria Leone, Gino Palumbo, Claudia Pio, Anna Maria Sagripanti, Alessandra Scalabrella, Amelia Torre.

Il precedente documento, o almeno le parti di esso aventi per oggetto le difficoltà che si incontrano nell'insegnamento della probabilità e della statistica, deve essere assunto come presupposto. La linea convenuta è stata quella di interpretare il ruolo di un gruppo di insegnanti di matematica, che a settembre ritengono opportuno discutere e costruire insieme un cammino di lavoro sui temi della probabilità e della statistica, da sperimentare nelle loro classi nel corso del triennio. Si pone per qualcuno il problema di un approfondimento culturale soprattutto in ambito probabilistico, viene ritenuta indispensabile la conoscenza dei programmi previsti e delle attività svolte dagli alunni nei precedenti cicli di studi, si vuole mirare anche al coinvolgimento dei colleghi di altre discipline. La diffidenza che alcuni insegnanti provano verso temi innovativi come questi, estranei tanto alle loro esperienze scolastiche quanto alla loro formazione professionale, suggerisce di proporre attività semplici e concrete, evidenziandone i possibili riferimenti ai concetti e agli strumenti della matematica tradizionale. Si pensa inoltre che sia più realistico programmare separatamente per la probabilità e per la statistica, lasciando spazio alla discussione, ovviamente molto informale, di alcuni aspetti tipici della loro reciproca interazione come l'influenza di una concezione frequentista nella previsione di eventi o la scelta di un campione statistico.

Il lavoro svolto è approdato all'elaborazione di:

- un impianto triennale per attività di tipo statistico, con la specificazione di obiettivi, attività, contenuti e verifiche;
- una serie di esemplificazioni didattiche inerenti la probabilità, costruite con l'intenzione di evidenziare alcune opportunità culturali e metodologiche.

Per ragioni di spazio se ne possono qui riportare soltanto alcuni passaggi significativi.

Ciascun insegnante, magari richiamando prima il celebre sonetto del poeta Trilussa, preciserà *che cos'è la statistica*. E pressappoco dirà che essa studia un numero imponente di problemi aventi a che fare con molti dati e molte informazioni, che ci toccano da vicino, che ci fanno conoscere meglio la realtà nella quale viviamo immersi, che ci vengono presentati dai giornali e dalla televisione. Molti dati perché pochi singoli dati non sono significativi e generano talvolta conclusioni errate; dati che vengono elaborati e di solito tradotti in rappresentazioni grafiche per offrire, in modo chiaro, efficace e corretto, informazioni sul fenomeno studiato. Subito dopo si entra nel vivo, si propone un tema, si scelgono insieme alla scolaresca campi di indagine di un certo interesse, si invita alla raccolta di dati e si guidano gli alunni a impossessarsi gradualmente dei mezzi utili per trarne informazioni e idee corrette. Il tema al quale ci si è affidati, ricco di spunti didattici e di finalità educative, è quello della conoscenza delle persone e dell'ambiente in cui si vive, della realtà che l'alunno imparerà a descrivere e analizzare anche per essere pronto a valutare le descrizioni e le analisi altrui. Le attività proposte, soprattutto per il primo anno, sono state scelte in modo da apparire familiari, non selettive né avide di prerequisiti matematici, capaci di alimentare il dialogo in classe e fuori, adatte a motivare lavori di gruppo.

La raccolta di dati personali all'interno della classe (anagrafici, antropometrici, hobby, alimentazione, preferenze, ...), da organizzare e rappresentare graficamente, possono costituire per gli alunni di prima media un'occasione per *conoscersi* meglio. L'individuazione, per gruppi, di un campo di indagine sul territorio (scuole, anziani, occupazione, reddito, prezzi al consumo, raccolta selezionata dei rifiuti, ...), la formulazione e la somministrazione di un questionario, lo spoglio, la tabulazione e l'elaborazione dei dati, la scelta del grafico più idoneo a rappresentarli, potranno consentire agli alunni di seconda media, più solidali e organizzati, di *conoscere* meglio *l'ambiente* in cui vivono. La ricerca di sondaggi statistici a livello nazionale e internazionale riguardanti diversi ambiti e problematiche (popolazione, lavoro, economia, turismo, ...), la consultazione di manuali e compendi statistici, quotidiani di informazione specializzata e non, l'introduzione di altri tipi di grafici, la loro lettura critica, l'individuazione di errori o di rappresentazioni ingannevoli potranno stimolare gli alunni di terza media a *conoscere* un po' *il mondo* per *orientarsi nelle scelte*.

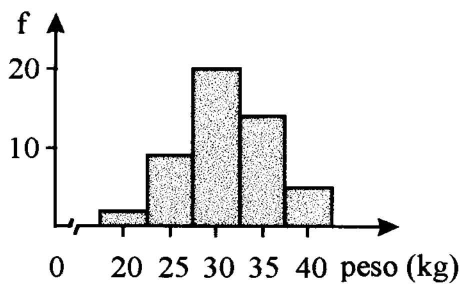
L'organizzazione dei dati rilevati e la loro rappresentazione richiedono un paziente lavoro dell'insegnante a partire dalla prima media. Prendiamo, ad esempio, una indagine sul peso di bambini di 11 anni, i cui risultati potrebbero essere presentati dagli o agli alunni nei modi seguenti:

25	33	28	34	28	24	31	40	32	27
34	36	38	31	29	35	32	34	18	31
36	32	20	33	38	28	25	28	23	29
31	23	35	27	30	41	34	28	34	38
29	34	25	30	34	28	32	36	26	30

Da...a...kg	F
18-22	2
23-27	9
28-32	20
33-37	14
38-42	5

La costruzione della tabella in cui le frequenze si riferiscono a classi di pesi, e non a singoli pesi, non è immediata: riorganizzare i risultati dell'indagine comporta l'individuazione del minimo e del massimo, la determinazione del numero delle classi e quindi della loro ampiezza. Questo esercizio permette di acquisire capacità di lettura di tabelle analoghe, riflettendo magari sull'informazione che si perde rispetto all'elenco completo dei dati e sulla miglior visibilità del fenomeno che in cambio ne deriva.

Si devono pure chiarire, in preparazione dell'*istogramma*, il ruolo dell'approssimazione nel passaggio dal continuo al discreto delle 50 misure date e ancora ai pesi 20, 25, 30, 35, 40 centrali rappresentanti le cinque classi. Esercizi di calcolo di *moda*, *mediana* e *media aritmetica* permettono di fare ulteriori riflessioni sulla diversa veste delle due rappresentazioni tabellari.



Una scelta adeguata delle unità di misura sugli assi, la dichiarata interruzione degli assi se occorre e, infine, la cura nel disegno sono operazioni che educano a non accettare con superficialità *rappresentazioni* proprio a motivo di questi aspetti spesso *ingannevoli* (in buona o in cattiva fede).

Si è discusso sull'opportunità di inserire nel percorso didattico il concetto di campione statistico e qualche riflessione su di esso. Tutti favorevoli se si fosse trovato un modo adeguato ed economico di illustrare l'argomento ai ragazzi di terza media. Immaginando di dover compiere un'indagine statistica o di voler risalire dai dati ai metodi mediante i quali possono essere stati acquisiti, è sembrata convincente la simulazione di una lezione dialogata nella quale è emerso con chiarezza:

- che è dispendioso e insensato interpellare l'intera popolazione, più comodo e altrettanto efficace interpellarne una piccola parte che ne rispecchi la struttura d'insieme;
- che un *campionamento casuale* garantisce approssimativamente gli stessi risultati che si sarebbero ottenuti con un'indagine completa;
- che per la formazione di un campione si deve tener conto anche di aspetti dipendenti dal tipo di indagine in atto;
- che l'attendibilità di un campione ben scelto cresce di poco oltre una certa ampiezza.

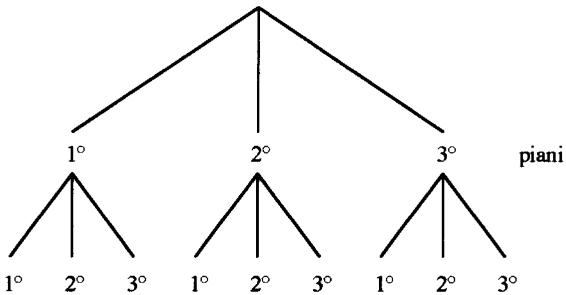
Naturalmente le diverse conclusioni erano sorrette da adeguati esempi di indagini statistiche piuttosto comuni (anche di opinione, di costumi, di scelte personali), ma è stato portato anche il seguente esempio di più forte sapore probabilistico. Un'urna contiene 1000 palline colorate, un certo numero rosse e le restanti blu. Per sapere quante sono le palline rosse e quante quelle blu dovrei compiere 1000 estrazioni senza reimbussolamento. Se, estratte 10 palline, 7 di queste fossero rosse e 3 blu, non mi sentirei di affermare che in quell'urna ci sono 700 palline rosse e 300 blu. Ma se, dopo la cinquantesima estrazione senza reimbussolamento, ne avessi 26 rosse e 24 blu, sarei tentato di fermarmi e ritenere che nell'urna ci siano palline rosse e blu pressoché in uguale numero.

Circa la *probabilità*, si è concluso che può trovare posto in prima media soltanto in riferimento a situazioni di gioco tipiche della scuola primaria e che comunque il percorso triennale non può andare oltre elementari valutazioni dell'incertezza. Sembra tuttavia possibile, ed è preferibile rispetto alla pretesa di accrescere la complessità dei quesiti, avviare gli alunni alla comprensione e alla capacità d'uso di metodi e strumenti probabilistici. Per tentare di chiarire questo punto di vista sono state scelte alcune situazioni problematiche.

Qual è la probabilità di estrarre una pallina bianca da un sacchetto che ne contiene una bianca e quattro nere? L'insegnante deve essere preparato ad accogliere la risposta 1/5 come, ad esempio, la risposta 1/2. Perché dire che la prima è giusta e che la seconda è errata? Entrambe stanno in piedi sul piano logico, ma chi fornisce tali valori è tenuto a verificare se sono realistici.

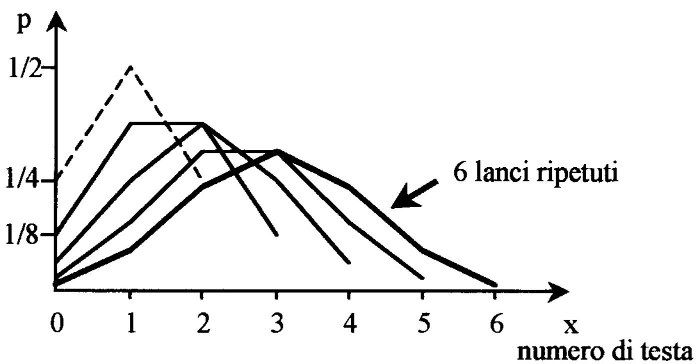
Se in luogo del solito dado da gioco di forma cubica ne venisse lanciato uno a forma di parallelepipedo rettangolo a base quadrata, come determineresti la probabilità di ciascuna delle sue facce? Il dado esiste, perché l'insegnante ne ha costruito uno, ma prima di mostrarlo è bene ragionarci su. Potrebbe comportarsi come se avesse solo quattro facce simmetriche o addirittura come una moneta simmetrica: se fosse sproporzionatamente alto rispetto alla misura dello spigolo di base o viceversa, molti forse non riterrebbero neppure necessario fare delle prove. In generale, se si vogliono effettuare dei lanci e non si vuole rinunciare a considerazioni di simmetria, può essere in questo caso sufficiente procurarsi la frequenza complessiva delle facce rettangolari e quella delle facce quadrate.

Due persone entrano nell'ascensore al piano terra di uno stabile di tre piani. Calcola le seguenti probabilità: che escano entrambe al secondo piano, che escano entrambe allo stesso piano, che escano a due piani diversi. Va detto che ogni esercizio di probabilità necessita di particolare pazienza nella lettura, in modo da capire bene situazione e quesito; talvolta, però, chi legge si sforza di capire più di quanto è scritto, arricchendo il testo di considerazioni interessanti, dettate dall'esperienza e dall'intuizione, ma anche capaci di disorientare inesorabilmente. Ad esempio: se in quello stabile abitano famiglie, i due che entrano insieme in ascensore potrebbero, con una certa probabilità, essere parenti e quindi, quasi certamente, fermarsi allo stesso piano; se è un stabile che ospita uffici pubblici, alcuni di questi uffici, in taluni giorni dell'anno, della settimana e a certe ore, potrebbero essere più affollati di altri; se una persona non è molto anziana, è più facile che usi l'ascensore per recarsi al terzo piuttosto che al primo piano. Ritornando al testo e in assenza di altre informazioni, il diagramma ad albero traduce l'enunciato in una forma più accessibile della lingua comune e costituisce già un avviamento alle soluzioni: 1/9, 3/9, 6/9, rispettivamente.



Ridurre ai minimi termini ogni frazione, procedura alla quale in aritmetica viene data a torto più pubblicità che all'inversa (che è poi eseguita meccanicamente per sommare frazioni), in probabilità può essere all'inizio inopportuno perché nasconde alla vista il denominatore comune e cioè il numero dei casi possibili.

In ripetuti lanci di una moneta, qual è la probabilità che il 50% delle volte venga testa? Sciolte le riserve sulla simmetria della moneta e sulla parità o disparità del numero dei lanci, non è difficile arrivare a intuire che la probabilità richiesta decresce all'aumentare del numero dei lanci ma si mantiene sempre maggiore della probabilità di ogni altro possibile esito. Non è facile accordarsi fino a che punto ci si possa spingere ma, con un po' di calcolo combinatorio o con la semplice adozione del triangolo aritmetico, non sarebbe male costruire sullo stesso riferimento cartesiano la rappresentazione seguente:



I valori delle diverse probabilità nel caso di 6 lanci fanno già avvertire il classico andamento "a campana", una campana che, al crescere del numero dei lanci, slitterà sempre più a destra e sempre più s'appiattirà sull'asse delle ascisse. L'idea che su un miliardo di lanci, la probabilità richiesta sia praticamente nulla ma che continui ad essere maggiore di tutte non sembrerà allora così paradossale.

BIBLIOGRAFIA

Boero, P.: 1988, Probabilità e statistica nella scuola elementare: alcune riflessioni in vista della formazione degli insegnanti e delle attività in classe, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol.11, 1, 7-28.

Boffa, M. & Caredda, C.: 1990, *Probabilità e insegnamento elementare*, Sei, Torino.

Boffa, M. & Dupont, P.: 1976, *Statistica per docenti della scuola dell'obbligo*, Cortina, Torino.

Dupont, P.: 1985, *Primo incontro con la probabilità: storia e didattica*, Sei, Torino.

Engel, A.: 1975, *L'enseignement des probabilités et de la statistique*, vol.1, Cedic, Paris.

Hodges, J.L. & Lehmann, E.L.: 1971, *I concetti fondamentali della probabilità e della statistica*, vol.1, Il Mulino, Bologna.

Pesci, A. & Reggiani, M.: 1987, *Statistica e Probabilità nella scuola media inferiore: una proposta didattica*, Quaderno TID-CNR, serie IDM, n.1.

Rigatti Luchini, S. (a cura di): 1996, *Statistica e probabilità nella scuola di base*, Atti del convegno di Bressanone 1993, Cleup., Padova.

Rossi, C.: 1992, Un percorso didattico per l'introduzione delle prime nozioni di probabilità e statistica, *Induzioni*, 5, 99-108.

LE DIFFICOLTÀ E GLI ERRORI PIÙ FREQUENTI NEI TEMI TRATTATI

Michele Boffa, S.M.S. "Anna Frank" - Mondovì (Cuneo)
Fabio Brunelli, S.M.S. "Masaccio" - Firenze

Il Corso ha voluto mettere in rilievo i temi più innovativi che figurano nei programmi di matematica per la scuola media e promuovere un costruttivo dibattito sul loro inserimento nella programmazione. Una analisi delle esperienze condotte a questo proposito, dal 1979 ad oggi, porta a fare varie considerazioni ma tutte in qualche modo riflettono una difficoltà di fondo: non è facile raggiungere e coinvolgere tutta la popolazione insegnante nell'approfondimento culturale e nella sperimentazione didattica di nuove idee e metodologie. Anche un insegnante che responsabilmente si guardi attorno per cogliere tutto ciò che può essere interessante per i suoi allievi, dovrà fare i conti con il pochissimo tempo a disposizione e ripiegherà, spesso volentieri, sui temi tradizionali assai più collaudati e meno ingombranti. Nella migliore delle ipotesi, dovendo adeguare la programmazione didattica, introdurrà i contenuti apparentemente meno problematici e più familiari: è ciò che di fatto si verifica per la *statistica*, abbastanza *diffusa nella scuola dell'obbligo*, preferita alla probabilità e scelta per rappresentare l'innovazione in questo particolare ambito.

D'altra parte i libri di testo hanno sviluppato probabilità, statistica e logica secondo altrettanti capitoli a sé stanti, favorendone l'isolamento in appendici comode da interpretare come facoltative. Ciò appare assai deviante per la *logica*, che proprio nella pervasività ha la sua naturale e proficua caratteristica peculiare. Un po' di teoria degli insiemi in prima media e un po' di connettivi in terza, ad esempio, sono serviti a ben poco; la loro veste nozionistica ha anzi fatto perdere di vista il vero obiettivo dell'insegnamento della logica che è il conseguimento da parte dell'alunno della consapevolezza linguistica. Qualche insegnante ha intrapreso la strada di una logica "per indovinelli", riscuotendo maggior successo, ma di rado riuscendo a sviluppare spunti di discussione e condurre da lì la scolaresca al riconoscimento della necessità di rigore nel linguaggio e nel ragionamento.

Non sarà un errore insistere nel voler insegnare esplicitamente ciò che più naturalmente scaturisce dal fare matematica (e non solo) di ogni buon insegnante e che gli allievi ritrovano riflettendo sulla loro esperienza per capire meglio e saper spiegare ciò che hanno fatto? Piuttosto è giusto mirare a un *uso appropriato della lingua italiana anche per parlare di matematica*, senza insistere a priori su concetti e formalizzazioni inopportune.

Per quel che concerne la statistica, scienza i cui primi elementi non possono essere ignorati in un normale processo di alfabetizzazione, diversi aspetti come già detto inducono a un moderato ottimismo: il numero davvero imponente di problemi quotidiani che la coinvolgono e che toccano ognuno da vicino, i buoni livelli di confidenza con questo tema dell'insegnamento elementare, l'essere campo di applicazione di nozioni e concetti aritmetici e geometrici, la sua più facile e motivata integrazione con altre discipline. In geografia, storia ed educazione civica fornisce metodi e strumenti per la conoscenza della realtà economica, sociale e culturale di un paese; l'educazione tecnica passa anche attraverso la realizzazione di grafici e disegni, la predisposizione di questionari e strumenti di indagine; le scienze s'avvalgono di raccolte sistematiche di dati e della loro elaborazione; ogni processo di maturazione richiede di abituarsi a valutare il grado di attendibilità delle informazioni.

Peccato che raramente si dica qualcosa sul *campionamento* e sull'*inferenza statistica*. Non è certo possibile parlare di metodi e limiti dell'attribuzione a un'intera popolazione delle informazioni tratte da una piccola parte di essa, ma almeno si può accennare il problema e discuterne qualche significativo aspetto: la scelta casuale degli elementi di un campione, la struttura di un campione tale da rispecchiare quella d'insieme della popolazione cui appartiene, la sua ampiezza. A questo riguardo non è proponibile altro che un'analisi qualitativa e superficiale, sufficiente tuttavia per riconoscere un suggestivo campo di applicazione del calcolo delle probabilità.

Poco conosciuta e quasi assente nell'insegnamento è proprio *la probabilità* che, richiamandosi a questo livello prevalentemente ai giochi, può divertire e incuriosire, ma non appare sufficientemente giustificata per gli insegnanti né lo è per gli alunni. La probabilità quasi mai fa parte del bagaglio culturale del docente ed è difficile da recuperare, perché entra in conflitto con un determinismo che condiziona, con l'intuizione che spesso viene tradita e con la lingua comune.

Fare probabilità a scuola significa sostanzialmente risolvere quesiti di probabilità, all'inizio quasi banali e subito molto difficili, che richiedono una "sceneggiatura" ritenuta troppo complessa rispetto alla loro apparente marginalità. Si alimenta così l'equivoco, peraltro non dannoso a questo livello, che la probabilità costituisca una sorta di pretesto per conoscere e mettere in azione tant'altra matematica elementare o addirittura soltanto un diversivo. Un quesito probabilistico può, ad esempio, trovare posto fra quelli sul concetto di frazione, analoga funzione può svolgere un pentagramma con i valori frazionari delle sue figure musicali: insegnare probabilità come insegnare musica è ben altra cosa e tuttavia questi esercizi sono consigliabili.

D'altra parte, se si vuole fare breccia e produrre esperienze utili per una più adeguata programmazione didattica, si deve accettare, ricordando anche la storia del calcolo delle probabilità, il contributo che l'analisi di semplici giochi fornisce allo sviluppo della conoscenza e alla formazione della mentalità. L'interesse per il gioco stimola la costruzione di modelli in tutto simili a quelli usati nella scienza applicata. A chi osserva che a quesiti sugli esiti del lancio di dadi o sull'estrazione di palline da un'urna non possa essere riconosciuta dignità probabilistica, si può replicare che la probabilità non si caratterizza a questo livello per i procedimenti di rappresentazione e di calcolo, sostanzialmente logico-aritmetici, ma per il loro uso e l'interpretazione dei risultati al fine della previsione di eventi futuri.

I programmi accostano le affermazioni di tipo probabilistico a quelle del tipo vero-falso. C'è forse troppa enfasi in tale evidenziazione, ma l'analisi di numerose situazioni probabilistiche condotta dagli allievi si avvale proprio di alcuni mezzi familiari alla logica. Il *linguaggio degli insiemi* è, ad esempio, un mezzo di definizione e chiarificazione di regole probabilistiche e può essere introdotto in modo spontaneo quando serve. Riconoscere in un insieme elementi in possesso di una certa proprietà, classificare ed enumerare tali elementi è ancora un'attività di forte valenza logica e anche questione di *calcolo combinatorio*. Ideografia tipica del calcolo delle probabilità, capaci di tradurre con semplicità e chiarezza enunciati anche complessi, sono i *diagrammi ad albero*. Sarebbe tuttavia un errore considerare l'insiemistica, il calcolo combinatorio e i diagrammi ad albero, che spontaneamente possono essere introdotti in situazione, materie di insegnamento da far precedere al calcolo delle probabilità. Figuriamoci che neppure la conoscenza delle frazioni, peraltro avviata nel corso del precedente ciclo di studi, è indispensabile che venga considerata un prerequisito. Lavorare negli ambiti statistico e probabilistico favorisce, cammin facendo e quasi di contrabbando, la maturazione dei concetti e l'acquisizione dei metodi di lavoro necessari.

Se si pensa alla *genesi storica del concetto di probabilità*, si constata che assai prima di definirla furono presi in esame numerosissimi problemi, dandone risoluzioni talvolta errate e talvolta brillanti, queste ultime spesso nate dalla discussione sulle prime. Oltre questo aspetto che la dice lunga sulle *potenzialità didattiche degli errori*, merita dire qualcosa proprio sulla definizione di probabilità.

Volendo associare un numero a ciò che può accadere ma che non è certo che accada sembra naturale pensare a una percentuale, a una frazione propria. Non bisogna però lasciarsi trasportare dalla foga di definire tale frazione, in modo che tutti arrivino alla stessa valutazione. Le considerazioni di simmetria che si possono ritenere plausibili osservando un dado da gioco non necessariamente devono essere accettate da tutti; nei casi in cui si può e sembra ragionevole procurarsi delle frequenze, non è lo stesso per tutti il numero delle volte che occorre ripetere l'esperienza per conseguire una frequenza relativa attendibile. Inoltre si capisce bene che entrambe le impostazioni precedenti possono non essere condivise e che comunque hanno un campo di applicazione assai limitato rispetto a una concezione soggettivista, alla quale non sarebbe insensato fare cenno.

Maturare la capacità di ragionare in modo valido in situazioni di incertezza significa soprattutto, qualunque sia la scelta del modello, verificare la sua adeguatezza, prendere in considerazione il suo rendimento, essere coerenti. La sensibilità dell'insegnante gioca qui un ruolo fondamentale: l'insegnante che invita gli allievi a dare giustificazione delle loro risposte insegna nello stesso tempo ad accettare le idee altrui e a discuterne. Sarebbe viceversa un *grave errore scoraggiare scelte "anomale"*. Forse è proprio questo punto di vista e questo taglio didattico che ostacolano un buon insegnamento della probabilità. O forse anche la probabilità, come la logica, è dappertutto e non ha bisogno di essere esplicitamente insegnata?

Assunto come centrale l'obiettivo di elaborare un percorso didattico, fondato su una chiara definizione delle finalità che si vogliono perseguire e su una coerente scelta delle attività, dei contenuti coinvolti e delle necessarie verifiche, le precedenti considerazioni generali conducono a ripensare un po' tutta la matematica per aprire ai nuovi temi e risparmiare agli allievi capitoli tanto collaudati quanto ripetitivi e obsoleti. E la via della logica, con il riconoscimento di analogie strutturali fra situazioni diverse, potrebbe essere una "scorciatoia" piuttosto che una perdita di tempo. Così come un buon percorso di statistica può coinvolgere una molteplicità di idee e metodi matematici, ospitando anche un po' di probabilità.

Non dimentichiamoci inoltre che probabilità, statistica e logica si prestano anche a essere introdotte in modo più episodico, sempre comunque da collocare e giustificare nel cammino didattico-educativo. Le occasioni unificanti potrebbero essere le *informazioni devianti*, i *messaggi scorretti* e le *convinzioni errate* facilmente riscontrabili nel parlare, nello scrivere e nei comportamenti della gente e dei mass media. Di norma è abbastanza divertente e produttiva la lezione dialogata che ha per oggetto l'analisi di situazioni individuate dagli allievi oppure appositamente studiate dall'insegnante ma comunque tratte dal quotidiano. In particolare le frasi pubblicitarie, i titoli giornalistici, i ragionamenti dei politici, le considerazioni di un commentatore televisivo, farcite di "matematica" con l'illusione di accrescere in credibilità, ci forniscono esempi in abbondanza.

Concludendo, se nuovi temi trovano talvolta impreparati gli insegnanti e inadeguate le attività didattiche, affinché l'inevitabile processo di aggiornamento sia proficuo, si deve poter *verificare periodicamente il curriculum matematico*. I programmi del 1979, ad esempio, pur non essendo ancora oggi entrati in tutte le classi ma cogliendo l'opportunità offerta dall'annunziata riforma dei cicli scolastici, potrebbero essere oggetto di una revisione. Anche perché *agli insegnanti non si può chiedere di fare "di tutto di più" ma, fornendogliene la possibilità, si può chiedere di fare meglio*.

BIBLIOGRAFIA

Bernardi, C.: 1993, La logica nella scuola secondaria, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol.16, 11/12, 1041-1060.

Boffa, M.: 1994, Probabilità nella scuola di base, Repola Boatto, A. (a cura di), *NUMI, XVI convegno nazionale sull'insegnamento della matematica*, supplemento al n.7, Civitanova Marche (Macerata), 71-78.

La Torre, M.: 1996, La formazione statistica nella scuola media, *Induzioni*, 12, 195-205.

MOMENTI SIGNIFICATIVI NEL CURRICOLO PER UNA POSSIBILE INTEGRAZIONE TRA I VARI TEMI

Rosa Iaderosa, SMS "L. da Vinci" - Cesano Boscone (Milano)
Luigi Annolfi - Bernardino Brigaglia - Siro Brovedan - Annarella Cancedda -
Gianfranco Carmeli - Elda Giuliani - Daniela Lazzaro - Angelo Remitti - Paola Tizzani

Le due proposte didattiche che seguono, elaborate durante il lavoro di gruppo dai corsisti, riguardano attività significative al fine di coinvolgere un'ipotetica classe su alcuni temi del corso, integrandoli però con esperienze più diffuse e contenuti ritenuti tradizionalmente irrinunciabili nel curricolo della scuola media.

Si è rilevata infatti l'esigenza, pur nella consapevolezza delle difficoltà di realizzazione, di trattare con sistematicità i "nuovi" temi, evitando il rischio piuttosto diffuso di mantenerli isolati, ed evitando percorsi episodici, seppure significativi.

Una didattica che problematizzi e che assegni un ruolo notevole alla formulazione di ipotesi da parte degli allievi, alla verbalizzazione di quanto osservato, alla formalizzazione sia nel linguaggio riguardo all'uso della implicazione, sia nel simbolismo utilizzando il codice algebrico, e che si serva anche di strumenti o linguaggi propri dell'informatica, può consentire di trasformare anche i contenuti e le attività di tipo più tradizionale in occasioni di insegnamento-apprendimento più significative e motivanti.

I "nuovi" temi possono quindi diventare più pervasivi della matematica tradizionale, in un'integrazione che tenda a rafforzare gli aspetti euristici, ed è possibile a nostro giudizio, pur rimanendo ad un livello adeguato di semplicità, integrare pensiero deterministico e pensiero probabilistico, linguaggio comune e linguaggio simbolico, promuovendo un apprendimento più attivo ed efficace nei ragazzi.

Prima proposta: *Area e volume del parallelepipedo rettangolo in funzione delle dimensioni degli spigoli*

L'attività proposta consiste nella osservazione di variabilità nelle grandezze legate ad un parallelepipedo rettangolo, osservazione compiuta con modalità e strumenti diversi e finalizzata ad una maggiore interiorizzazione del concetto di variabile, ad una formalizzazione algebrica delle variabilità osservate, allo sviluppo della capacità di argomentare su esperienze fatte.

Collocazione nel curricolo: classe terza media

Prerequisiti: conoscenza delle aree di figure piane - rappresentazione dei numeri razionali e concetto di rapporto - conoscenza di aree e volumi di semplici poliedri - individuazione di variabili e costanti - conoscenza ed esperienza minima dell'uso di un foglio elettronico.

Obiettivi: - confrontare variabili e costanti - cogliere il legame funzionale, nei casi più semplici, tra dimensioni, aree, volumi - osservare in maniera finalizzata tabelle di dati - formulare ipotesi e verificarle - generalizzare attraverso la scrittura di formule - comprendere le potenzialità della formalizzazione algebrica ai fini della lettura di formule - argomentare sulle proprie osservazioni - giustificare le proprie affermazioni - cogliere le potenzialità dello strumento informatico, ma anche la necessità di un uso consapevole di questo.

Fasi di svolgimento previste:

Prima fase: problematizzazione.

Gli allievi disporranno, individualmente o a gruppi, di modellini in cartoncino di parallelepipedi rettangoli, costruiti precedentemente, tutti uguali tra loro, ma con le tre dimensioni diverse. Li avvicineranno trasformando una, due o tre dimensioni in lunghezze multiple, componendo parallelepipedi più grandi. Sarà richiesta loro una prima osservazione al fine di individuare eventualmente qualche relazione tra le vecchie e le nuove dimensioni. Le osservazioni dei ragazzi saranno trascritte e comunicate, ma la loro discussione sarà rinviata alla fase successiva, che potrà consentire un'osservazione più mirata e precisa, finalizzata alla individuazione del tipo di variabilità in gioco.

Seconda fase: utilizzo di un foglio elettronico per analizzare numericamente le variabilità rilevate - impostazione del foglio.

Si prevede inizialmente di introdurre le variabili a, b, c, rappresentanti le tre dimensioni del parallelepipedo, ed un fattore di proporzionalità a; successivamente si potranno introdurre eventuali modifiche sul numero delle variabili o su operatori che modifichino le dimensioni iniziali. La classe sceglierà valori arbitrari per a, b, c e α, e osserverà la conseguente variazione delle altre grandezze dipendenti da queste al variare di una sola di due o di tutte e tre. Il calcolo dei rapporti sarà visualizzato in forma di allineamento decimale, potrà quindi essere trasformato dai ragazzi in frazione al fine di cogliere più facilmente legami funzionali di tipo lineare, quadratico, ecc. L'osservazione guidata dei risultati potrà essere fatta anche proiettando un unico schermo da visualizzare insieme, o stampando la varie "videate". Non è da trascurare didatticamente però l'effetto dinamico ottenuto osservando il foglio "in azione": certamente tale visualizzazione favorisce nell'allievo la comprensione di variabilità correlate.

Terza fase: utilizzo del foglio per fare previsioni e ricevere regolarità sui valori numerici.

In questa fase si cercherà di coinvolgere tutta la classe in una discussione sulla previsione e la verifica dei risultati.

L'insegnante porrà questioni del tipo: "Se raddoppiano le dimensioni di base allora l'area di base…… l'area laterale…… il volume……"

"Se raddoppiano le tre dimensioni allora l'area di base…… laterale …… il volume……"

Quarta fase: verbalizzazione delle regolarità osservate.

Quinta fase: formalizzazione algebrica della variabilità di aree e volumi in funzione delle dimensioni.

Si cercherà di arrivare insieme, esprimendo letteralmente le relazioni geometriche tra le grandezze in gioco, alla scrittura, l'analisi e la verifica di formule quali ad esempio: A1=2(2a+2b)c=2(a+b)2c e si faranno le dovute considerazioni argomentando sulle relative situazioni geometriche.

Possibili ulteriori sviluppi si possono immaginare e prevedere a partire da più complesse situazioni di variabilità, con altri operatori sulle dimensioni iniziali, da analizzare a partire dai risultati ottenuti sul foglio elettronico, che potrà estendersi più o meno secondo il livello di difficoltà adeguato alla classe.

<u>Seconda proposta</u>: *Il gioco dei percorsi casuali (un esempio di modellizzazione nella scuola media inferiore).*

"Sono su di un binario rettilineo e mi sposto di un passo per volta avanti o indietro seguendo gli esiti dei lanci di una moneta (Testa o Croce). Qual è la probabilità che dopo un certo numero di lanci, e quindi di passi, mi trovi in una determinata posizione ad una certa distanza dal punto iniziale?"

"In una città costruita con strade tutte perpendicolari tra loro o più persone si spostano, a partire da un incrocio tra quattro strade, di un passo in una delle quattro direzioni (N-S-E-O) secondo gli esiti dei lanci contemporanei di 2 monete di colore diverso (rispettivamente TT CC TC CT). Qual è la probabilità che ciascuna persona si trovi in una determinata posizione ad una certa distanza di punto iniziale dopo un certo numero di lanci e quindi di passi?"

"Una biglia si muove nello spazio tridimensionale secondo sei direzioni diverse, a partire da una posizione iniziale. Ogni suo spostamento casuale di un passo è indicato dall'esito del lancio di un dado. Qual è la probabilità che la biglia dopo n lanci raggiunga una certa posizione ad una certa distanza dal punto iniziale?"

Il gioco da proporre alla classe consiste quindi nel descrivere percorsi casuali, a partire da un punto origine, su una retta, su un piano, nello spazio. La comprensione della casualità con cui gli spostamenti avvengono può costituire un importante passo verso la conquista di una mentalità che accetti l'utilizzo della matematica anche in situazioni incerte e apparentemente "imprevedibili". L'allievo potrà scoprire che è possibile fare matematica e operare previsioni che hanno una loro "scientificità" anche rispetto a situazioni di questo tipo.

Una volta che gli allievi avranno familiarizzato con le regole di questo gioco e si saranno resi conto della possibile modellizzazione matematica del problema, si potrà prospettare loro che questa situazione è analoga a quella in cui è necessario descrivere e prevedere il moto casuale di particelle nelle scienze fisiche, cercando di far comprendere come un gioco può non essere fine a se stesso ma simulare situazioni reali più complesse e consentire quindi lo studio di altre situazioni analoghe, tratte dalla realtà.

Attraverso le prove fatte dai ragazzi e le discussioni guidate dall'insegnante, che sarà opportuno approfondire limitandosi alla situazione sulla retta, per ovvi motivi pensando alla complessità che da un punto di vista probabilistico il problema assume già nel piano, si potrà pervenire ai seguenti risultati:

– c'è una distanza massima che dipende dal numero dei lanci (con n lanci posso raggiungere al più la posizione di ascissa n)
– la probabilità di occupare una posizione finale più vicina all'origine è sempre maggiore di quella delle posizioni di massima distanza ("concentrazione")
– per osservare questa diversa "concentrazione" sarebbe necessario un numero elevato di lanci; si può ricorrere perciò ad un'ulteriore modellizzazione: fare la media delle distanze assolute in n lanci e considerare ognuno di questi risultati come un singolo evento.

Dopo che gli allievi avranno conosciuto le regole del gioco attraverso le modalità dei lanci e la loro descrizione, si potrà cercare di far cogliere loro aspetti qualitativi e quantitativi dell'esperienza, a partire dagli spostamenti sulla retta. Più concretamente, assegnato un percorso, ad esempio TTCTCT, si richiederà di prevedere la posizione finale; viceversa, assegnata una determinata posizione, si potranno analizzare tutti i possibili percorsi e conseguentemente i possibili esiti dei lanci che possono portare a questa. Si scopriranno così aspetti e regolarità insospettati. Più precisamente, questioni che si potranno proporre sono le seguenti:

– L'ordine con cui si presentano in un certo numero di lanci gli esiti T o C è determinante per la posizione finale, o conta solo il numero di T e il numero di C?
– Per arrivare, partendo dall'origine, al punto di ascissa +2, qual è il minimo

numero di lanci necessario? È possibile arrivare a questo punto di ascissa pari con un numero dispari di lanci?

- Esegui tre lanci e prevedi le possibili posizioni finali
- Qual è la probabilità di arrivare con 3 lanci in ciascuna di queste posizioni?

E infine:

– Osservare vari percorsi che ti possono portare al punto di ascissa 2.

TT TCTT CTTT TCTCTT TTCCTT TCTCTT CTTCTCTT TCTCCCTTTT……

Confronta il numero di teste e il numero di croci. Che cosa osservi? Pensi che ci possa essere una regola?

Più in generale, si porranno agli allievi le seguenti questioni:

- Qual è la probabilità di avere come risultato la posizione ±1 con un percorso fatto di n lanci?
- A parità di lanci, come varia la probabilità degli eventi possibili?

(Con n lanci non tutte le posizioni possibili sono equiprobabili).

Da tali spunti si può comprendere come da questa attività sia possibile ricavare didatticamente numerose occasioni perché l’allievo esegua direttamente delle prove, ma abbia anche l’occasione di fare previsioni, scoprire regolarità numeriche, argomentare per spiegarle, scrivere formule relative ad alcune situazioni notevoli.

Come appare evidente, l’attività consentirà di affrontare più temi:

- interi relativi, operazioni e loro proprietà formali;
- orientamento sulla retta e nel piano cartesiano
- probabilità (eventi semplici)
- informatica (eventuali algoritmi in BASIC - uso del foglio elettronico).

Gli obiettivi potranno essere:

- modellizzare situazioni reali attraverso il gioco
- cogliere analogie e differenze tra situazioni di crescente complessità (spostamenti sulla retta - nel piano - nello spazio)
- osservare e ricercare regolarità
- generalizzare
- argomentare.

Si ritiene che le estensioni al piano e allo spazio, che determineranno situazioni di crescente complessità, per l’analisi dei casi possibili e di quelli favorevoli, possano essere accennate ed eventualmente approfondite con l’utilizzo di un programma di simulazione, visto che le rappresentazioni e il calcolo delle probabilità diventano poco gestibili da parte degli allievi. Un programma di questo tipo è stato compilato in Turbo Pascal dal corsista Gianfranco Carmeli ed è reperibile scrivendo al Liceo Vallisneri di Lucca, che ha curato la pubblicazione di questi atti.

ELABORAZIONE DI UN PERCORSO DIDATTICO DI LOGICA DESTINATO ALLA SCUOLA MEDIA INFERIORE

Fabio Brunelli, S.M.S. "Masaccio" - Firenze

Premessa

Alcuni colleghi hanno sperimentato in classe con qualche soddisfazione l'introduzione esplicita di argomenti di logica quali i connettivi, le tavole di verità, il calcolo proposizionale. Tuttavia la maggior parte di noi ritiene che in linea di massima l'insegnamento della logica nella scuola media debba restare implicito e pervasivo rispetto a tutti gli argomenti del programma di matematica.

Proponiamo alcuni obiettivi per l'insegnamento della logica:

1) La consapevolezza dei diversi linguaggi usati nella matematica: quello naturale, quello matematico, quello simbolico, quello grafico di vario tipo.
2) La capacità di riconoscere nelle frasi della lingua comune o nel linguaggio matematico la presenza e l'uso di connettivi e quantificatori.
3) La correttezza del ragionamento, avviando in questo modo le attività di deduzione.

Abbiamo deciso di non stendere in questa sede un percorso didattico, sia per la complessità del compito rispetto al nostro gruppo e al tempo a disposizione, sia perché, a causa dell'auspicato carattere pervasivo della logica, questo comporterebbe di riscrivere un curriculum completo di matematica. Abbiamo invece riportato esempi di attività specifiche, momenti didattici indicativi, esercizi significativi, per indicare a chi legge come a nostro parere l'insegnante potrebbe valorizzare il suo insegnamento della matematica attraverso un maggiore "spessore logico".

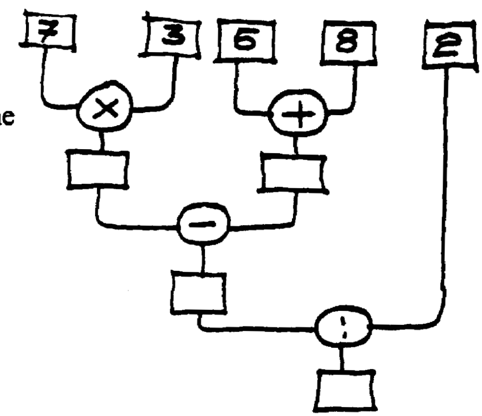
1.Proposte di attività sul linguaggio naturale e i linguaggi formali

1.1 Rendiamo espliciti i connettivi logici nel linguaggio naturale.
Leggi la frase data seguendo lo schema: prima proposizione e seconda proposizione.
"Giovanni esce di casa senza che la mamma lo accompagni"
"Il lupo perde il pelo, ma non il vizio"
"Esco senza ombrello anche se piove"

1.2 Discutiamo il significato di alcune frasi.
Data la frase: "Se è domenica o giorno festivo allora i negozi sono chiusi" individua tra quelle seguenti quelle che hanno la stessa struttura:
"Se in televisione c'è il telegiornale o un documentario cambio canale"
"Quando piove e sono senza ombrello preferisco non uscire"
"Vado dal fruttivendolo per comprare l'uva o il melone"
"Se fa troppo caldo non lavoro o accendo il condizionatore"
"Prendo il taxi quando non c'è l'autobus o non ho l'auto"

1.3 Traduciamo da un linguaggio all'altro.

a) Scrivi l'espressione aritmetica espressa dalla frase: "Calcola il prodotto della somma di tre con cinque con la differenza di sette e due e infine dividilo per quattro". Viceversa assegnata una espressione con numeri e parentesi traducila nel linguaggio naturale.
b) Esprimi con una espressione aritmetica i calcoli indicati dal grafo. Viceversa, data una espressione aritmetica, esprimila mediante un grafo.
c) Esprimi con una espressione aritmetica la seguente sequenza di comandi per calcolatrice tascabile:



1	0	X	4	M+	5	0	:
5	M-	RM	:	3	X	2	=

Viceversa, assegnata una espressione aritmetica, esprimila con una sequenza di comandi per una calcolatrice.

Si potranno anche proporre traduzioni dal linguaggio naturale a quello dei grafi, oppure da quello dei grafi a quello della calcolatrice, etc...

2. L'operatore di negazione NON.

Proponiamo esempi di esercizi riferiti ad alcuni argomenti di aritmetica, geometria ed algebra per sottolineare l'aspetto pervasivo delle operazioni logiche.

2.1 Negazione di proposizioni atomiche.

p: "4 è il numero naturale successivo di 3"

$\neg$ p: "4 non è il numero naturale successivo di 3" oppure "non è vero che 4 è il numero naturale successivo di 3".

Osserviamo che una delle prevedibili risposte da parte dello studente "4 è il numero naturale precedente di 3" non è corretta come negazione della proposizione p.

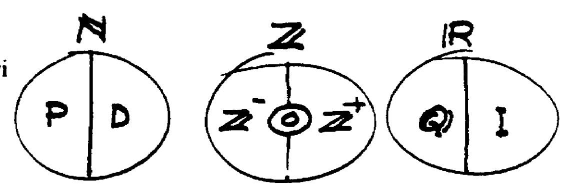
Quando l'insieme considerato può essere ripartito in due sole classi, allora la negazione può essere espressa anche attraverso il sostantivo avente il significato contrario:

p: "2 è un numero pari" $\neg$ p: "2 è un numero dispari"

q: "+ 5 è un intero positivo" $\neg$ q: "+ 5 è un intero negativo o nullo"

r: "1,2 è un numero razionale" $\neg$ r: "1,2 è un numero irrazionale".

N insieme dei numeri naturali
Z insieme dei numeri interi relativi
R insieme dei numeri reali
P insieme dei numeri pari
D insieme dei numeri dispari



2.2 Negazione di proposizioni composte.

$p \wedge q$: "un poligono regolare è equilatero ed equiangolo"

$\neg (p \wedge q)$: "un poligono regolare non è equilatero ed equiangolo"

E' bene sottolineare che la negazione di una congiunzione di due proposizioni non è la congiunzione della negazione delle due proposizioni. La risposta "Un poligono regolare non è equilatero e non è equiangolo" non è corretta. Questo potrebbe anche essere verificato attraverso le tabelle di verità di $\neg (p \wedge q)$ e $\neg p \wedge \neg q$.

La negazione della proposizione di partenza si può anche esprimere nel seguente modo: "Un poligono regolare non è equilatero o non è equiangolo". Si potrebbe verificare che $\neg (p \wedge q)$ equivale logicamente a $\neg p \vee \neg q$, relazione di De Morgan.

2.3 Negazione di proposizioni contenenti quantificatori.

p: "tutti i numeri interi positivi sono maggiori di zero"

$\neg$ p: "non è vero che tutti i numeri interi positivi sono maggiori di zero" oppure " non tutti i numeri interi positivi sono maggiori di zero" oppure "esiste almeno un numero intero positivo che non è maggiore di zero".

La prevedibile risposta " nessun numero intero positivo è maggiore di zero" non è corretta.

2.4 Negazione di una negazione o doppia negazione.

p: "La circonferenza ha un centro di simmetria"

$\neg$ p: "La circonferenza non ha un centro di simmetria"

$\neg (\neg p)$: "Non è vero che la circonferenza non ha un centro di simmetria".

La maggiore difficoltà per i ragazzi è costituita dal fatto che nel linguaggio naturale, comunemente usato, spesso due negazioni si rafforzano a vicenda.

3. Verso le definizioni

Dai programmi della scuola media:
"Sollecitare ad esprimersi e comunicare in un linguaggio che, pur conservando piena spontaneità, diventi sempre più chiaro e preciso.
Guidare alla capacità di sintesi, favorendo una progressiva chiarificazione dei concetti. Ricerca costante di chiarezza, concisione e proprietà di linguaggio".

Alcuni punti significativi del percorso didattico.	Esempi di attività didattiche proponibili.
Descrizioni (sia di oggetti reali che di immagini mentali).	- Cruciverba al contrario - Togliere da un testo le parole che sembrano superflue - Completare una frase in cui mancano alcuni termini - Simulare la descrizione di un oggetto fatta per telefono a qualcuno che lo dovrà disegnare o indovinare - Indovinare qualcosa con domande e risposte si / no, cercando di ottimizzare le domande
Definizioni (come ciò che è essenziale, inequivocabile, valido per tutti).	- Togliere da una descrizione ridondante tutto ciò che non è essenziale e individuare ciò che è indispensabile - Giochi del tipo "Memory" con carte che a coppie riportano figure di oggetti e le loro definizioni - Individuare in un insieme di definizioni di un ente quella corretta o quelle equivalenti - Esercizi di logica dei predicati e rappresentazioni insiemistiche - Uso di diagrammi di Carroll - Giochi del tipo "Indovina chi" con figure, numeri, animali, piante

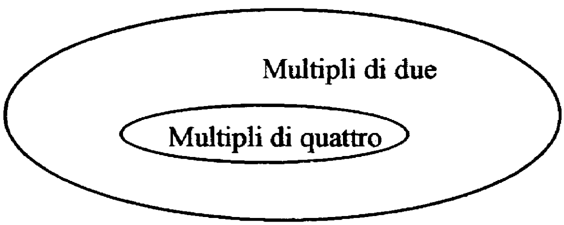
Un'altra proposta per appropriarsi del concetto di definizione potrebbe essere quella di una ricerca da fare in classe sul significato del termine "definizione" in diverse discipline come la matematica, la lingua, le scienze naturali.

4. Il concetto di implicazione e attività di preparazione alla deduzione.

Il concetto di implicazione, che si potrà anche indicare con il simbolo => non risulta sempre facile per i ragazzi della scuola media. Tra le molte difficoltà che si osservano c'è la confusione tra l'implicazione semplice => e la doppia implicazione <=> . Riteniamo che l'insegnante possa accogliere all'interno dei contenuti tradizionali numerose occasioni per richiamare l'attenzione sul concetto in esame.

4.1 Anche in una prima media lavorando sui multipli e sui divisori, si potrà porre la domanda: "E' vero che se un numero è multiplo di quattro, allora è anche multiplo di due?"

La situazione potrebbe essere visualizzata anche con un diagramma, oppure, in modo parziale, nella tabella dei numeri naturali fino a cento.



L'insegnante potrà guidare i ragazzi alla consapevolezza che per provare l'implicazione richiesta sarà necessario provarlo per tutti i multipli di quattro, mentre per provare che in questo caso non vale la doppia implicazione sarà necessario un solo controesempio.

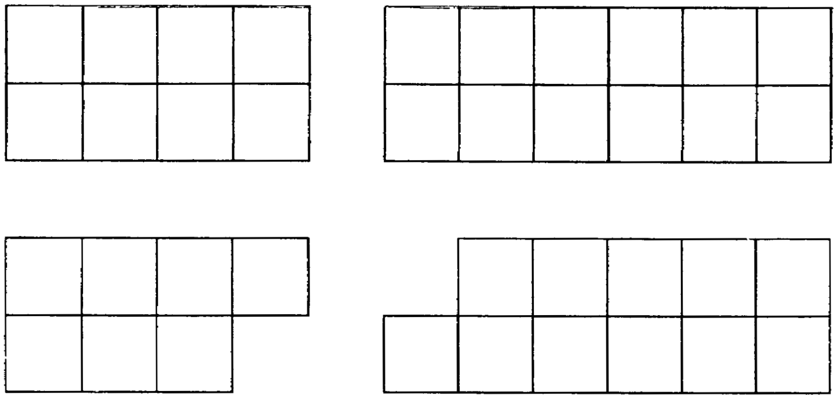
Riteniamo che una scrittura del tipo $4\ n = 2\ (2n)$, qualunque sia n, debba essere a questo livello un punto di arrivo e non debba "bruciare" la ricchezza delle argomentazioni addotte dai ragazzi.

4.2 In ambito geometrico si potrà richiamare l'attenzione degli alunni su affermazioni del tipo:
"Il quadrilatero ABCD è un rombo => le diagonali del quadrilatero ABCD sono tra loro perpendicolari". Riteniamo importanti gli sforzi dei ragazzi per spiegare, per argomentare anche in modo intuitivo e non ancora rigoroso affermazioni di questo tipo. Anche in questo caso potrà essere interessante porsi la domanda: "Se un quadrilatero ha le diagonali perpendicolari possiamo concludere che esso è un rombo?".

4.3 Il terzo esempio che proponiamo qui di seguito è la tabella in cui P significa "numeri pari" e D significa "numeri dispari".

+	P	D
P	P	D
D	D	P

Ci chiediamo se in una scuola media questa tabella possa essere oggetto di riflessione e palestra per attività di tipo dimostrativo, invece che frettolosamente data per ovvia.
Un primo modo per verificare la tabella proposta potrebbe essere quello di controllare tutti i numeri fino a dieci, oppure a venti, fabbricando un cartellone. Bisognerà stimolare nei ragazzi l'esigenza di una dimostrazione generale. In alcuni libri di testo è proposta una dimostrazione di tipo geometrico, nella quale i numeri pari vengono rappresentati con rettangoli di base variabile e altezza due quadretti, mentre i numeri dispari vengono rappresentati con rettangoli somiglianti ai primi ai quali però viene aggiunto un quadretto come in figura.



Rappresentando la somma dei numeri con l'operazione di accostare queste figure, i risultati della tabella sono confermati in modo evidente.

Dimostrazioni di tipo algebrico come $2n + 2m = 2 (n + m)$ etc.., potranno essere proposte dall'insegnante nel momento da lui ritenuto più opportuno, eventualmente come motivazione per l'introduzione del calcolo letterale.

5. Dimostrare nella scuola media

5.1 Dai programmi del 1979: " L'insegnamento della matematica si propone di condurre gradualmente a verificare la validità delle intuizioni e delle congetture con ragionamenti via via più organizzati" .

Nel corso della scuola media i ragazzi vengono avviati alla dimostrazione che è un obiettivo dei corsi di studio successivi. Il conseguimento di questo obiettivo può essere agevolato se si sono condotte nel tempo attività propedeutiche.

E' importante per esempio abituare i ragazzi a chiedersi costantemente il perché e a motivare sempre le loro affermazioni.

Inoltre è opportuno partire da situazioni concrete, modellizzare enti geometrici e numerici per poter dare una base più solida alle intuizioni e per compiere delle prime verifiche su casi particolari.

Utilizzare rappresentazioni di vario tipo che consentano di stabilire legami, relazioni, classificazioni.

Condurre una continua riflessione sul linguaggio e sulla correttezza dei ragionamenti tratti da vari testi o anche inventati.

Abituare i ragazzi al confronto delle proprie opinioni e congetture attraverso l'argomentazione e la confutazione.

Partire da conoscenze acquisite per favorire il processo di costruzione dell'edificio matematico. In questo senso proponiamo una attività di geometria piana che ci sembra particolarmente significativa.

5.2 Nell'esempio riportato, graduabile in lunghezza e quindi in difficoltà a seconda delle capacità e delle conoscenze degli alunni, si vuole mettere in evidenza la costruzione logica di una qualsiasi dimostrazione geometrica scomponendola in proposizioni elementari dipendenti l'una dall'altra in vario modo secondo un percorso non del tutto determinato.

In questa fase non si richiede una formalizzazione che segua le regole della logica pur se si introducono espressioni come "Se..allora, implica che, e.., almeno..".

La proposta si articola su tre livelli. Quella di secondo livello può essere verificata durante la lezione successiva a quella in cui viene presentata la prima parte, proseguendo poi per quella di terzo livello.

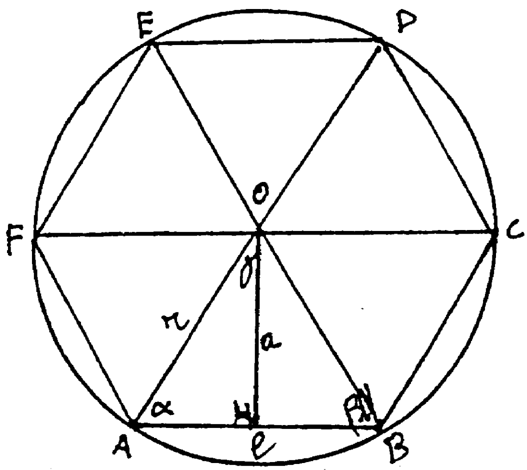
Riteniamo valido presentare questo discorso dopo aver trattato in modo completo l'argomento, per raggiungere una maggiore consapevolezza o per una valutazione.

E' dato un esagono regolare ABCDEF inscritto in una circonferenza.
Primo livello: verificare che i sei triangoli AOB, BOC, COD, DOE, EOF, FOA, sono congruenti tra loro.
Secondo livello: verificare che nell'esagono regolare i lati sono congruenti al raggio della circonferenza circoscritta.
Terzo livello: ricercare la formula per il calcolo dell'area dell'esagono regolare.

Primo livello. Consideriamo le seguenti proposizioni:
A) I raggi di una stessa circonferenza sono congruenti.
B) I lati dell'esagono ABCDEF sono congruenti per ipotesi.
C) I triangoli ottenuti congiungendo i vertici dell'esagono con il centro O della circonferenza sono congruenti per il terzo principio di congruenza.

$$A \cap B \Rightarrow C$$

Secondo livello. Consideriamo le seguenti proposizioni:
D) La somma degli angoli al centro è un angolo giro.
E) Gli angoli al centro sono congruenti.
F) Ciascun angolo al centro γ è di 360° : 6 = 60°.
G) I triangoli sono isosceli perché OA = OB = OC = OD = OE = OF = r.
H) Gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono congruenti: $\alpha = \beta$.
I) La somma degli angoli interni di un triangolo è 180°.
J) La somma degli angoli alla base $\alpha + \beta$ = 180° - 60° = 120°
K) $\alpha = \beta$ = 120° : 2 = 60° .
L) Se un triangolo è equiangolo, allora è equilatero.
M) I triangoli sono equilateri perché $\alpha = \beta = \gamma$
N) l = r.



Terzo livello. Consideriamo le seguenti proposizioni:
Q) La superficie dell'esagono A es è data dalla somma delle superfici dei triangoli A tr che lo compongono, per cui: A es = Σ A tr = 6 A tr.

$$\text{R) A tr} = \frac{b \times h}{2}$$

$$\text{Q) A es} = 6\,\frac{AB \times OH}{2} = 6\,\frac{l \times a}{2} = p \times a,$$

dove "p" e "a" indicano rispettivamente il semiperimetro e l'apotema dell'esagono dato.

La discussione in classe può essere animata ponendo alcune domande:
- E' possibile cambiare l'ordine delle proposizioni? Perché?
- Quando possiamo usare l'espressione "Se.. allora"?
- Ogni proposizione ne implica un'altra?
- L'unione di due proposizioni ne implica un'altra?
- Le proposizioni assegnano valore di verità ad altre proposizioni?
- L'implicazione è ancora vera scambiando la proposizione conseguente con l'antecedente?

Per ogni livello si potrebbero scrivere le relative proposizioni su bigliettini da estrarre casualmente una o due o più alla volta, discutendo intorno all'eventuale percorso logico che si viene a comporre.

Questo testo è il risultato del lavoro del gruppo di Logica nell'ambito del quarto Corso UMI-MPI in didattica della matematica con il coordinamento di Fabio Brunelli (Firenze).
Lucca 1-11 settembre 1997

COMPONENTI DEL GRUPPO

Franco Barcello	Montalto Uffugo (CS)
Nella Benedetti	Roma
Emilia Calcagno	Celle Ligure (SV)
Rita Conicella	Pescara
Lucia D'Ambrosio	Bisceglie (BA)
Giulio De Cunto	Benevento
Giuseppe Francica	Vibo Valentia
Giuseppe Giacometti	Forlì

ELENCO DEI PARTECIPANTI

Annolfi Luigi	SMS Petrarca	S. Severo (FG)
Armiento Susanna	SMS Amaldi	Roma
Barcello Franco	SMS Lodecimo	Rose (CS)
Benedetti Nella	SMS Vivaldi	Marino (Roma)
Brigaglia Bernardino	SMS Diaz	Olbia (SS)
Brovedan Siro	SMS Bianchi	Codroipo (UD)
Calcagno Emilia	SMS Pertini	Borghetto (SV)
Cancedda Annarella	SMS	Narcao (CA)
Cardaci Rita	SMS Guzzardi	Adrano (CT)
Carmeli Gianfranco	SMS Milani	S. Giorgio (MN)
Conicella Rita	SMS Silone	Montesilvano (PE)
D'Ambrosio Lucia Anna	SMS Ferraris	Bisceglie (BA)
De Cunto Giulio	SMS Paga	Petralcina (BN)
Fiorucci Ada	SMS Galilei	Acquasparta (TR)
Francica Giuseppe	SMS Bruzzano	Vibo Valentia
Giacometti Giuseppe	SMS Zangheri	Forlì
Giuliani Elda	SMS Boezio	Pavia
La Pegna Patrizia	SMS Mazzini	Roma
Latorre Giuliano	SMS Pascoli	Matera
Lazzaro Daniela	SMS Dante	Salzano (VE)
Leone Maria	SMS Tinozzi	Pescara
Milione Carmela	SMS Recupero	Catania
Palumbo Luigia	SMS Giovanni XXIII	Barletta (BA)
Petrolino Donato	SMS Girardi	Petrella Tif. (CB)
Pio Claudia	SMS Gattinara	Vercelli
Piovano Guido	SMS Muzzone	Racconigi (CN)
Remitti Angelo	SMS Ferrari	Maranello (MO)
Rocco Marina	SMS Div. Julia	Trieste
Sagripanti Anna Maria	SMS Bacci	S. Elpidio (AP)
Salomone Annalisa	SMS Sarpi	Settimo Mil. (MI)
Scalabrella Alessandra	SMS	Forte dei Marmi (LU)
Scotto Di Clemente Graziano	SMS Serena	Treviso
Tieghi Silvia	SMS Galilei	Pieve a Nievole (PT)
Tizzani Paola	SMS Calvino	San Remo (IM)
Torre Amelia	SMS Bianco	Salerno
Venturelli Michelina	SMS Battisti	Roma

VOLUMI DELLA COLLANA *QUADERNI* GIÀ PUBBLICATI

1 – Gestione e innovazione*
2 – Lo sviluppo sostenibile
3 – La valenza didattica del teatro classico
4 – Il postsecondario per la professionalità* (2 tomi)
5 – Dalla memoria al progetto
6 – La sperimentazione della sperimentazione*
7 – L'algebra fra tradizione e rinnovamento
8 – Probabilità e statistica nella scuola liceale
9 – L'Italia e le sue isole
10 – Lingua e civiltà tedesca
11 – La scuola nel sistema polo** (manuale guida)
12 – La "città" dei filosofi
13 – Le città d'Europa
14 – Dal passato per il futuro
15 – Gestione, innovazione e tecnologie*
16 – Per non vendere il cielo
17 – Briser la glace: la dinamica della comunicazione francese
18 – Dalla lingua per la cultura: la didattica del latino
19 – L'insegnamento della geometria (2 tomi)
20 – La lingua del disegno: al crocevia fra scienza e arte
21 – Insegnare storia**
22 – Problemi della contemporaneità.
Tomo primo: Unità e autonomie nella storia italiana
23 – Aritmetica**
24 – Analisi matematica**
25 – Logica, probabilità, statistica**
26 – "I temi 'nuovi' nei programmi di matematica (probabilità, statistica, logica, …) e il loro inserimento nel *curriculum*" (2 tomi)**

N.B. I titoli caratterizzati dall'asterisco (*) si riferiscono a *Quaderni* dedicati alla formazione dei Presidi; gli altri sono dedicati alla formazione dei Docenti. I titoli segnalati col doppio asterisco (**) si riferiscono alla serie "Documenti di lavoro"

matteoni stampatore Lucca
luglio 1998

MALGRÉ TOUT

«Io non credo che si renda omaggio
alla verità e alla giustizia, che della
verità è compagna inseparabile,
se non si riconoscono accanto ai limiti
e alle carenze, non lievi, certamente non
marginali, che a volte toccano la vita
della scuola, anche i meriti e l'impegno,
sempre umile e qualche volta eroico,
dei tanti che nella scuola ci stanno con
fermezza di propositi, con chiarezza di
obiettivi, con sincerità di convinzioni
socio-culturali.»

Romano Cammarata