Scuola universitaria professionale
della Svizzera italiana
SUPSI

Repubblica e Cantone Ticino
Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport

DdM 01

Didattica della Matematica

Dalla ricerca alle pratiche d'aula

maggio 2017

ISSN 0395203

Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula

Dipartimento formazione e apprendimento,
Scuola universitaria professionale della svizzera italiana (SUPSI).
Repubblica e Canton Ticino, Dipartimento dell'educazione,
della cultura e dello sport (DECS).

Periodico semestrale, ISSN 0395203

DdM
Didattica
della
Matematica

01

maggio 2017

Riflessione e ricerca

Esperienze didattiche

Editoriale

Si inaugura con questo numero la rivista semestrale *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, diretta dal Centro competenze Didattica della Matematica (DdM) con il contributo del Servizio risorse didattiche, eventi e comunicazione (REC) del Dipartimento formazione e apprendimento della Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana. La rivista, voluta e sostenuta dal Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport, raccoglie l'eredità del *Bollettino dei docenti di matematica*[1], con l'intento di sviluppare e divulgare riflessioni, risultati di ricerca e significative pratiche d'aula nell'ambito della didattica della matematica. Una disciplina, quella della didattica della matematica, che negli ultimi 50 anni si è affermata nel panorama internazionale fornendo profondi spunti di riflessione teorici e concreti a livello disciplinare, sociale e culturale. È tramite la didattica della matematica che è possibile interpretare efficacemente ciò che avviene in aula quando si affrontano situazioni matematiche, con occhi più critici e obiettivi, consentendo a chi ne acquisisce gli strumenti di cogliere analogie e differenze con altre situazioni d'aula e di intervenire con competenza, consapevolezza e creatività sulla propria azione didattica. 1

Nella rivista vengono proposti i principali orientamenti in questo campo, a livello di ricerca e di pratiche d'aula, allo scopo di incentivare un proficuo scambio tra il mondo universitario e la scuola. Crediamo infatti che la ricerca in didattica della matematica debba nutrirsi di ciò che avviene nell'aula, e ad essa prima o poi debba ritornare, in un continuo scambio tra ricerca e formazione. Per questo la rivista DdM, pubblicata in lingua italiana, è costituita da tre sezioni, tra loro fortemente interconnesse: la prima legata a contributi di riflessione o ricerca, la seconda concernente esperienze didattiche realizzate in qualsiasi livello scolastico e l'ultima formata da recensioni di libri di matematica o didattica della matematica. Alcuni contributi saranno legati al contesto nel quale si trova a operare, il Canton Ticino, altri avranno un'apertura a livello nazionale e internazionale, per incentivare il confronto e lo scambio. La ricchezza del comitato scientifico internazionale assicura la qualità degli articoli.

Il primo contributo di questo numero è una profonda riflessione sulla terminologia utilizzata da una delle teorie più studiate in didattica della matematica, la teoria dell'oggettivazione, messa in relazione con l'uso che si fa degli stessi termini in altre aree filosofiche e sociologiche. In particolare viene discusso il significato dei termini sapere, conoscere e lavoro, mostrandone la complessità e i differenti significati con cui talvolta sono utilizzati anche nella ricerca e nella sua comunicazione. Nella stessa sezione vengono trattati il problem solving e l'argomentazione, due competenze fondamentali che l'educazione matematica dovrebbe contribuire a sviluppare. A partire da una sperimentazione condotta in Italia sulle prove INVALSI, si discute di come l'attenzione al problem solving e ai processi argomentativi in classe non sia solo un'occasione di formazione per gli allievi, ma anche un importante strumento per gli insegnanti per interpretare meglio eventuali difficoltà dei propri allievi.
Questo contributo è fortemente collegato con l'ultimo articolo di questa sezione dove vengono analizzate le risposte fornite ad un interessante item relativo alla

1. Per creare continuità, dal sito della rivista DdM è possibile collegarsi all'archivio online che presenta i numeri del *Bollettino dei docenti di matematica* dal 43 al 73 scaricabili in formato PDF.

Prova standardizzata di matematica somministrata a tutti gli allievi di quinta elementare del Canton Ticino. Da questa analisi si rileva come le risposte sbagliate di diversi studenti siano legate a difficoltà nella comprensione del testo dell'item, in particolare a difficoltà di interpretazione linguistica, che è bene considerare dal punto di vista didattico per la diagnosi di specifiche difficoltà e per suggerire "zone d'intervento".
Nella sezione delle esperienze didattiche, nel primo articolo è descritto l'uso intenzionale di più strumenti: un pantografo, un software di geometria dinamica e una lavagna interattiva multimediale, per introdurre studenti di seconda media all'idea di simmetria assiale come corrispondenza biunivoca tra punti del piano, superando quella più ingenua di trasformazione di figure.
Segue un interessante progetto interdisciplinare basato sull'ideazione e creazione di giochi matematici proposto per allievi di prima media, che è stato progettato e sperimentato con l'intento di consolidare le competenze matematiche già acquisite e di promuovere lo sviluppo e l'affinamento di alcune competenze trasversali, come la collaborazione.
Sempre in ambito interdisciplinare si colloca il successivo contributo, incentrato sui laboratori Doremat, dedicati a scoprire la matematica che c'è nella musica e a suonare e ascoltare la "musica della matematica". Due discipline, solo apparentemente lontane, che si uniscono allo scopo di motivare gli studenti e renderli consapevoli del fatto che si può leggere la musica con occhi matematici.
Nell'ultimo contributo vengono proposti alcuni riferimenti teorici legati alla robotica educativa e si discute sui motivi che spingono a portarla a scuola. Da una parte i robot possono essere proposti per avvicinare i giovani alle tecnologie e al pensiero informatico, dall'altra possono fungere da supporto per sviluppare competenze sia disciplinari sia trasversali. L'articolo presenta anche una sperimentazione realizzata con il robottino BeeBot nella scuola elementare.
Seguono poi recensioni di libri utili per approfondire vari aspetti di matematica e della sua didattica.

In questo primo editoriale vogliamo cogliere l'occasione per ringraziare tutti coloro che hanno contribuito alla realizzazione di questo progetto. In particolare, il Dipartimento formazione e apprendimento e il Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport che lo hanno voluto e sostenuto; tutte le persone che negli anni precedenti hanno aperto la strada della didattica della matematica in Canton Ticino tramite il *Bollettino dei docenti di matematica*; e tutti coloro che in modi diversi contribuiscono alla realizzazione di questa rivista: membri del comitato scientifico, del comitato redazionale e tutti i ricercatori, insegnanti e i loro studenti che con i loro contributi e le loro proposte potranno alimentare e arricchire questo progetto.

Il nostro desiderio è di creare un'occasione culturale e professionale di formazione e di scambio di idee e di esperienze, qualcosa che possa essere d'aiuto alla ricerca e alla scuola. Siamo infatti convinti che siano il confronto, il dialogo, lo scambio e la condivisione di esperienze e riflessioni gli elementi indispensabili per una buona ricerca e una buona didattica. Uniti dal fine comune di far comprendere, mobilitare, apprezzare e semmai, addirittura, amare la matematica.

Prof. Silvia Sbaragli
Dipartimento formazione e apprendimento, SUPSI

Riflessione e ricerca

DdM

Sapere, conoscere, lavoro in didattica della matematica: un contributo alla teoria dell'oggettivazione[1]

Bruno D'Amore
DIE, Doctorado Interinstitucional en Educación,
Universidad Distrital Francisco J. de Caldas, Bogotá

Sunto / La teoria dell'oggettivazione, proposta da Luis Radford, in molti casi usa termini che sono utilizzati anche in altre aree filosofiche, a volte con significati differenti. Ciò rende necessaria una riflessione sulla terminologia adottata in questa teoria, prima di analizzare la sua relazione con l'uso che si fa degli stessi termini in altre aree. In quest'articolo si offre una breve discussione su questa terminologia, che deve essere interpretata come un contributo allo sviluppo di questa stessa teoria.

Parole chiave: teoria dell'oggettivazione; sapere; conoscenza; lavoro.

Abstract / The Objectification Theory, proposed by Luis Radford, often uses terms that are also used in other philosophical areas, sometimes with different meanings, making it necessary to reflect on the terminology used in this theory as a prelude to the use made of the same terms in other areas. This paper offers a brief discussion of this terminology, which should be interpreted as a contribution to the development of the theory.

Keywords: objectivation theory; knowing; understanding; working.

1 Premessa

I contributi alla didattica della matematica apportati da Luis Radford e i suoi allievi e collaboratori negli ultimi 10-15 anni hanno favorito nell'area della didattica della matematica una riflessione profonda su alcuni aspetti che in molte ricerche precedenti non si problematizzavano o si consideravano già acquisiti o, in alcuni casi, si ignoravano completamente (mi limito a scegliere come riferimenti: Radford, 1997, 2002, 2003, 2004, 2005, 2006, 2013a); questi studi hanno portato anche a discussioni rilevanti su alcuni temi classici della ricerca in didattica della matematica (D'Amore, Radford & Bagni, 2007).

1. Articolo già pubblicato in lingua spagnola: D'Amore, B. (2015). Saber, conocer, labor en didáctica de la matemática: una contribución a la teoría de la objetivación. In: L. Branchetti (Ed.). *Teaching and Learning Mathematics. Some Past and Current Approaches to Mathematics Education*, pp. 151-171. Isonomia, On-line Journal of Philosophy — Epistemologica. University of Urbino Carlo Bo. http://isonomia.uniurb.it/epistemologica / http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/damore/863%20Articolo%20Isonomia%2 espanol.pdf. Si ringrazia l'editor PhD Laura Branchetti per la concessione fatta di poter ripubblicare l'articolo nella sua versione italiana.

La possibilità di leggere/studiare molti dei suoi recenti lavori, di partecipare a incontri, convegni e dibattiti, di seguire tesi di dottorato su questo tipo di tematiche, mi ha portato ad alcune riflessioni che desidero fare pubbliche mediante questo testo.

Si tratta, soprattutto, di esaminare alcune parole chiave della teoria dell'oggettivazione, discutendone il significato da un punto di vista filosofico e sociologico, mostrandone la complessità e i differenti significati con cui talvolta sono utilizzate anche nella ricerca e nella comunicazione della stessa. Questo al fine di contribuire al dibattito internazionale in corso sopra la suddetta teoria (anche approfittando, cosa che faccio sporadicamente e senza esplicitarlo, di studi personali in discipline differenti dalla matematica e dalla didattica, soprattutto di filosofia e di pedagogia), ma anche come strumento interpretativo per chi si avvicinasse a tali studi da non esperto.

La ragione che mi ha portato allo studio attuale è emersa dopo aver partecipato, dal 7 al 10 gennaio 2014, a un convegno solo in parte presenziale dove si è discusso su ricerche realizzate utilizzando come quadro teorico la teoria dell'oggettivazione. Ogni volta che ascoltavo i differenti interventi, sentivo la necessità impellente di approfondire in maniera critica alcuni dei temi trattati, non tanto per motivi di semplificazione concettuale, ma (al contrario!) per la necessità di evidenziare le complessità che si nascondevano; e anche con l'obiettivo di ridurre, limare e diminuire certe dissonanze apparenti con altre teorie e altre interpretazioni, provando a cercare radici comuni.

La teoria dell'oggettivazione rientra fra le teorie cosiddette socioculturali; in generale, in esse si suppone che la conoscenza sia generata dagli individui nel corso di pratiche sociali costruite storicamente e culturalmente. La produzione di conoscenza non dipende dunque da esigenze di adattamento, ma è incorporata in forme culturali di pensiero, relazionate con una realtà simbolica e materiale che offre le basi per interpretare, comprendere e trasformare il mondo degli individui, i concetti e le idee che essi si formano a proposito di detta realtà. L'apprendimento è la realizzazione di una conoscenza culturalmente oggettiva che gli studenti ottengono attraverso un processo sociale di oggettivazione mediato per mezzo di segni, linguaggi, artefatti e interazioni sociali, quando gli studenti si impegnano in forme culturali di riflessione e di azione.

Rispetto ai paradigmi precedenti, quello delle teorie socioculturali è una vera e propria rottura; si tratta infatti di interpretare in forma decisamente nuova le idee di conoscenza e sapere. Secondo le teorie socioculturali, il concetto di adattamento come forma di apprendimento non è sufficiente per intendere nel profondo l'idea di produzione di conoscenza o di appropriazione di conoscenza (l'apprendimento). Secondo queste teorie la conoscenza non è il risultato di strutture di carattere epistemico che trascendono la cultura, ma è essa stessa una forma culturale, costituita da riflessioni e azioni incorporate nelle stesse pratiche sociali, con la mediazione del linguaggio, dovuta all'interazione sociale, grazie all'uso di segni e alla creazione di opportuni artefatti (Radford, 2011).

La teoria dell'oggettivazione, in particolare, si basa sull'idea considerata fondamentale che l'apprendimento è allo stesso tempo conoscere e divenire, cioè non può essere circoscritto al solo ambito della conoscenza ma deve affrontare l'ambito dell'essere, quello specifico dei soggetti. Lo scopo dell'educazione matematica è uno sforzo dinamico, politico, sociale, storico che spinge i soggetti riflessivi ed etici alla creazione dialettica relativamente a discorsi tematici e pratiche di carattere matematico che si costituiscono storicamente e culturalmente, discorsi e pratiche che sono in continua evoluzione. Le basi filosofiche di questa posizione possono essere rintracciate nei lavori del filosofo tedesco Georg Wilhelm Friedrich Hegel e nei successivi sviluppi dovuti a Karl Marx e a tutta la tradizione cosiddetta dialettica, Evald Ilyenkov, Boris Mikhailov, Lev Semënovič Vygotskij, per esempio (Radford, 2006; D'Amore & Radford, 2017).

2 Sapere e ontologia

Si tratta di una delle parole di maggiore uso in didattica, in tutte le didattiche. «Lo studente acquisisce *sapere*», «Come si costruisce il *sapere*», «Come si trasmette il *sapere*», ecc., sono temi che hanno visto interpretazioni diverse da parte di celebri autori che non vale la pena ricordare qui in maniera pedante.

Ho trovato sempre affascinante il fatto che la radice linguistica europea di "sapere", *sap*, riunisce tanto il sentire sapore quanto l'avere saggezza o senso, condivisa anche da altre radici linguistiche. L'avere saggezza o senso (alcuni parlano di conoscenza) e il sentire sapore sono le origini ancestrali di quella idea tanto sofisticata che oggi si chiama *sapere*; questo fatto esalta il senso stesso che sta all'origine delle parole: il senso del gusto è legato alla capacità di conoscere e distinguere tra le conoscenze per scegliere quelle più adatte alle situazioni (che è il senso o che esprime l'aver saggezza).

Il sapere, però, porta inevitabilmente allo studio preliminare dell'essere in sé e a riflettere, per questo porta all'ontologia.

Si legge in un passo molto conosciuto di Parmenide (da: *Sulla natura*, fr. 2, vv 3 - 5; Diels & Kranz, 1903-1952): «l'essere è eterno; perché, se non fosse eterno, esisterebbe qualcosa prima dell'essere, il che è contraddittorio.»

In questa considerazione si condensa metà della storia della filosofia. Il discorso sull'essere porta al dibattito: "mondo eterno versus mondo creato" e al tema di "Dio". Ma Dio è dentro l'essere, dando ragione a Baruch Espinoza; oppure, come distinguere un essere che è un Dio da un essere che non è Dio? Tutte le prove dell'esistenza di Dio hanno una certa coerenza logica, ma hanno anche un evidente *non sequitur*; per esempio, passando da movimento a movimento si trova un movimento, non un essere divino. Così, passando di causa in causa, eccetera. Per esempio, Tommaso D'Aquino (nella *Summa Theologiae*, I, q: Tommaso D'Aquino, 1990) conclude, dalla sua famosa catena dell'essere, che esiste qualcuno onnipotente, onnisciente, ecc., *a priori*; conclusione gratuita, con una pericolosa assunzione implicita: che la forma di vita più elevata possibile sia l'essere-persona. Questo coincide con la nostra esperienza: le piante si adattano meglio alla vita, una sequoia vive mille anni o più, ma la percepiamo come un essere inferiore a noi. In conclusione, la forma di vita suprema ha intelletto, coscienza, volontà ecc. E così noi riversiamo questa conclusione sulla nostra idea di Dio.

Però, è necessario che sia così? Non potremmo essere noi i vermi piatti, che non percepiscono la terza dimensione? Siamo e sappiamo, o solamente siamo? Sarebbe possibile sapere senza essere?

Altra domanda fondamentale, espressa esattamente con le parole di Leibniz: *pourquoi il y a plus tôt quelque chose que rien?* (Leibniz, 1714); e cioè la fondamentale domanda metafisica: *Cur est aliquid?* È la domanda di tutto il sapere, alla cui risposta ci aiuta nuovamente Parmenide, nella sua profonda schematicità: perché il niente, essendo esattamente ciò, non può essere. E così torniamo a: «l'essere è, il non essere non è», che appare ora molto meno ovvio. Il niente non può essere senza convertirsi in qualcosa.

Essere, sapere, conoscere costituiscono pertanto una successione causale. Noi, i docenti, i nostri alunni, siamo, sappiamo, conosciamo in forma indistinguibile.

3 Conoscere e gnoseologia

Fatto un rapido riferimento al problema ontologico, voglio concentrarmi ora sull'aspetto gnoseologico, o della conoscenza. Inutile dire che tra i due esiste una correlazione molto forte, si potrebbe dire che sono omozigoti; però sono comunque due e non uno. Parto da alcune tesi ovvie.

La prima contrapposizione di base, di tipo analogo a quella fondamentale tra protozoi e metazoi di Linneo, è tra, per così dire, i dogmatici e gli scettici, cioè tra coloro che considerano che la conoscenza possa darsi, e coloro che lo negano (ovviamente il termine "dogmatico" deve essere considerato in un'accezione particolare che emergerà nel contesto di questo stesso lavoro). La conoscenza è e può essere acquisita; la conoscenza è, ma rimane al di fuori di noi.

Facciamo esempi riferendoci alla filosofia antica.
Esempi del primo tipo: Socrate, Platone, Aristotele (cioè la linea "vincente"); del secondo tipo: Protagora, Gorgia da Lentini, Pirro di Epiro.

L'argomento principale dei primi contro i secondi è: se la conoscenza non esiste, tu come fai a saperlo?, ossia un uso filosoficamente interessante della *consequentia mirabilis*.[2] Questo metodo deduttivo appare in un famoso passo del *Teeteto* (Vailati, 1911) e nella *Metafisica* di Aristotele (in cui la *consequentia* a parer mio non è esplicita ma sottointesa, al contrario di ciò che si afferma in Łukasiewicz, 1951); che si può esprimere come segue: se lo scettico nega tutto, compreso il significato, allora non sta dicendo niente che abbia senso, pertanto il *phytòs estì*, è come una pianta, vegeta in uno stato pre-umano. 2

2. La *consequentia mirabilis* è la formulazione di uno speciale principio di dimostrazione per assurdo che è chiamato anche "principio di Clavio" da Jan Łukasiewicz (1970), la cui formulazione è data generalmente dalla seguente forma: $(\neg T \rightarrow T) \rightarrow T$. In realtà essa deve essere espressa metalinguisticamente per formulare un'interessante deduzione (usata da Girolamo Saccheri e Georg Cantor, tra gli altri), che è quella che l'ha resa celebre: se da $\neg T$ si può dedurre T, allora T. C'è chi ha voluto vedere questa deduzione già in Aristotele, altri in Platone, altri in Sesto Empirico. Una dettagliata dissertazione storico-logico-analitica relativa a questa deduzione si trova in D'Amore e Matteuzzi (1972).

L'argomento tipico dei secondi si articola in due parti: negazione della conoscenza razionale (che porta a paradossi, antinomie e sofismi molto conosciuti), e negazione della conoscenza sensibile (i sensi ci ingannano, gli esempi sono numerosi a partire dai paradossi di Zenone).[3] 3

Una volta accettata la prima tesi, cioè che la conoscenza si possa trasmettere, la domanda seguente è sul "come", e qui le soluzioni sono diverse, interessantissime per i nostri studi specifici in didattica della matematica. Voglio procedere in modo tassonomico, seguendo gli schemi classici.

Se si trasmette, si trasmette a *priori o a posteriori*? Nel primo caso abbiamo l'innatismo, per esempio l'anamnesi di Platone (molto conosciuto il fenomeno di reminiscenza descritto nel *Menone*, nel *Fedro* e in altri *Dialoghi*; si veda Platone, 1997), per citare il caso tipico; nel secondo abbiamo l'empirismo, il *nihil est in intellectu quod prius non fuerit in sensu*, assioma della filosofia scolastica, fatto proprio fino a convertirlo in un caso paradigmatico da John Locke (1690) (ma in egual maniera si può attribuire a qualsiasi filosofo anglosassone (Williams, Montefiore, 1966; Turco, 1974)).

Tra gli aprioristi, dobbiamo distinguere tra chi considera come criterio di conoscenza l'intuizione o (*vel*) l'evidenza; qui possiamo trovare Platone e la sua *noesis*, che è sulla *dianoia*, o conoscenza logica razionale (D'Amore, Fandiño Pinilla Iori, 2013, pp. 86-87), che è tornata prepotentemente alla ribalta negli anni '90 dello scorso secolo grazie alle proposte rivoluzionarie di Raymond Duval (1993, 1995); ma forse l'apriorista più paradigmatico a favore della intuizione e della evidenza fu René Descartes (1637), con il suo criterio delle idee chiare e distinte, che dà precisamente, come paradigma dell'evidenza, il famoso *cogito*.

All'altro estremo, quello di chi sostiene l'*a posteriori*, troviamo quelli che potremmo chiamare logicisti, per i quali il raziocinio è sul gradino più alto, o anche la logica stessa. Cioè, per esempio, Aristotele e Leibniz. Per Leibniz, infatti, tutto è analitico, tutta la verità ha la sua base in un principio logico di identità, almeno per una mente perfetta; pertanto le cose che per noi sono empiriche, sono tali perché non le sappiamo "calcolare" (cioè derivarle da un *calculus ratiocinator*; si veda D'Amore, 2001b), ma non sono empiriche per Dio.

Qui l'innatismo assume una forma molto attenuata: possiamo anche non avere idee innate (come pensano, invece, Platone e Cartesio) ma abbiamo già dalla nascita, in quanto essere umani, almeno le *facoltà*, la capacità intellettuale; questa è la potente risposta di Leibniz a Locke nei *Nuovi saggi sull'intelletto umano* (1704): *nihil est in intellectu quod prius non fuerit in sensu*, niente è nella mente che prima non sia stata nei sensi, *nisi intellectus ipse*, se non l'intelletto stesso. In altre parole: se la mente nel momento della nascita fosse una *tabula rasa*, non si vedrebbe il perché i gatti non potrebbero arrivare a conoscere; alla nascita il bambino e il gatto hanno una mente vuota di contenuti empirici, ma il primo ha la capacità formale di organizzarla secondo la logica.

3. Le interpretazioni dei paradossi di Zenone possono essere a favore o contro i Pitagorici: le due versioni, sebbene siano antitetiche, sono entrambe ammissibili: si veda D'Amore, 2001a.

Dobbiamo anche fare una seconda essenziale distinzione tra i razionalisti. Dato che la conoscenza ha due poli, il soggetto che conosce e l'oggetto conosciuto, dobbiamo distinguere tra coloro che considerano il principio attivo, o criterio di verità, nel primo, e coloro che lo attribuiscono al secondo. Abbiamo così gli idealisti, nel primo caso, Fichte, Schelling, Hegel, e i realisti, Aristotele, Leibniz, Spinoza. In mezzo c'è Kant: le forme *a priori* sono nel soggetto, e costituiscono un filtro obbligato per l'oggetto, che non è conosciuto se non attraverso la sua costruzione in forma di "fenomeno" (Kant, 1781).

Nell'altro senso, gli empiristi prendono una strada diversa per recuperare il sapere formale, cioè il nominalismo. Per Locke le "verità di ragione" devono essere giustificate; il che non significa non credere nella matematica, ovviamente, ma che le verità della matematica hanno a che fare con i numeri puri, cioè oggetti inesistenti, non le cose, le *res*. Da qui si spiega la grande tradizione di studi di logica degli anglosassoni, dei *calcolatori* da Cambridge fino a Boole.

Questo tentativo personale di sintesi appare ovvio e grossolano, ma è uno scheletro su cui si può ragionare in ambito didattico, che è ciò che ci interessa. Vediamo come.

1. Conoscenza ed ermeneutica
La conoscenza non è una banale duplicazione del mondo, come voleva un particolare tipo di positivismo o il neo-empirismo logico: eliminando il pensiero, avremmo due mondi e non uno e, semplicemente, ci saremmo certamente complicati la vita. (Per me furono fondamentali in questo campo gli studi delle seguenti opere: Santucci, 1970 e Pasquinelli, 1969).

Prendiamo ad esempio la conoscenza storica. Per un positivista la storia è il passato più il pensiero dello storico, con quest'ultimo che tende a zero; ma così il risultato sarebbe una cronaca, non la storia. Al contrario, la conoscenza storica è il passato più un'ermeneutica. Pertanto, la conoscenza deve essere uno schema concettuale progettato sopra il reale, non un secondo reale, ipotesi inutile, secondo me. Questo riferimento all'ermeneutica ci porta all'interno di riflessioni che già abbiamo fatto in didattica della matematica (Bagni, 2009). A pagina 20, Bagni scrive: «L'interpretazione è un momento chiave dell'avvicinarsi a un testo, a un contenuto, quindi per l'apprendimento; ma per interpretare è indispensabile avvicinarsi in qualche maniera al sapere in gioco, e questo ci porta al circolo ermeneutico. L'apprendimento è assimilabile a una costruzione più che ad una contemplazione».

2. Conoscenza e pregiudizi
Il secondo tema che dobbiamo affrontare è quello degli *idola*, nel senso baconiano, cioè i pregiudizi (Bacone, 1620). Qui mi riferisco principalmente alla conoscenza "scientifica", i cui *idola* sono le seguenti affermazioni considerate dagli ingenui come nozioni comuni o assiomi: la conoscenza scientifica è certa; la conoscenza scientifica è vera; la conoscenza scientifica è stabile.

Trovare controesempi è molto facile, specialmente per un matematico. Quanti danni fanno nel processo di insegnamento-apprendimento questi assiomi-*idola*…!

Pertanto, dall'aporia della doppia anima costituita da una parte dall'aspirazione alla stabilità, e dall'altra dal "progresso" (che è di segno opposto alla certezza e alla stabilità), propongo di uscire passando a un livello più fine, cioè al concetto di teoria; come fecero i pluralisti (Empedocle, Anassagora, Democrito ecc.) per uscire dalla contrapposizione Eraclito/Parmenide. Prendiamo per esempio Democrito: gli atomi sono sempre gli stessi, e qui recupera la stabilità eleatica di Parmenide, ma si combinano continuamente in maniere differenti, e qui recupera il *panta rei* di Eraclito. Allo stesso modo, possiamo dare certezza, verità e stabilità locale, all'interno di una teoria, ma la scienza passa continuamente da una teoria a un'altra.

3. Conoscenza e individuo
Uno sviluppo dialettico futuro potrebbe essere contenuto nell'osservazione che il conoscere porta necessariamente all'epistemologia e che il conoscere ha bisogno di un discorso sull'apprendimento, il che si generalizza, a volte, nel nostro campo, con il termine "educazione". Non è possibile affrontare questo tema senza usare il termine "individuo", la storia culturale che lo definisce, l'etica che indubbiamente accompagna ognuna delle riflessioni. Apprendere è quindi la soggettivazione e la trasformazione dovute all'apprendimento e all'oggettivazione. Con l'immediata conseguenza: mentre apprendo, cambio da qualche punto di vista, ma sono sempre la stessa persona. E con me cambia chi mi insegna. E finiamo con l'essere indistinguibili tra noi rispetto alla conoscenza. Però questo punto 3 dovrà essere il tema centrale di uno sviluppo successivo.

4 Azione, lavoro, prassi

I termini che danno il titolo a questo paragrafo girano attorno all'evidenza del fatto che, in una situazione di insegnamento e apprendimento, i due poli dell'azione, ossia docente e allievo, condividono una pratica che li lega, che li modifica, con ruoli e attività non sempre distinguibili, che si basa sull'idea di *lavoro* inteso nel senso marxista del termine.

Nella sua "conferenza di Barranquilla", Luis Radford ci dà le linee guida di questa interpretazione (Radford, 2013b). Cita giustamente la *Introduzione alla critica della economia politica* di Karl Marx (Marx, 1857): «le due grandi categorie con le quali si può definire il lavoro:
1) le *relazioni di produzione*, cioè le forme storiche e culturali di interazione umana;
2) i *modi di produzione*, cioè il modo di produrre degli individui».

Non vale la pena aggiungere altro, rinviando necessariamente allo stesso testo di Radford (perfetta la citazione di Dupré che faccio mia: «Né la materia prima né gli strumenti costituiscono la forza economica fino a quando non sono integrati dentro un sistema sociale» (Dupré, 1983, p. 86)).

Da questa prospettiva storico-sociale bisogna notare la precisa e profonda critica che fa Radford all'interpretazione della funzione dell'allievo, come *proprietario privato* che deve costruire il suo proprio sapere *negoziando* i suoi significati, e del docente che guida la costruzione dell'allievo (Radford, 2013b). Commenta Radford (2013b): «Non c'è teoria dell'educazione matematica che si sia attaccata con più forza e abbia promosso con uguale energia questi concetti come il costruttivismo nordamericano». Io voglio spingermi oltre, ma, questo sì, nella stessa direzione.

Dato che si tratta di lavoro, bisogna definire un valore, ricordando teorie economiche classiche: il valore di ogni cosa dipende dalla quantità di lavoro necessario per produrla (Adam Smith, David Ricardo, Karl Marx, solo per citare alcuni pensatori). E, per me, questo valore si basa sulla eterna dialettica tra "uomo storico" e "uomo sociale".

Per cercare un contributo a questa pista di analisi, mi servo di Friedrich Engels (1956).[4] 4
Perché citare proprio l'edizione italiana? Perché la terza edizione italiana di questo testo straordinario di epistemologia della scienza (marcatamente dialettica) è stata edita da un personaggio di eccezione, Lucio Lombardo Radice, matematico molto conosciuto negli ambienti italiani, politico attivo nel partito comunista, molto interessato ai problemi dell'insegnamento e dell'apprendimento della matematica e alla divulgazione della stessa.

Nell'introduzione di Lombardo Radice (Engels, 1956, p.16), si legge: «L'interesse di Marx era nettamente polarizzato verso l'*uomo storico*, l'uomo del lavoro e della produzione sociale, fino alla dialettica della prassi umana sociale».

A pagina 17: «Marx vedeva nel lavoro e nella produzione sociale un elemento del tutto nuovo e originale, rispetto ai processi naturali, che comporta un'altra dialettica. (…) Il fatto è che il primo elemento, il costituente elementare di tale dialettica, è la prassi, l'attività umana del lavoro. "Il difetto principale di ogni materialismo fino ad oggi, … è che l'oggetto, il reale, il sensibile è concepito solo sotto forma di oggetto o di *intuizione*; ma non come attività umana sensibile, come attività pratica, non soggettivamente"» (la frase tra virgolette è presa dalla sezione di F. Engels all'interno del libro, nel capitolo: Prima tesi su Feuerbach).

A pagina 18: «Sulla "parte ottenuta dal lavoro nel processo di umanizzazione della scimmia" il lettore trova, in questa *Dialettica della Natura* di Engels, un saggio che sviluppa brillantemente e con dettaglio l'idea di Marx, che l'uomo è il risultato del suo stesso lavoro».

Su questo punto si cita un articolo di un altro intellettuale italiano, Palmiro Togliatti (Togliatti, 1954); Togliatti affermava che «un vero naturalismo e un autentico umanesimo non possono emergere se non a condizione che la realizzazione della natura umana sia intesa come il risultato di un processo» (le parole sono di Lombardo Radice, p. 18, nota 2).

4. Si tratta della celebre opera *Dialettica della Natura* che Friedrich Engels progettò come idea per la redazione di parte di un volume che non riuscì a concludere, il cui indice pare fosse stato elaborato nel 1878 una prima volta e poi nel 1880. Ma io uso l'edizione del 1956, Roma: Editori Riuniti, per un motivo preciso.

Lo stesso a pagina 21: «L'azione reciproca esclude ogni primario assoluto e ogni secondario assoluto; ma è ugualmente un processo a due facce che, per sua natura, può essere considerato da due punti di vista differenti; per poter essere compreso nel suo insieme deve precisamente essere studiato successivamente da due punti di vista opposti, prima che il risultato possa essere compreso pienamente».

Quando diciamo che l'azione del docente e dell'allievo non sono "due azioni" ma "la stessa azione", troviamo esattamente questo punto di vista; il lavoro, quello che si produce, la persona che lo produce, i vari agenti ecc., sono tutte componenti all'unisono di un'unica attività che, con una sola parola, possiamo chiamare il *lavoro*.

Vediamo che cosa dice lo stesso Engels (1956) a pagina 190: «Di fronte a tutte queste creazioni, che si presentavano come prodotti diretti della mente e che sembravano dominare le società umane, i prodotti più modesti del lavoro manuale furono relegati in secondo piano; (…). Tutto il merito dei rapidi progressi della civilizzazione fu attribuito alla mente, allo sviluppo e all'attività del cervello; (…) anche i materialisti scientifici della scuola darwiniana ancora non riescono a farsi un'idea dell'origine dell'uomo perché, essendo ancora sotto l'influenza ideologica dell'idealismo, non riconoscono la funzione che ha avuto il lavoro in quel processo».

Secondo la mia opinione è una notevole identificazione che aiuta a capire posizioni diverse, di fatto antitetiche, nel processo di lavoro in aula, ma anche nella sua interpretazione, quel "valore" su cui ho posto l'accento iniziale.

Insisto: insegnare e apprendere sono indistinguibili, il docente trasforma sé stesso nella pratica di insegnare, così come l'allievo si trasforma nell'apprendere. Queste trasformazioni si devono al lavoro posto in pratica da entrambi in maniera personale ma nel contesto sociale di pertinenza, il contesto scuola, nell'evoluzione della pratica d'aula, che è un'azione sociale (non individuale) posta in atto da tutti quelli che partecipano ad essa.

L'"oggetto" costruito in questo lavoro è preventivamente delimitato, così come lo è nel lavoro in generale; non si tratta di replicare un modello o costruirne uno nuovo, ma di avvicinare il risultato dell'azione all'obiettivo, che qualcuno chiama istituzionale (D'Amore & Godino, 2006). Non è necessario che l'oggetto matematico in costruzione preesista in qualche modo metafisico, identificabile con l'oggetto di conoscenza in gioco, è sufficiente che questa sia parte della trasposizione didattica di un oggetto istituzionale posta in opera dal docente (D'Amore, 2001c).

5 Semantica e libertà di espressione

Non si sottolinea mai abbastanza il fatto che le nostre espressioni, in ogni contesto, di fronte a un'apparente libertà, sono al contrario condizionate dai contesti di carattere antropologico e sociologico. Per dar forza a questa idea, che considero fondamentale, mi servo degli studi di Benjamin Whorf. Gli interscambi dialogici sono sempre frutto di accordi, spesso impliciti; sto pensando a idee come «il taglio delle lingue madri», utilizzando proprio le parole di Benjamin Whorf.

È mia intenzione essere più preciso, utilizzando un'altra citazione di Whorf:

> «Tutti noi conserviamo un'illusione sull'atto di parlare, l'illusione che il parlare sia libero da obblighi, che è spontaneo, e che semplicemente "esprima" qualsiasi cosa che desideriamo esprimere. Questa apparenza illusoria deriva dal fatto che i fenomeni obbligatori all'interno del flusso apparentemente libero del discorso, sono talmente completamente dispotici, che il parlante e l'uditore sono legati inconsciamente da qualcosa come una legge naturale».
>
> (1959)

E ancora:

> «Noi selezioniamo la natura secondo linee tracciate dalla nostra lingua madre, le categorie e i tipi che isoliamo del mondo dei fenomeni non li troviamo lì perché sono lì, dinanzi agli occhi di ogni osservatore; al contrario, il mondo è presentato in un caleidoscopico flusso di impressioni che deve essere organizzato nella nostra mente. Noi facciamo a pezzi la natura, la organizziamo in concetti, e questo fondamentalmente perché partecipiamo a un accordo di organizzarla in tal forma; un accordo che è accettato da tutta la nostra comunità linguistica ed è codificato negli schemi della nostra lingua. L'accordo è totalmente implicito e non dichiarato, ma le sue condizioni sono assolutamente obbligatorie; non possiamo in alcun modo parlare se non sottomettendoci all'organizzazione e alla classificazione dei dati che l'accordo impone. Questo fatto è molto significativo per la scienza moderna, perché significa che nessun individuo è libero di descrivere la natura con assoluta imparzialità, ma che è obbligato a interpretarla in qualche modo anche quando la si considera libera al massimo».
>
> (Whorf, 1940)

A questa posizione di Whorf si è opposto con decisione un vasto gruppo di linguisti; tra tutti segnalo Louis Hjelmslev; si veda, ad esempio, Hjelmslev (1943, in particolare i capitoli 13, 15 e 21).

Ma non approfondisco qui questa controversia, sebbene qualcuno dovrebbe farlo. Gli effetti di questa contrapposizione in relazione con gli studi in didattica della matematica li considero più che evidenti.

Che cosa succede in questo scambio dialogico, in una situazione di insegnamento-apprendimento, assumendo che il conoscere è possibile e, come processo, dato in una pratica condivisa nella quale è in atto un lavoro che crea un uomo storico, frutto non solo di detto *lavoro*, ma anche delle sue origini culturali e sociali?

La complessità del fenomeno è evidente. Sarebbe opportuno dare esempi; ma, in attesa di analisi più profonde, specifiche ed esemplificative, mi limito a fare un riferimento al complesso di pratiche condivise che rispondono alla denominazione "dare una soluzione a una situazione problematica".

Per "situazione problematica" intendo non solo un testo, non solo le strategie risolutive, non solo le conoscenze matematiche coinvolte, ma il sistema di competenze reali, specifiche per tale problema, nel cui ambito si possa immaginare tutto quanto viene descritto dal significato semantico del testo che lo collega con le esperienze di ciascuno degli apprendenti (D'Amore, 1993, 2014).

Su queste esperienze (quelle che dopo si metteranno in atto durante il *lavoro*), segnalo i "fattori esperti" o, almeno, quelli che considero aventi un peso maggiore (una lista completa è impensabile):
– esperienza (questa già aprirebbe un mondo a sé);
– abitudine ad esprimere (oralmente e per iscritto) idee e azioni;
– capacità di crearsi rappresentazioni interne;
– capacità di proporre rappresentazioni esterne;
– competenza matematica adeguata;
– competenza linguistica adeguata;
– …

6 La pratica d'aula: alcune osservazioni sui gruppi

Potrebbe essere interessante riflettere su alcune componenti delle pratiche d'aula, che sempre si citano; tra queste, il lavoro cooperativo per la sua valenza cognitiva forte (per esempio il lavoro in gruppo da parte degli allievi). Non si deve credere in un'unicità di interpretazione terminologica nemmeno in questo caso (D'Amore, Fandiño Pinilla, 2012).

Sono molteplici e profonde le analisi moderne su questa metodologia, per esempio gli studi che definiscono le *Relazioni cooperative nella scuola* (Dozza, 2006).
Per esempio, esistono varie accezioni di gruppo:

– accezione sociologica: il gruppo è un insieme di due o più individui orientati verso un unico obiettivo individuale; sociologia, statistica e diritto identificano nell'oggettività del compito e nella coesistenza fisica di ognuno degli individui e dei sottogruppi l'elemento significativo, ma non prendono in considerazione gli aspetti relazionali, di comunicazione, né le dinamiche emotive e affettive;

– accezione antropologica: il gruppo è un insieme di individui che si riconoscono in determinati valori, miti, tradizioni, cerimonie, rituali, sistemi di segni; l'antropologo si interessa alla cultura e al processo di inculturazione (cioè al trasferimento del patrimonio culturale da una generazione all'altra) e di acculturazione (identificata nell'ibridazione tra culture); qui l'individuo è sia un utente che un agente attivo della cultura; ogni soggetto agisce, crede e ritualizza e così mantiene viva la cultura alla quale appartiene; in più, accettando altri contesti culturali, modifica la sua cultura di origine;

– accezione psicologia: il gruppo è un insieme di tre o più individui che si riuniscono come gruppo e hanno tra loro relazioni di influenza reciproca; lo psicologo con-centra la sua attenzione nelle relazioni, nelle comunicazioni e pertanto nel senso di appartenenza al gruppo; si parla di gruppo solo quando si stabiliscono, grazie a feedback, relazioni circolari; qui si studia con molta attenzione la relazione tra emittente e ricevente;

– accezione analitica: il gruppo è un insieme di tre o più individui che comunicano interagendo tra loro secondo una matrice comune interpersonale, secondo un sentire e un pensare progressivamente condiviso che si converte in patrimonio del gruppo; in questa accezione è necessaria una matrice di gruppo in cui le comunicazioni interpersonali trascendono l'individuo; ciò che qui interessa è la formazione di un pensiero condiviso;

– accezione pedagogica: un gruppo è un insieme di soggetti – persone che condividono contesti e relazioni rivolte a riconoscere e promuovere le potenzialità individuali nelle differenti età della vita; si tratta di una delle accezioni più vicine a quella che ci interessa; ma, secondo la pedagogia, tutti gli aspetti precedenti devono essere valorizzati dato che ognuno di questi contribuisce a creare l'identità stessa del gruppo e a studiare le dinamiche che lo caratterizzano; la pedagogia prende in considerazione tutti questi apporti al fine di creare una significativa pianificazione e una riflessione tra i membri del gruppo per raggiungere un'espansione, un arricchimento, una realizzazione di sé e soprattutto come strumento di orientamento verso il futuro; in questo senso, la formazione pedagogica riconduce i valori al soggetto-individuo-uomo-persona e al suo costituirsi come tale; per formare la base di questa costituzione si trovano valori diversi, come i principi fondamentali di libertà e uguaglianza, il riconoscimento e la valorizzazione delle diversità proprie e di quelle degli altri; tutto questo costituisce la base di un progetto esistenziale non solo per ognuno degli individui ma per tutta la società, sulla base della convivenza democratica e di un'emancipazione individuale; le condizioni di questa convivenza sono radicate nell'aperta critica sopra sé stessi, di tipo razionale, anti-dogmatica; notevole la collaborazione della pedagogia con le altre scienze;

– accezione formativa: il gruppo è un insieme di due o più soggetti-persone che stabiliscono relazioni di interdipendenza e coordinano le loro azioni e comunicazioni in contesti specifici con il fine di perseguire l'apprendimento e la co-costruzione delle identità, intelligenze e significati; è questa l'accezione che ha maggiore relazione con la didattica; l'attenzione qui si centra sul curriculum formativo e sopra le azioni, relazioni, comunicazioni, costruzioni e ri-costruzioni delle conoscenze a livello intra- e inter-soggettivo; gli studiosi di questa accezione osservano l'organizzazione dei contesti di apprendimento e di formazione, la inter-dipendenza e la responsabilità individuale all'interno del gruppo, il dominio di ognuna delle competenze sociali e l'esercizio delle abilità logiche, la ricostruzione personale di conoscenze e competenze, la motivazione intrinseca e la capacità di considerare il senso costruttivo dell'errore; la capacità di riflettere sull'esperienza vissuta è uno dei pilastri del gruppo di lavoro che permette una continua pianificazione che deve portare all'impegno di ognuno dei soggetti coinvolti che intervengono nel processo di insegnamento e apprendimento; tutto questo si presenta dando grande importanza alla continua ri-definizione dei contenuti, dei contesti e dei processi cognitivi ed emotivi.

Come si vede, definire che cosa è un gruppo, che cosa significa lavoro in una pratica condivisa, è problematico e complesso, ma sono stati fatti grandi passi in avanti, rispetto alle prime apparizioni di questa metodologia che appariva un po' confusa e ingenua. Oggi tutto questo è chiaro, tutto è categorizzato e formalizzato, e si basa sul concetto di lavoro realizzato in comune.
Voglio concludere ricordando la metodologia didattica della discussione in aula, nella quale il gruppo coincide con la classe; si tratta di un ottimo momento di attribuzione di significati personali e condivisi e di concetti tra docenti e allievi e tra allievi, che ha avuto proprio in didattica della matematica grande successo.

Segnalo anche che lo studio delle comunità di pratica che sviluppano la matematica, e pertanto principalmente le classi, sono state prese in seria considerazione negli ultimi anni come veri gruppi sociali, usando come strumento la sociologia, con risultati di grande interesse tanto teorico come pratico (Bagni & D'Amore, 2005; D'Amore, 2005; D'Amore & Godino, 2006; 2007; D'Amore, Font & Godino, 2007; 2008).

7 Conclusione

Essendo stato testimone fin dalla sua nascita della teoria dell'oggettivazione, ho sentito il dovere di prendere in considerazione, a distanza di oltre due decenni, alcuni termini usati da Luis Radford, per confrontarli con punti di vista personali, anche per riaffermare la loro complessità.

Su queste basi, ritengo di dimostrare che non esistono contraddizioni tra la teoria dell'oggettivazione e l'idea stessa di situazione, così come si presenta nella teoria delle situazioni didattiche. Sono sempre stato un fanatico sostenitore dell'unificazione delle teorie (Prediger, Bikner-Ahsbahs & Arzarello, 2008; Radford, 2008), più che della loro prolificazione; a volte le crisi, le differenze, le rotture si verificano o, meglio, si evidenziano, perché non si ha la pazienza di cercare le radici ultime, vere, reali di ognuna delle teorie. Alla base dell'oggettivazione si trovano radici culturali e storiche degli individui e delle teorie; ma alla base della definizione delle situazioni elaborata da Guy Brousseau negli anni '70 del secolo scorso esistono anche radici epistemologiche e culturali che dobbiamo rispettare e tenere in conto. In più di un'occasione, Brousseau richiama l'attenzione sulla "immersione nelle didattiche specifiche delle differenti conoscenze" (Brousseau, 2008, p. 108) mettendo in evidenza il ruolo delle radici culturali. In fondo, in più, molte delle sue riflessioni sugli ostacoli epistemologici non sono altro che l'analisi culturale delle conoscenze che determinano il lavoro in aula.

Ma il discorso si fa complesso e merita un futuro studio specifico centrato su questo preciso argomento.

Ringraziamenti
Ringrazio Martha Isabel Fandiño Pinilla e Vicenç Font per i loro commenti a una versione precedente di questo lavoro, commenti che mi hanno permesso di esprimere più in profondità il senso delle mie riflessioni.

Nota

Nei giorni 17-20 gennaio 2017 si è svolto a Toronto (Canada) il *Segundo Coloquio Internacional de la Teoría de la Objetivación* diretto da Luis Radford. A seguito della conferenza invitata tenuta dall'autore di questo articolo, è stato presentato il testo: "Puntualizaciones y reflexiones sobre algunos conceptos específicos y centrales en la teoría semiótico cultural de la objetivación: objetivación, saber y ontología, conocer y gnoseología, labor, semántica, comunicación" che amplia il contenuto di quanto qui esposto. Tale testo verrà pubblicato nel corso del 2017 sulla rivista PNA (Granada, Spagna).

Bibliografia

Bacone (1620). *Novum organum scientiarum*. New York: P. F. Collier [Traduzione inglese: 1900].

Bagni, G. T. (2009). *Interpretazione e didattica della matematica. Una prospettiva ermeneutica*. Bologna: Pitagora.

Bagni, G.T., & D'Amore, B. (2005). Epistemologia, sociologia, semiotica: la prospettiva socio-culturale. *La matematica e la sua didattica*. 1, 73-89.

Brousseau, G. (2008). *Ingegneria didattica ed Epistemologia della Matematica*. Bologna: Pitagora.

D'Amore, B. (1993). *Problemi. Pedagogia e psicologia della matematica nell'attività di problem solving*. Milano: FrancoAngeli. [Prefazione di G. Vérgnaud; II ed. 1996; Traduzione spagnola: 1997: Madrid: Editorial Sintesis].

D'Amore, B. (2001a). Corri, Achille, corri... Ovvero: come interpretare i paradossi. In B. D'Amore, *Scritti di Epistemologia Matematica*. 1980-2001, Bologna: Pitagora, 129-133.

D'Amore, B. (2001b). Riflessioni sulla Characteristica leibniziana. In B. D'Amore, *Scritti di Epistemologia Matematica*. 1980-2001, Bologna: Pitagora, 1-10.

D'Amore, B. (2001c). Un contributo al dibattito su concetti e oggetti matematici: la posizione "ingenua" in una teoria "realista" vs il modello "antropologico" in una teoria "pragmatica". *La matematica e la sua didattica*. 1, 4-30.

D'Amore, B. (2005). Pratiche e metapratiche nell'attività matematica della classe intesa come società. Alcuni elementi rilevanti della didattica della matematica interpretati in chiave sociologica. *La matematica e la sua didattica*. 3, 325-336.

D'Amore, B. (2014). *Il problema di matematica nella pratica didattica*. Modena: Digital Index [Prefazioni di Gérard Vergnaud e Silvia Sbaragli. Versione su carte ed e-book].

D'Amore, B. (2015). Saber, conocer, labor en didáctica de la matemática: una contribución a la teoría de la objetivación. *Isonomia, On-line Journal of Philosophy — Epistemologica, numero, 151-171 [Numero tematico Teaching and Learning Mathematics. Some Past and Current Approaches to Mathematics Education*. Disponibile in http://isonomia.uniurb.it/epistemologica/.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2012). *Matematica, come farla amare. Miti, illusioni, sogni e realtà*. Firenze: Giunti Scuola [versione su carta ed e-book].

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., & Iori M. (2013). *Primi elementi di semiotica*. Bologna: Pitagora. [Traduzione spagnola: 2013, Bogotà: Magisterio].

D'Amore, B., Font, V., & Godino, D. J. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. *Paradigma, 38*(2), 49-77. [Traduzione italiana: D'Amore, B., Font, V., & Godino, D. J. (2008). La dimensione metadidattica dei processi di insegnamento e di apprendimento della matematica. *La matematica e la sua didattica, 22*(2), 207-235].

D'Amore, B., & Godino, D. J. (2006). Punti di vista antropologico ed ontosemiotico in didattica della matematica. *La matematica e la sua didattica, 1*, 9-38.

D'Amore, B., & Godino, D.J. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en Didáctica de la Matemática. *Relime, 10*(2), 191-218.

D'Amore, B., & Matteuzzi, M. (1972). Generalizzazione della "consequentia mirabilis" nelle logiche polivalenti. *Lingua e stile, 7*(2), 343-372.

D'Amore, B., & Radford, L. (2017). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos*. Bogotá: Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

D'Amore, B., Radford, L., & Bagni, G. T. (2007). *Obstáculos epistemológicos y perspectiva socio-cultural de la matemática*. Bogotà: Universidad Nacional de Colombia [Colleción "Cuadernos del Seminario en educación"].

Descartes, R. (1637). *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la verité dans les sciences Plus la Dioptrique, les Meteores, et la Geometrie qui sont des essais de cete (cette) Methode*. Roma: Armando. (Edizione italiana: 1999).

Diels, H., & Kranz, W. (1903-1952). *Die Fragmente der Vorsokratiker*. Berlino: Varias editoriales.

Dozza, L. (2006). *Relazioni cooperative a scuola*. Trento: Erickson.

Dupré, L. (1983). *Marx's social critique of culture.* New Haven: Yale University Press.

Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives*, 5, 37-65.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.* Berne: Peter Lang.

Engels, F. (1956). *Dialettica della Natura*. Roma: Editori Riuniti.

Font, V., Godino, D. J., & D'Amore, B. (2007). An onto-semiotic approach to rappresentations in mathematical education. *For the learning of mathematics, 27*(2), 2-7 e 14.

Hjelmslev, L. (1943). *I fondamenti della teoria del linguaggio*. Torino: Einaudi. [Edizione italiana: 1968; edizione originale :1943, Copenhagen: Akademisk forlag].

Leibniz, G. W. (1704). *Nuovi Saggi sull'intelletto umano*. Roma: Editori Riuniti. [Traduzione italiana: 1982].

Leibniz, G. W. (1714). *Principi della natura e della grazia fondati sulla ragione*. Padova: Liviana. [Traduzione italiana: 1966].

Leibniz, G. W. (1781). *Critica della ragion pura*. Torino: Utet. [Traduzione italiana: 2005].

Locke, J. (1690). *An Essay Concerning Human Understanding*. London. Bari: Laterza. [Traduzione italiana: 1988].

Łukasiewicz, L. (1951). *Aristotle's Syllogistic form the Standpoint of Modern Formal Logic*. Oxford: Clarendon Press.

Łukasiewicz, L. (1970). *Selected Works*. Amsterdam-London: Publishing Company.

Marx, K. (1870). *Introducción a la crítica de la economía política*. México: Ediciones Pasado y Presente. [Traduzione spagnola: 1973].

Pasquinelli, A. (Ed.) (1969). *Il neoempirismo*. Torino: UTET.

Platone (1997). *Tutti gli scritti* (a cura di G. Reale). Milano: Bompiani.

Prediger, S., Bikner-Ahsbahs, A., & Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: first steps towards a conceptual framework. *ZDM Mathematics Education*, 40, 165-178.

Radford, L. (1997). On Psychology, Historical Epistemology and the Teaching of Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics. *For the Learning of Mathematics, 17*(1), 26-33.

Radford, L. (2002). The Seen, the Spoken and the Written: a Semiotic Approach to the problem of Objectification of Mathematical Knowledge. *For the Learning of Mathematics, 22*(2), 14–23.

Radford, L. (2003). Gestures, Speech, and the Sprouting of Signs: A Semiotic-Cultural Approach to Students' Types of Generalization. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(1), 37-70.

Radford, L. (2004). Cose sensibili, essenze, oggetti matematici ed altre ambiguità. *La matematica e la sua didattica, 1*, 4-23.

Radford, L. (2005). La generalizzazione matematica come processo semiotico. *La matematica e la sua didattica, 2*, 191-213.

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. In L. Radford & B. D'Amore (eds.) (2006). *Semiotics, Culture and Mathematical Thinking. Relime*, special issue 2006, 103-129 [Special Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking, in inglese, francese e spagnolo]. Disponibile in http://www.luisradford.ca/pub/56_Relime_semiotics_06PP157313.pdf.

Radford, L. (2011). La evolución de paradigmas y perspectivas en la investigación. El caso de la didáctica de las matemáticas. In: J. Vallès, D. Álvarez, R. Rickenmann (eds.). *L'activitat docente: intervenció, innovació, investigación*, Girona (Spain): Documenta Universitaria, pp. 33-49.

Radford, L. (2008). Connecting theories in mathematics education: challenges and possibilities. *ZDM Mathematics Education*, 40, 317–327.

Radford, L. (2013a). Three Key Concepts of the Theory of Objectification: Knowledge, Knowing, and Learning. *Journal of Research in Mathematics Education, 2*(1), 7-44.

Radford, L. (2013b). De la teoría de la objetivación. Conferencia inaugural del *XIV Congreso Colombiano de Matemática Educativa*, Barranquilla, Colombia, Octubre 9-11.

Santucci, A. (Ed.) (1970). *Il pragmatismo*. Torino: UTET.

Togliatti, P. (1954). Da Hegel al marxismo. *Rinascita*, 11, 254-256, 336-339, 387-393.

Tommaso (1990). *Summa theologiae*. Bologna: ESD (traduzione italiana).

Turco, L. (1974). *Dal sistema al senso comune*. Bologna: Il Mulino.

Vailati, G. (1911). A proposito di un passo del *Teeteto* e d'una dimostrazione d'Euclide. In G. Vailati, *Scritti di Giovanni Vailati*, XCV. Leipzig: J. A. Barth & Firenze: Successori B. Seeber, 516--527.

Williams, B., & Montefiore, A. (1966). *British Analytical Philosophy*. London: Routledge & Kegan Paul.

Whorf, Benjamin Lee (1940). *Science and linguistics*. Bobbs-Merrill.

Whorf, Benjamin Lee (1940). *Linguistics as an Exact Science: New Ways of Thinking, Hence of Talking, about Facts Vastly Alter the World of Science, Emphasizing the Need for Investigation of Language*. MIT Press.

Whorf, B. (1970). *Linguaggio, pensiero e realtà*. Torino: Boringhieri. (Edizione originale: 1956, Cambridge University Press).

Traduzione dallo spagnolo all'italiano di Gemma Carotenuto.

Autore / Bruno D'Amore

DIE, Doctorado Interinstitucional en Educación, Universidad Distrital Francisco J. de Caldas, Bogotá

bruno.damore@unibo.it

Problem solving e argomentazione matematica

Pietro Di Martino
Dipartimento di Matematica – Università di Pisa

Sunto / *Problem solving* e *argomentazione* sono competenze fondamentali che l'educazione matematica dovrebbe contribuire a sviluppare. La promozione di un approccio per problemi e all'argomentazione in matematica è non a caso un obiettivo educativo di molti standard internazionali. A partire da una sperimentazione condotta sulle prove INVALSI del primo ciclo, discuteremo di come l'attenzione al problem solving e ai processi argomentativi in classe non sia solo un'occasione di formazione per gli allievi, ma un importante strumento per gli insegnanti per meglio interpretare eventuali difficoltà dei propri allievi.

Parole chiave: argomentazione; problem solving; didattica della matematica; processi di pensiero.

Abstract / *Problem solving* and *argumentation* are key-competencies in education. The mathematical education at school should give a strong contribution to the development of these competences. The promotion of problem solving and argumentation in mathematics is shared by several international standards. In this contribution, we will describe a project on problem solving and argumentation in primary and middle school, and we will underline that students' argumentation in mathematical context is an important interpretative tool for teachers.

Keywords: argumentation; problem solving; mathematics education; thought processes.

1 L'importanza di problem solving e argomentazione nell'insegnamento della matematica

Con quale obiettivo (o obiettivi) insegnare matematica ad uno specifico livello scolare? La risposta che ogni insegnante si dà dovrebbe guidare le sue scelte didattiche. L'impressione è che l'insegnante – preso da incombenze, impegni e preoccupazioni più a breve termine – trovi raramente il tempo per soffermarsi a riflettere e identificare quelli che considera gli obiettivi di fondo della propria azione didattica in matematica.

Quando, all'inizio dei nostri incontri di formazione, poniamo la domanda a insegnanti dei vari livelli scolari (dalla scuola dell'infanzia alla scuola secondaria superiore) emerge quasi sempre come molti degli obiettivi esplicitati dagli insegnanti siano in comune tra i vari livelli scolari. Insomma sembra realizzarsi, almeno negli ideali, quella verticalità così complicata da costruire nella sostanza.

E quali sono le risposte più frequenti? Emergono sistematicamente: la volontà di appassionare i ragazzi alla disciplina (c'è chi si accontenta di "non farla odiare"); quella di fornire strumenti per affrontare problemi: strumenti sia in termini di conoscenze specifiche, che di processi di pensiero ("insegnare a ragionare"). Oltre alla condivisione di conoscenze specifiche, il focus è su obiettivi affettivi (appassionare) e obiettivi legati allo sviluppo di un tipo di ragionamento, di una forma mentis riconosciuti come specifici della disciplina, e significativi per sviluppare nell'individuo la capacità di affrontare problemi di natura diversa.

Dopo aver condiviso gli obiettivi di fondo che ci poniamo insegnando matematica, la domanda più naturale sarebbe quella relativa alla percezione che l'insegnante ha sul raggiungimento di adeguati standard rispetto a tali obiettivi con i propri allievi (o almeno con una buona percentuale di essi). Solitamente però, negli incontri di formazione a questo punto poniamo una domanda diversa: «ma quanto, poi in aula, chiediamo ai nostri allievi di ragionare, di risolvere problemi che non siano esercizi,[1] 1
di argomentare mettendo in evidenza i propri processi di pensiero durante le lezioni di matematica?». La domanda, che può apparire provocatoria e forse in parte lo è, evidenzia la convinzione che – paradossalmente proprio in matematica – si tenda, nei diversi ordini scolari con l'esclusione probabilmente dell'infanzia (scuola dell'infanzia in cui, contrariamente a quanto qualcuno magari può pensare si fanno diverse attività di natura matematica, seppure gli obiettivi siano declinati in campi di esperienza e non nelle singole discipline), a richiedere quasi esclusivamente la ripetizione di procedure (esercizi, dunque) piuttosto che mettere gli allievi innanzi a situazioni nuove, da affrontare con gli strumenti, matematici e non, costruiti nel tempo (problemi).

Insomma, l'impressione è che, proprio in matematica, si richieda ai nostri allievi essenzialmente l'attivazione di processi riproduttivi (risoluzione di esercizi) piuttosto che quella di processi produttivi (risoluzione di problemi), dando una rilevanza, anche in fase valutativa, enorme ai prodotti (risultati), piuttosto che ai processi e alla capacità di saperli descrivere e sostenere (argomentazione). Tale impressione è supportata dall'analisi dei libri di testo, e dall'evidenza di *problemi* raggruppati per sessione rispetto alle operazioni da usare, e comunque legati al capitolo specifico in cui compaiono; o da problemi con dati superflui o mancanti inseriti nella sezione problemi con dati mancanti, problemi con dati superflui (e quindi non veri problemi, ma esercizi, e per questo abbiamo evidenziato il termine in italico).

Le ragioni che favoriscono questo tipo di scelta didattica nell'insegnamento della matematica sono diverse, e tutte molto interessanti da discutere. In un recente contributo, Maria Pezzia (2015) ne illustra alcune, sottolineando come una delle variabili più influenti sia l'*ansia del tempo* che attanaglia molti insegnanti, ansia che porta, piuttosto coerentemente, a concentrarsi su ciò che viene ritenuto essenziale e a escludere quasi a priori la possibilità di fare altro.

A prescindere dal fatto che si sia o meno *vittime* dell'ansia da tempo, appare significativo riflettere su cosa riteniamo essenziale nell'insegnamento della matematica ai vari livelli scolari, se problem solving e argomentazione rientrino tra gli aspetti che consideriamo irrinunciabili, e confrontarsi poi ovviamente con i riferimenti normativi in tal senso.

1. Se consideriamo la definizione di problema data da Duncker (1945): "un problema sorge quando un essere vivente ha una meta, ma non sa come raggiungerla", la distinzione tra problema ed esercizio è immediata: se l'individuo sa già come deve raggiungere la meta allora è un esercizio, altrimenti è un problema.

In questo senso sia il piano epistemologico che quello normativo sembrano dissipare gli eventuali dubbi. Dal punto di vista epistemologico infatti, molti matematici sottolineano come l'essenza del fare matematica sia il risolvere problemi, e qualcuno aggiunge – sconfinando negli aspetti didattici – che il miglior modo per imparare a risolvere problemi sia affrontare problemi (Halmos, 1975). Dal punto di vista normativo, la lettura attenta delle recenti *Indicazioni Nazionali italiane per la scuola dell'infanzia e il primo ciclo* (MIUR, 2012) evidenzia come lo sviluppo di competenze nell'ambito del problem solving e argomentative sia un traguardo fondamentale di tutta l'educazione matematica dai 3 ai 14 anni: un traguardo dunque da sviluppare in verticale, ma anche trasversale alle diverse discipline e soprattutto riconosciuto come cruciale nella formazione del cittadino adulto[2]. Un aspetto particolarmente interessante, e forse non sempre conosciuto, è il fatto che, essendo argomentazione e problem solving traguardi per lo sviluppo delle competenze, siano prescrittivi e dunque sicuramente essenziali. Un'altra osservazione importante è che ritroviamo l'attenzione al problem solving, e anche all'argomentazione (seppure esplicitata stranamente con meno enfasi), all'interno delle richieste in matematica per il primo biennio della scuola secondaria di secondo grado (MIUR, 2010a, 2010b, 2010c): problem solving e argomentazione costituiscono dunque ufficialmente il *leit motiv* di tutta l'educazione matematica obbligatoria.

Problem solving e argomentazione inoltre sono ovviamente tra loro collegati: per valutare la risoluzione di un problema dobbiamo avere informazioni sia sui processi attivati (quindi è necessaria la spiegazione) sia valutare le giustificazioni delle scelte fatte (quindi la vera e propria argomentazione). D'altra parte richiedere di argomentare ha senso laddove lo studente è chiamato a fare delle scelte, ad assumersi delle responsabilità nell'attivazione dei processi di pensiero, e dunque in merito a processi produttivi: se chiediamo a uno studente di spiegare perché funziona un certo algoritmo che gli abbiamo insegnato (ad esempio la moltiplicazione in colonna), la risposta più naturale è «perché me lo ha detto lei che si fa così».

Per chiudere parliamo del punto di vista che ci sta più a cuore: quello didattico.

Una prima certezza è che i nostri allievi, a tutti i livelli scolari, fanno molta fatica nell'affrontare problemi e nell'argomentare. Negli ultimi anni le rilevazioni nazionali in Italia (INVALSI) ed internazionali (ad esempio OCSE-PISA) forniscono dei dati su questo fenomeno, al di là delle impressioni. Cosa succede ai nostri allievi più bravi quando di fronte ad un problema INVALSI diverso dal solito cadono immancabilmente? La prima reazione è quella di etichettare il problema INVALSI *diverso dal solito* come un trabocchetto o una richiesta troppo difficile; ma questa interpretazione, un po' consolatoria, vacilla nel momento in cui allievi considerati *meno bravi* danno la risposta corretta allo stesso quesito: sarà solo questione di fortuna? Un altro dato significativo e ricorrente che emerge dall'analisi dei risultati degli studenti italiani nelle rilevazioni standardizzate è

2. Per quanto riguarda la Svizzera, l'aspetto di competenza "comunicare e argomentare" è uno dei processi chiave che rientra tra le *Competenze fondamentali per la matematica* del Concordato Harmos (CDPE, 2011) ed è uno dei quattro processi individuati per la matematica nel nuovo *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese* (DECS, 2015). Inoltre, la tematica del problem solving risulta cruciale nelle riforme in atto in Svizzera e in particolare in Canton Ticino, basate sul concetto di competenze. Quindi dal lato istituzionale è forte la spinta in questa direzione.

quello relativo alle difficoltà dei nostri allievi nel rispondere ai quesiti che richiedono di spiegare il perché o di riconoscere la correttezza o meno di argomentazioni. Un discreto clamore fecero in questo senso i risultati dell'indagine OCSE-PISA 2003 relativi alla matematica, in particolare un dato relativo alle domande a risposta aperta: la media delle omissioni degli studenti italiani a questo tipo di domande si attestò al 38%. In pratica mediamente 4 studenti su 10 non provarono nemmeno a rispondere alle domande in cui veniva richiesta un'argomentazione (la media di omissioni calcolata su tutti i Paesi OCSE si attestò al 25%).

Questa difficoltà non stupisce: da una parte evidentemente la maturazione di capacità e competenze relative alla risoluzione di problemi e argomentazione non è certamente semplice; dall'altra, come abbiamo sottolineato in precedenza, raramente in matematica viene richiesto agli allievi di risolvere veri problemi e di argomentare. Le due cose sono evidentemente collegate: proprio la consapevolezza delle difficoltà di certe richieste può portare l'insegnante a evitare di farle, per paura di mettere troppo in difficoltà i propri allievi o per convinzione che non ce la possano fare. Infatti, proprio le difficoltà degli allievi vengono talvolta usate come una sorta di motivazione per non lavorare su problem solving e argomentazione: «hanno veramente enormi difficoltà ad argomentare», «non sanno risolvere problemi», «quando mi danno la risposta corretta, mi accontento di quella e mi guardo bene dal chiedere il perché, rischio di metterli in enormi difficoltà» (qualcuno aggiunge «e poi non posso più dare un bel voto»).

Rispetto a tale posizione, che spesso ascoltiamo durante i nostri incontri di formazione con gli insegnanti, secondo noi è importante condividere con gli insegnanti due riflessioni.

La prima riguarda la condivisione del fatto che è naturale che i nostri studenti abbiano difficoltà nella maturazione di tali competenze, trattandosi di competenze complesse che costituiscono traguardi significativi di un percorso educativo lungo: proprio per questo bisogna dedicarci tempo e attenzione e progettare percorsi in verticale. Senza dimenticare che gli obiettivi relativi alle competenze di problem solving e argomentazione sono, per loro natura, obiettivi trasversali, che coinvolgono, nella loro specificità, molteplici discipline (nelle Indicazioni Nazionali per il primo ciclo ad esempio, obiettivi sull'argomentazione sono, come è prevedibile, compresi anche nell'insegnamento dell'italiano),[3] e il raggiungimento dei quali passa per il lavoro su altre competenze 3
fondamentali, come ad esempio quelle linguistiche.

La seconda è relativa ai *danni* che una scelta didattica improntata su richieste esclusivamente procedurali, e sull'enfasi relativa ai prodotti piuttosto che ai processi comporta. Innanzitutto, l'enfasi sugli aspetti riproduttivi della matematica favorisce la costruzione

3. Nel *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese* (DECS, 2015, disponibile al seguente url: http://www.pianodistudio.ch/ la comunicazione è uno dei sei ambiti delle competenze trasversali: sviluppo personale, collaborazione, comunicazione, pensiero riflessivo e critico, pensiero creativo, strategie di apprendimento. Per ciascuno di questi viene proposta una definizione generale, il suo ambito di significato, l'analisi di alcuni processi chiave che la caratterizzano e una progressione di profili di competenza riferita alla conclusione dei tre cicli della scuola dell'obbligo. L'argomentazione non rientra in modo esplicito nel comunicare, ma viene citata nelle strategie d'apprendimento. Rientra invece in modo esplicito tra i processi della matematica insieme a comunicare e nella parte legata all'italiano, all'arte e alla motricità.

di teorie del successo per cui il bravo in matematica è chi fornisce la risposta corretta in poco tempo. Tali teorie del successo sono da una parte epistemologicamente discutibili, dall'altra molto pericolose: ad esempio creando false illusioni, che spesso si sgretolano, senza preavviso alcuno, in snodi critici come solitamente sono i passaggi scolari (anche quello terziario dalla scuola secondaria di secondo grado all'università). Un'altra conseguenza importante di questo approccio all'insegnamento della matematica è sulla visione della matematica che gli allievi si costruiscono: in particolare, paradossalmente, la matematica viene riconosciuta, dalla maggioranza degli studenti, come la disciplina all'interno della quale è meno richiesto prendere decisioni strategiche (Zan, 2007).

I risultati di una lunga ricerca sul rapporto con la matematica degli studenti italiani, condotta insieme a Rosetta Zan (Di Martino & Zan, 2005; Di Martino & Zan, 2010; Di Martino, 2015) e basata sulla raccolta di circa 1500 temi autobiografici dal titolo: "Io e la matematica", hanno confermato quanto sia radicata tra gli allievi la convinzione che in matematica non si possano esprimere opinioni e come questa convinzione sia spesso uno dei motivi dichiarati per l'avversione verso una disciplina percepita come arida e distante. Luca (nome di fantasia) studente dell'ultimo anno della scuola secondaria di secondo grado scrive:

> «Per risolvere un'equazione, non hai certo bisogno di creatività, non serve la tua interpretazione, oppure dire quello che senti; la matematica è priva di sentimento, basta pensare al famoso detto: "la matematica non è un'opinione". Proprio in quella frase è racchiusa la mia ripugnanza nei confronti di essa, non è come un tema nel quale si può avere interpretazioni diverse, c'è un solo modo di riuscire, un unico metodo».

Alcune scelte dell'insegnante dunque, come quella di non insistere troppo su problem solving e argomentazione per evitare di mettere in difficoltà gli allievi, seppur dettate dalle migliori intenzioni, possono in realtà rivelarsi contro-producenti e dannose. In questo quadro, appaiono particolarmente appropriate le parole di Rosetta Zan a conclusione di un suo lavoro, piuttosto significativamente intitolato *I danni del bravo insegnante*:

> Credo che il 'bravo' insegnante diventi semplicemente... bravo insegnante, quando riesce a pensare su tempi lunghi e non brevi: quando si convince che ha tempo a disposizione, e che in questo tempo vale la pena di investire sforzi e risorse. Gli aspetti affettivi diventano cruciali non per gestire una relazione soddisfacente nell'immediato, ma per sostenere la realizzazione di un progetto educativo a lungo termine, perché questa realizzazione richiede fiducia, coinvolgimento, attenzione. L'interesse per l'allievo non si concretizza stabilendo con lui un generico buon rapporto, evitando il conflitto, evitando – a lui e a noi stessi – emozioni negative, ma accettando il disagio di gestire il conflitto, se necessario, accettando anche la sofferenza di vederlo vivere emozioni negative: in altre parole sostenendo, e non evitando, la sua fatica, confortati dalla convinzione che abbiamo davanti abbastanza tempo per vedere – o comunque per avere – i risultati di questa fatica. In particolare il sostegno da dare agli allievi in difficoltà non si esaurisce in un supporto per 'aiutarli' a dare risposte giuste, ma si allarga alla determinazione di perseguire processi di pensiero significativi, e di costruire pazientemente occasioni di crescita.
>
> (Zan, 2001, p. 140)

La convinzione è che sia fondamentale ribaltare il paradigma riportato da Luca e passare da «la matematica non è un'opinione» a «in matematica le opinioni sono fondamentali ed è altrettanto cruciale imparare a esplicitarle, difenderle, e assumersene la responsabilità».

D'altra parte è bene osservare come il lavoro sul problem solving e quello sull'argomentazione siano intimamente connessi.

Nello schema tradizionale, nel quale l'insegnante, prima di proporre una qualsiasi attività, fa vedere agli studenti *come si fa*, magari anche più volte, la richiesta di argomentare i processi di pensiero è problematica. Di fronte a una matematica che mette di fronte esclusivamente a richieste di tipo riproduttivo si alimenta la convinzione che non sia richiesto, talvolta ammesso, in matematica di fare scelte, che le scelte siano fatte da altri (spesso senza condividere nemmeno i motivi di tali scelte) e che lo studente si debba adeguare. Tra l'altro, quel far vedere *come si fa* viene letto (a torto o a ragione) dagli studenti di qualsiasi età come un *come si deve fare*: i bambini della primaria spesso si chiedono «la maestra vorrà che faccia così?», e ancora all'università c'è sempre qualche studente che durante gli scritti si alza, venendo a chiedere «professore, ma lo posso fare così questo esercizio?», e la nostra risposta è sempre la stessa: «puoi farlo come meglio credi, l'importante è che giustifichi quel che fai». Questo modo di procedere alimenta quello che Brosseau (1986) ha brillantemente caratterizzato come contratto didattico: «In una situazione d'insegnamento, preparata e realizzata da un insegnante, l'allievo ha generalmente come compito di risolvere un problema (matematico) che gli è presentato, ma l'accesso a questo compito si fa attraverso un'interpretazione delle domande poste, delle informazioni fornite, degli obblighi imposti che sono costanti del modo di insegnare del maestro. Queste abitudini (specifiche) del maestro attese dall'allievo ed i comportamenti dell'allievo attesi dal docente costituiscono il contratto didattico».

Proprio per questo intreccio tra problem solving e argomentazione, un aspetto fondamentale (e di criticità) per lavorare su queste due competenze è avere un repertorio di bei problemi da poter usare. I bei problemi si possono costruire, possono venir fuori da situazioni inaspettate e quotidiane (magari da curiosità degli allievi), ma è evidente che avere un repertorio di buoni problemi da poter usare è importante.

In questo senso le prove INVALSI possono essere un catalogo interessante da sfruttare per lavorare su problem solving e argomentazione piuttosto che per migliorare i risultati nelle prove stesse.[4] È estremamente pericoloso avere come obiettivo didattico quello di ottenere risultati migliori in una valutazione (qualsiasi essa sia). Qualsiasi valutazione dovrebbe essere vissuta dall'insegnante come uno strumento che fornisce elementi rispetto al percorso che sta facendo insieme al suo gruppo classe, e non come un obiettivo. 4

4. Tra l'altro esiste ora un database online di tutte le prove INVALSI somministrate, con un motore che permette di fare ricerca per livello scolare, percentuali di risposte corrette, obiettivi, argomenti, parole chiave. Il database, raggiungibile all'url www.gestinv.it è accessibile gratuitamente tramite richiesta di registrazione.

Nel prossimo paragrafo, illustreremo meglio cosa intendiamo per bei problemi e perché consideriamo le prove INVALSI come una possibile risorsa per la pratica didattica; non l'unica in questo senso ovviamente (molto interessanti sono anche i problemi di alcune giochi matematici come il *kangaroo*, il *rally matematico transalpino*, e tanti altri ancora), ma appunto con alcune peculiarità interessanti: il pregio della facilità di accessibilità e il fatto che restituiscano importanti informazioni statistiche sulle eventuali difficoltà degli studenti rispetto ad uno specifico problema). Mostreremo, in tre esempi su livelli scolari diversi, come il lavoro su problem solving e argomentazione possa essere importante anche per l'insegnante, fornendo elementi per meglio interpretare eventuali difficoltà e dunque per intervenire in modo mirato e maggiormente efficace su tali difficoltà.

2 Problem solving e argomentazione: dalla ricerca di bei problemi all'attività in aula

Abbiamo terminato il precedente paragrafo parlando di bei problemi e di INVALSI, ma cosa si intende per bei problemi? Esistono degli indicatori? E in che senso le prove INVALSI possono costituire un repertorio di bei problemi e quindi una risorsa nella pratica didattica dell'insegnante?

Il fatto di essere o meno un bel problema dipende da molte variabili, alcune di queste non *assolute*: ad esempio, un problema deve essere di una complessità adeguata per la classe, dove per adeguata si intende che si ritiene che gli studenti possano dire qualcosa su quel problema, non che sicuramente arrivino a risolverlo. È piuttosto evidente che l'adeguatezza deve essere valutata solo dall'insegnante che conosce il gruppo classe.

D'altra parte si possono dare dei criteri assoluti di qualità per un problema. Proviamo ad elencarne due che ci sembrano particolarmente significativi:

1. *Non si sa a priori quali conoscenze vanno utilizzate per affrontarlo.* Da questo punto di vista i problemi raggruppati per capitolo (ad esempio "problemi con la moltiplicazione") non sono buoni problemi.

2. *È possibile l'esplorazione e le strategie possibili per rispondere sono molteplici.* Da questo punto di vista, sono particolarmente indicati i problemi geometrici (ma come vedremo non solo quelli).

Si suggerisce inoltre una certa variabilità nel complesso dell'attività di problem solving che sviluppiamo: ad esempio usando problemi con dati di varia natura, non sempre e non solo numerici (un esempio di un problema di questo tipo è chiedere la stima di una misura di qualche cosa a partire da una fotografia, un'immagine); e anche mettendo gli allievi di fronte a problemi con più soluzioni, senza soluzioni o con soluzioni necessariamente approssimate.

Venendo alle prove INVALSI, ovviamente ce ne sono di più interessanti e di meno interessanti per tutti i livelli scolari (come vedremo tra l'altro, alcune di seconda primaria sono decisamente interessanti da sperimentare anche alla scuola dell'infanzia), ma qui vogliamo discutere non tanto nel merito dei singoli quesiti, ma delle caratteristiche generali dei quesiti INVALSI e di come possano essere usati nell'attività di problem solving e argomentazione in classe.

Quali aspetti positivi riconosciamo nei quesiti delle prove INVALSI? Innanzitutto, a differenza della maggior parte dei problemi dei libri di testo, sono spesso effettivamente "veri problemi" e non esercizi per gli allievi. Inoltre, tutti i quesiti sono agganciati esplicitamente a uno o più obiettivi e traguardi di competenza delle Indicazioni Nazionali. Infine, come già ricordato, altri due aspetti non irrilevanti sono il fatto che siano un archivio pubblico e facilmente reperibile e che offrano dati statistici sull'esito a livello nazionale, che offrono di per sé spunti di riflessione importanti.

D'altra parte, altri elementi delle prove INVALSI non convincono rispetto a un lavoro in classe su problem solving e argomentazione. Innanzitutto i tempi: per lavorare su un problema in classe, discutere insieme sui vari modi per affrontarlo, c'è bisogno di dedicare tempo al singolo problema. Inoltre il fatto che per lo più sono domande a risposta chiusa: questo comporta da una parte che ci sia poco spazio e poca enfasi per l'argomentazione, dall'altra che i processi di pensiero siano fortemente indirizzati dalla scelta dei distrattori. Infine l'attenzione al prodotto (risposta corretta) molto più che al processo, e comunque la necessità di stabilire a priori cosa è giusto e cosa è sbagliato: aspetto critico e discutibile quando si voglia valutare argomentazioni.

A questo punto non è necessario per i nostri scopi valutare se siano più gli aspetti positivi o quelli problematici nei quesiti delle prove INVALSI; infatti, l'osservazione chiave è che tutti gli aspetti critici che abbiamo evidenziato sono aspetti legati alle modalità d'uso, che l'insegnante, a partire da un quesito che ritiene interessante, può tranquillamente modificare per l'utilizzo in classe. L'insegnante può dedicare il tempo che crede necessario ad un singolo problema, lo può modificare, oppure lasciare inalterato nella sua struttura matematica ma rendendolo a risposta aperta. Lo può anche presentare a risposta chiusa per poi discutere con gli allievi sui processi attivati per arrivare alla risposta.

Gli esempi che vedremo, che intendono coprire tutti gli ordini scolari, sono tratti da una tesi di Laurea triennale in matematica sulle competenze argomentative degli studenti alla fine della scuola dell'obbligo e dai risultati di un progetto di ricerca-azione sulle prove dell'area matematica del primo ciclo, coordinato da Rosetta Zan e realizzato nell'ambito di una convenzione di ricerca tra il Dipartimento di Matematica dell'Università di Pisa e INVALSI. Il progetto ha coinvolto diversi ricercatori in didattica della matematica e circa 40 docenti di scuola primaria e scuola secondaria di primo grado.

2.1 Le difficoltà argomentative alla fine della scuola dell'obbligo

All'interno di una tesi di Laurea (Marcheschi, 2014) abbiamo cercato di analizzare le capacità argomentative degli studenti alla fine della scuola dell'obbligo. Per far questo abbiamo utilizzato domande tratte da prove INVALSI, ma trasformate da domande a risposta chiusa univoca a domande a risposta aperta con richiesta di giustificazione delle risposte. La scelta è stata quella di privilegiare l'ambito Numeri (che, per tradizione didattica, è quello su cui si concentrano le maggiori attenzioni a livello di scuola dell'obbligo) e – visto il focus sulle capacità argomentative – di utilizzare domande di livello 8 (terza secondaria di primo grado). La prova proposta, composta da 9 quesiti, è stata proposta ad un totale di 444 studenti di 23 classi differenti (2 prime e 21 seconde) provenienti da 6 istituti di istruzione secondaria differenti: 49% da un liceo scientifico o delle scienze applicate, 32% da un istituto tecnico o professionale, 19% da altri licei.

Il primo aspetto interessante è emerso dalle interviste agli insegnanti prima della consegna della prova nelle loro classi, che hanno permesso di raccogliere risposte tutte dello stesso tenore: «l'argomentazione potrebbe creare qualche difficoltà», «mi aspetto che rispondano abbastanza bene, tranne la motivazione». Insomma, emerge la consapevolezza del fatto che la giustificazione delle risposte è l'aspetto più delicato, ma anche la conferma che, paradossalmente, invece di essere particolarmente curato, è completamente trascurato: «non sono abituati a risolvere problemi di questo tipo, in cui si chiede il perché!».

Effettivamente l'analisi degli elaborati degli studenti da una parte conferma le previsioni degli insegnanti: molti allievi fanno fatica a giustificare le risposte date, dall'altra evidenzia come dietro a risposte corrette spesso ci siano processi che denotano lo scollamento tra risposta corretta e comprensione.

L'identificazione tra risposta corretta e comprensione è un fenomeno diffuso a livello educativo, che Gardner chiama "il compromesso delle risposte corrette" e descrive con le seguenti parole:

> «insegnanti e studenti (…) non sono disposti ad assumersi i rischi del comprendere e si accontentano dei più sicuri "compromessi delle risposte corrette". In virtù di tali compromessi, insegnanti e studenti considerano che l'educazione abbia avuto successo quando gli studenti sono in grado di fornire le risposte accettate come corrette».
>
> (2002)

Zan (2007) descrive le varie conseguenze negative, a livello di insegnamento e apprendimento della matematica, di tale compromesso.

Vediamo adesso, attraverso l'analisi delle risposte ottenute ad uno dei quesiti utilizzati nella ricerca (**Figura 1**), due aspetti ricorrenti e significativi emersi dallo studio condotto.

Quesito: È vero o falso che un numero pari maggiore di due si può sempre scrivere come somma di due numeri dispari diversi tra loro? Perché?

Figura 1
Quesito vero o falso

Il primo aspetto è che molte difficoltà (e risposte scorrette «Falso») sembrano dipendere da una non totale comprensione del testo. C'è chi mostra un contro-esempio a partire da un numero dispari, nonostante che il testo chieda di verificare una proprietà dei numeri pari («Falso. 3=2+1 e 2 è pari»); c'è chi invece interpreta la proprietà da dimostrare come «in qualsiasi scrittura di un numero pari come somma di due numeri diversi tra loro, i due numeri devono essere dispari» («Falso perché un numero pari maggiore di due si può sempre scrivere anche come somma di due numeri pari diversi tra loro. Esempio: 10=3+7, ma anche 10=6+4»).

Il secondo aspetto è l'uso diffuso dell'elencazione di un numero finito di esempi numerici per giustificare la validità di una proprietà per tutti i numeri: questo approccio è di gran lunga quello più ricorrente per giustificare la risposta: «Vero». Nonostante, come sappiamo, questo approccio sia *matematicamente problematico* (non escludendo eccezioni), è interessante notare come si possano riconoscere negli elaborati degli alunni che lo utilizzano diversi gradi di sofisticazione: c'è chi propone pochi casi senza nessun collegamento, c'è invece chi nella produzione di esempi, praticamente mostra il germe di una regola generativa (ad esempio scrivendo sempre i numeri pari considerati come il numero precedente più 1). Interessante, notare che alcuni protocolli degli allievi relativi alla giustificazione della risposta «Vero», sembrano testimoniare la consapevolezza che in matematica *non sia accettata* come giustificazione quella di aver provato per qualche caso, approccio che probabilmente li ha portati a dare la risposta («Vero, ma non me lo so spiegare», «È vero, ho appena constatato la verità di questa affermazione, ma effettivamente non me la spiego»).

Infine, dai protocolli, emerge anche la *forza affettiva* degli esempi: c'è chi argomenta compiutamente perché la proprietà valga per ogni numero pari maggiore di due, ma poi sente comunque l'esigenza di mostrare degli esempi («Sì perché si potrà sempre scrivere come il precedente, che è dispari, più 1, che è dispari anche lui. Esempi: 4=3+1, 6=5+1, 24=23+1, 64=63+1, 82=81+1, 112=111+1, 256=255+1»).

2.2 L'argomentazione come strumento interpretativo per l'insegnante

All'interno del progetto di ricerca-azione sulle prove INVALSI sviluppato al Dipartimento di Matematica di Pisa abbiamo analizzato il quesito in Figura 2 (quesiti molto simili sono stati usati, negli anni precedenti, anche nelle prove di prima secondaria di primo grado):

Quale dei seguenti numeri è più vicino a 100?

A. 100,010

B. 100,001

C. 99,909

D. 99,990

Figura 2
Quesito D23, prova INVALSI 2013 – livello 5

Il quesito ci ha incuriosito per la bassa percentuale di risposte corrette all'interno del campione nazionale (B, 43,9%), e per il fatto che un distrattore (il D) ha ricevuto più scelte della risposta corretta (44,6%). Lo scopo esplicito della domanda era "Confrontare numeri decimali". Ci siamo chiesti: sono le difficoltà a confrontare numeri decimali i motivi delle difficoltà a rispondere a questa domanda? In caso affermativo, l'eventuale intervento didattico si dovrà concentrare sulla scrittura, le operazioni e il confronto coi numeri decimali.

Abbiamo dunque sperimentato il quesito, nella sua versione originale, nelle quinte di alcuni insegnanti del gruppo di ricerca-azione, facendo seguire alla risoluzione individuale, una discussione di classe incentrata non tanto sulle risposte date, ma su come e perché i bambini avevano scelto la risposta data. È stata condotta quella che in educazione matematica è chiamata *discussione matematica* (Bartolini Bussi, Boni & Ferri, 1995).

Le percentuali ottenute nelle nostre classi sono state simili a quelle del campione nazionale, ma è dalla discussione sul perché delle risposte, dalle argomentazioni, che abbiamo ottenuto la risposta alla nostra domanda: abbiamo cioè raccolto elementi per interpretare le difficoltà degli studenti nell'affrontare il quesito. In particolare è emerso come la risposta D (99,990) non fosse scelta per difficoltà legate ai numeri decimali, ma per un aspetto linguistico, tra l'altro relativo ad un concetto molto rilevante in matematica: la vicinanza. Per molti allievi "vicino a" significa "prima di", "che non ha ancora superato" («il più vicino a cento significa che non sono ancora arrivato a cento», «il 100,010 e 100,001 sono da escludere perché sono oltre il 100 e quindi lo superano e si allontanano»): interessante anche che i bambini facciano riferimento ad esempi del linguaggio quotidiano per supportare la loro interpretazione del termine "vicino" (tipicamente esempi sportivi di traguardo da raggiungere).

Alla luce di ciò, ovvero della connotazione di "vicino" come "precedente", "che viene prima", si chiarifica l'ampia scelta del distrattore D. Questo esempio è piuttosto esemplificativo di come la richiesta dell'argomentazione sia anche uno strumento formidabile per l'insegnante, permettendo di raccogliere elementi per un'interpretazione mirata delle difficoltà, progettare eventuali interventi di recupero o nuove attività di riflessione.

In questo caso, nel quale è emersa una difficoltà di natura linguistica, un'attività significativa è quella di chiedere ai bambini di riformulare il problema alla luce di quanto emerso dalla discussione. Abbiamo proposto la riformulazione in una delle classi, ed il risultato ottenuto è interessantissimo, i bambini propongono la seguente formulazione: «Quali di questi numeri, andando avanti e indietro sulla retta dei numeri, si avvicina di più a 100?».

2.3 Dal problema alle strategie

Sempre all'interno del progetto di ricerca-azione sulle prove INVALSI sono state analizzate le potenzialità del quesito in Figura 3: quesito D1 delle prove 2013 per la seconda primaria (il quesito, con numeri e modalità diverse, può essere proposto ai bambini dell'ultimo anno della scuola dell'infanzia):

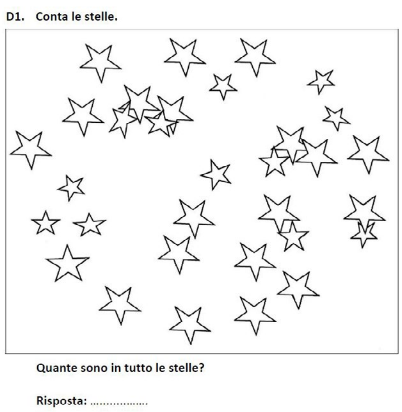


Figura 3
Quesito D1, prova INVALSI 2013 - livello 2

L'interesse per il quesito è nato dall'analisi a priori dello stesso. Le maestre coinvolte nel progetto hanno identificato difficoltà di due tipologie in questa richiesta: la prima legata a difficoltà generali rispetto allo scopo della domanda "Verificare il possesso di strategie di conteggio", e quindi legate all'uso di strategie non efficienti (ad esempio contare senza segnarsi cosa si è contato rischiando di contare due volte la stessa stella, o di saltare nel conteggio una stella), o a difficoltà nella conta dipendenti da una non definita acquisizione della successione dei numeri («1, 2, 2, 3, …» oppure «1, 2, 4, …»). La seconda legata a difficoltà specifiche del particolare insieme di oggetti da contare, che si presenta come un insieme di oggetti sovrapposti, disposti in modo caotico e non spostabili.

Come già scritto, un'adeguata difficoltà è una caratteristica fondamentale di un problema: sia per stimolare l'attivazione di processi di pensiero significativi, sia perché la non sicurezza sulla risposta porta i bambini a interessarsi dei processi che possono svelare quale è la risposta corretta, e quindi può spostare l'attenzione dei bambini dalla risposta in sé ai processi. Ed è proprio quello che avviene con questo problema: le difficoltà, portano a una varietà di risposte diverse al problema all'interno della classe (la risposta corretta è 32). In questo caso è fondamentale la gestione dell'insegnante, che invece di fornire la risposta corretta, usa la disomogeneità delle risposte per spostare l'attenzione sui processi attraverso domande (ad esempio la seguente: «Come facciamo per essere sicuri di aver contato nel modo giusto?»). Nelle sperimentazioni effettuate in classe abbiamo assistito a un completo spostamento dell'attenzione dei bambini dalla risposta numerica alle strategie per contare bene: alla fine delle discussioni, sempre molto partecipate nelle classi in cui le abbiamo condotte, è raro che i bambini chiedano quale sia la risposta corretta alla domanda, questione dalla quale era partita la discussione stessa.

Un altro effetto delle discussione condotte è l'insorgere nei bambini della consapevolezza che il problema del conteggio permette un'ampia varietà di approcci possibili: indicando con il dito; segnando un puntino sulle stelle contate; segnando le stelle e contemporaneamente facendo una stanghetta sul foglio, contando alla fine le stanghette ordinate; raggruppando le stelle, contando le stelle nei singoli gruppi e sommando. Dalle descrizioni dei procedimenti emerge addirittura come all'interno dello stesso approccio, ad esempio quello del raggruppamento, ci possano essere variazioni significative (c'è ad esempio chi raggruppa per cinque, chi per insiemi di stelle vicine, chi con linee verticali, chi con linee orizzontali).

Per i bambini è evidente che il contare oggetti con queste caratteristiche (non spostabili, disposti caoticamente e sovrapposti) può non essere per niente facile. Come nel caso del problema di natura linguistica di cui abbiamo discusso precedentemente, l'insegnante può sfruttare la presunta consapevolezza degli allievi sulle difficoltà del problema del conteggio delle stelle, per rilanciare e ottenere altri elementi di interpretazione interessanti. Proprio in questa ottica in una seconda primaria[5], dopo aver affrontato il problema del conteggio con la relativa discussione sulle strategie, è stato chiesto ai bambini come disegnerebbero le stelle per facilitarne il conteggio (e quindi intervenendo sulla disposizione, e, più in particolare, sulle sovrapposizioni). 5

5. La maestra che ha condotto questo lavoro è Paola Maggi dell'I.C. Gamerra di Pisa.

Tutti i bambini nel loro disegno evitano sovrapposizioni (**Figura 4**), e quasi tutti cercano di creare file di schieramenti di un numero fissato di stelline (tipicamente, ma non sempre, 3 o 10 con 2 di avanzo):

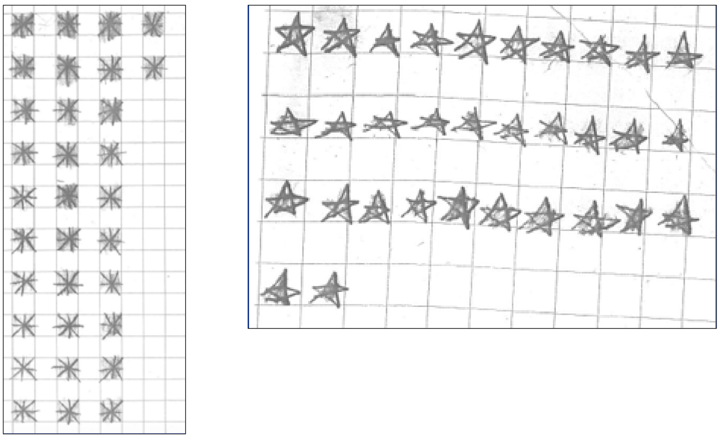


Figura 4
Protocolli con un numero fisso di stelle per riga allineate

Ma alcuni, pur basandosi su schieramenti di un numero fissato di stelline per riga, non evidenziano graficamente la corrispondenza biunivoca tra le stelle in una riga e quelle della riga successiva (**Figura 5**).

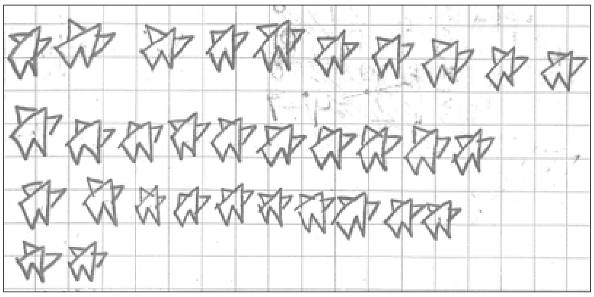


Figura 5
Protocollo con un numero variabile di stelle per riga, ma non allineate

È significativo che siano i bambini stessi, senza aspettare un pronunciamento qualsiasi da parte della maestra, a condividere a posteriori – rispetto al compito di facilitare il conteggio delle stellette – la non efficienza del disegno in **Figura 5**, rispetto ai disegni in **Figura 4**. In particolare, i bambini fanno notare come questa rappresentazione di **Figura 5** permetta di contare le stelle in modo corretto, ma non sfrutti la potenza della rappresentazione per evitare di dover contare il numero di stelline su ogni riga, cosa che si fa facilmente nel caso della disposizione degli elementi come in **Figura 4**.

3 Conclusioni

In questo contributo abbiamo innanzitutto spiegato perché il lavoro sul problem solving e quello sull'argomentazione nel percorso matematico di un bambino siano da una parte indissolubilmente legati e dall'altro cruciali nell'educazione matematica di base. Abbiamo visto inoltre i danni che alcune scelte didattiche possono portare in termini di visione della matematica (con particolare riferimento alle teorie del successo), di visione dell'errore in matematica, di compromesso delle risposte corrette, e di atteggiamento nei confronti della matematica.

Siamo poi passati a mostrare alcune attività di argomentazione avviate nei diversi livelli scolari (anche di natura diversa tra loro), discutendo i risultati ottenuti. Emergono alcuni aspetti importanti, ma innanzitutto le potenzialità per l'insegnante di un tipo di attività di questo tipo. Da una parte è molto facile che l'insegnante si sorprenda delle risposte dei ragazzi e questo sorprendersi spesso evitato con paura è spesso, quando vissuto, motivo di soddisfazione per l'insegnante stesso. Dall'altra, raccogliere e analizzare le argomentazioni prodotte dai ragazzi quando si trovano di fronte a un problema diventa una vera e propria occasione di formazione anche per l'insegnante, attraverso la quale può mettere in crisi alcune sue certezze e ampliare il proprio bagaglio interpretativo, in modo da poter eventualmente intervenire sulle difficoltà in modo mirato.

La scelta di mostrare nel paragrafo precedente tre esempi di diversi livelli scolari è stata finalizzata non solo a fare discussioni e analisi su protocolli concreti, ma anche a mostrare esempi di attività potenzialmente significative, realmente sviluppatesi.

La decisione di lavorare su problem solving e argomentazione è sicuramente impegnativa e, nella sua trasposizione in classe, necessita della realizzazione di alcuni aspetti, primo tra tutti la necessità che l'adulto (l'insegnante) si metta in gioco, prestando realmente attenzione alle spiegazioni dei bambini, sforzandosi dunque di ascoltare gli allievi, e parta dalle parole dei bambini per intervenire sulle difficoltà o rilanciare con nuove domande e questioni.

Bibliografia

Bartolini Bussi, M. G., Boni, M. & Ferri, F. (1995). Interazione sociale e conoscenza a scuola: la discussione matematica. Modena: Centro Documentazione Educativa. Disponibile in http://istruzione.comune.modena.it/memo/Sezione.jsp?idSezione=666&idSezioneRif=659 (consultato il 03.02.2015).

Brosseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7*(2), 33-115.

CDPE (2011). *Competenze fondamentali per la matematica. Standard nazionali di formazione*. Disponibile in http://edudoc.ch/record/96785/files/grundkomp_math_i.pdf (consultato il 15.5.2017)

Di Martino, P. (2015). I fattori affettivi e il loro ruolo nell'apprendimento della matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate. 38 A-B (3)*, 343-362.

Di Martino, P. & Zan, R. (2005). Raccontare il contare: l'incontro-scontro con la matematica nei resoconti degli allievi. In P. Gisfredi (a cura di), *Itinerari tra storie e cambiamento: momenti e processi formativi*, Bologna: Clueb Editrice, pp. 105-124.

Di Martino, P. & Zan, R. (2010). Sviluppare un atteggiamento positivo verso la matematica: dalle buone intenzioni alle buone pratiche. In R. Biagioli e T. Zappaterra (a cura di), *La scuola primaria. Soggetti, contesti, metodologie didattiche*, Pisa: ETS.

Duncker, K., & Lynne, S. L. (1945). On Problem Solving. *Psychological Monographs. 58(5)*, i-113.

Gardner, H. (2002). *Educare al comprendere. Stereotipi infantili e apprendimento scolastico*. Milano: Feltrinelli.

Halmos, P. (1975). *The problem of learning to teach. The American Mathematical Monthly, 82* (5), 466-47.

Marcheschi, A. (2014). *Un'indagine sulle difficoltà argomentative nell'Ambito Numeri degli studenti a livello di primo biennio della scuola superiore*. Tesi di Laurea, Università degli studi di Pisa, Italia.

MIUR (2010a). *Schema di regolamento recante "Indicazioni nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento concernenti le attività e gli insegnamenti compresi nei piani degli studi previsti per i percorsi liceali"*. Disponibile in http://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/licei2010/indicazioni_nuovo_impaginato/_decreto_indicazioni_nazionali.pdf (consultato il 03.02.2015).

MIUR (2010b). *Linee guida per il passaggio al nuovo ordinamento Istituti Professionali*. Disponibile in http://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/nuovi_professionali///linee_guida/_LINEE%20GUIDA%20ISTITUTI%20%20PROFESSIONALI_.pdf (Consultato il 03.02.2015).

MIUR (2010c). *Linee guida per il passaggio al nuovo ordinamento Istituti Tecnici*. Disponibile in http://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/nuovi_tecnici/INDIC/_LINEE_GUIDA_TECNICI_.pdf (consultato il 03.02.2015).

MIUR (2012). *Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione*. Disponibile in http://www.indicazioninazionali.it/documenti_Indicazioni_nazionali/indicazioni_nazionali_infanzia_primo_ciclo.pdf (consultato il 03.02.2015).

Pezzia, M. (2015). Verso la costruzione di competenze argomentative nella scuola del primo ciclo. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate. 38 A-B* (5), 536-546.

Zan, R. (2001). I danni del bravo insegnante. *Atti del Convegno Le difficoltà in matematica: da problema di pochi a risorsa per tutti*, 135-141, Castel San Pietro Terme, Italia.

Zan, R. (2007). *Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire*. Milano: Springer.

Autore / Pietro di Martino
Dipartimento di Matematica – Università di Pisa
pietro.dimartino@unipi.it

Il ruolo della comprensione del testo nel processo di matematizzazione e modellizzazione

Elena Franchini*, Alice Lemmo° e Silvia Sbaragli*
*Dipartimento Formazione e Apprendimento-SUPSI di Locarno
°Università degli Studi di Palermo

Sunto / In questo articolo vengono analizzate le risposte fornite a un interessante item relativo alla *Prova standardizzata di matematica* somministrata nel maggio 2015 a tutti gli allievi di quinta elementare del Canton Ticino. A partire dai risultati statistici emersi da un campione di 508 protocolli selezionati, viene presentata un'analisi qualitativa effettuata su un campione più ristretto di 174 studenti di prima media, allo scopo di rintracciare le cause delle difficoltà emerse nella risoluzione. Da questa analisi si rileva come le risposte sbagliate di diversi studenti siano legate a difficoltà nella comprensione del testo dell'item, in particolare a difficoltà di interpretazione linguistica. Le considerazioni effettuate possono fornire strumenti all'insegnante per la diagnosi di specifiche difficoltà e per suggerire "zone d'intervento".

Parole chiave: comprensione del testo; problemi verbali; matematizzare; modellizzare; difficoltà linguistiche.

Abstract / This article analyzes the answers given to an item related of the *standardized Maths test* administered in May 2015 to all fifth grade primary students in Canton Ticino. Starting from the statistical results emerged from a sample of 508 selected protocols, a qualitative analysis on a shorter sample of 174 students of first year of secondary school has been performed, to trace the causes of the difficulties emerged in the resolution. From this analysis we found that many wrong answers are related to difficulties in understanding the item text, in particular to linguistic interpretation. Considerations made may provide teachers tools for diagnosing specific difficulties and suggesting "intervention areas".

Keyword: reading comprehension; verbal problems; mathematize; modelling; linguistic difficulties.

1 Introduzione

Nel maggio 2015 sono state somministrate in Canton Ticino le *Prove standardizzate di matematica* volte a valutare le competenze degli allievi di quinta elementare nei due ambiti: *Numeri e calcolo* e *Grandezze e misure* e nei tre aspetti di competenza: *Matematizzare e modellizzare*, *Eseguire e applicare* e *Sapere*, *riconoscere e descrivere*. Il progetto ha il duplice obiettivo di fornire delle informazioni di monitoraggio del sistema educativo e di dare a docenti, direttori e ispettori delle indicazioni relative all'andamento delle specifiche classi (Crescentini, 2016).

Successivamente, il Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport ha richiesto al Centro competenze Didattica della matematica del Dipartimento formazione e apprendimento della SUPSI di effettuare un'analisi più puntuale e specifica dei risultati, adottando un'ottica interpretativa propria della didattica della matematica, in grado di mettere in evidenza punti di forza e debolezze nelle prestazioni degli allievi. Si è scelto di analizzare in modo approfondito il processo *Matematizzare e modellizzare*, che rappresenta una componente fondamentale della mobilitazione di competenze in matematica. In questo articolo viene presentata un'analisi puntuale delle risposte fornite dagli allievi di quinta elementare e inizio prima media su un particolare item delle prove standardizzate, dove si evidenziano difficoltà legate prevalentemente alla mancata comprensione linguistica del testo. Nel rapporto di ricerca del progetto (Sbaragli & Franchini, 2017) sono contenuti altri item dove si rintracciano analoghe difficoltà manifestate dagli allievi. Tale tipo di analisi può essere un utile strumento per l'insegnante per la diagnosi di specifiche difficoltà o abilità e per suggerire "zone d'intervento".

2 Quadro teorico

2.1 Il processo Matematizzare e modellizzare

Il processo di matematizzazione si riferisce all'attività di organizzazione e analisi di qualsiasi situazione di realtà attraverso strumenti matematici, cioè alla traduzione, riorganizzazione e (ri)costruzione di un problema all'interno del contesto reale nel mondo simbolico della matematica, e viceversa (Jupri & Drijvers, 2016).

La nozione di matematizzazione trae origine dalla teoria *Realistic Mathematics Education* (RME), sviluppata in Olanda nel 1968 a partire dalle idee di Freudenthal, il quale suggeriva di lavorare con gli allievi a partire da contesti reali e non puramente matematici astratti, considerando la realtà una componente cruciale per l'insegnamento della matematica, sia come fonte che come contesto in cui applicare le idee matematiche (Freudenthal, 1968; 1991; Treffers, 1987; 1991).

Secondo la teoria RME il termine *realtà* ha una connotazione molto ampia: si può riferire alla vita reale, a un mondo fantastico o a situazioni matematiche nella misura in cui esse siano significative e immaginabili dagli allievi, in modo che, ad esempio, gli elementi essenziali della situazione proposta siano stati precedentemente sperimentati e compresi dall'allievo (Freudenthal, 1991; Gravemeijer, 1994; Van den Heuvel-Panhuizen, 2000; Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2013). In generale, dunque, si considera l'ambito naturale, sociale e culturale nel quale l'individuo vive, oltre ad aspetti fantastici. Come ha sostenuto Freudenthal (1983, p. ix, citato in OECD, 2007), «i nostri concetti matematici, le nostre strutture e le nostre idee sono state inventate come strumenti per organizzare i fenomeni del mondo fisico, sociale e mentale».

Da un punto di vista didattico, sviluppare la capacità di applicare la matematica per comprendere e risolvere situazioni-problema reali è considerato attualmente in tutto il mondo uno dei principali obiettivi dell'educazione matematica (Eurydice, 2011; NCTM, 2000; OECD, 2006; 2010; 2013; 2016). Come afferma Wheeler (1982, tradotto dagli autori), «È più utile sapere come matematizzare piuttosto che conoscere tanta matematica».

Lo stesso *Piano di Studio della scuola dell'obbligo ticinese* (DECS, 2015) suggerisce il ricorso a situazioni di apprendimento significative, a partire anche da contesti esterni alla scuola, da esperienze di vita quotidiana che consentano di lavorare sulla capacità di utilizzare concetti, principi e metodi della matematica per comprendere, spiegare, esaminare e rappresentare la realtà, intervenire con consapevolezza su di essa, gestire e utilizzare diverse rappresentazioni e modelli, formalizzare e generalizzare i contenuti proposti e interpretare correttamente le informazioni ottenute.

Queste abilità rientrano nel processo di *Matematizzazione e modellizzazione*, competenza chiave per la formazione del pensiero matematico dell'allievo che, come mostra la ricerca, sarebbe da sviluppare fin dalla scuola elementare (Jones, Langrall, Thornton, & Nisbet, 2002).

Per questo motivo nei quadri di riferimento per la matematica delle principali indagini internazionali PISA (OECD), TIMSS e INVALSI, nazionali (CDPE, 2011) e cantonali (Sbaragli & Franchini, 2014, 2017) si sottolinea come sia necessario valutare gli apprendimenti degli allievi su questo processo, non solo dunque misurare le conoscenze e le abilità in ambito matematico, ma anche la capacità di mettere in relazione questi saperi con dei contesti d'azione che devono essere affrontati.

In OECD (2004) viene delineato all'interno della matematizzazione un particolare ciclo, ripreso e sottolineato anche in OECD (2013; 2016), che possiamo riassumere nei seguenti aspetti:

1. Partire da un problema reale.
2. Strutturare il problema in base a concetti matematici.
3. Isolare progressivamente il problema ritagliandolo dalla realtà attraverso processi quali il fare supposizioni sulle caratteristiche essenziali del problema stesso, il generalizzare e il formalizzare (mettendo così in evidenza gli aspetti matematici della situazione e trasformando il problema reale in un problema matematico che rappresenti fedelmente la situazione).
4. Risolvere il problema matematico.
5. Infine, tradurre la soluzione matematica nei termini della situazione reale.

Nella terminologia proposta da PISA tale ciclo viene descritto attraverso l'identificazione di alcuni processi che sono ritenuti chiave per la gestione del problema: *formulare* il problema, ovvero trasporlo dal linguaggio naturale al linguaggio formalizzato della disciplina, *utilizzare* i propri saperi per dare una risposta al problema che si è identificato, *interpretare* e *valutare* la pertinenza della soluzione ipotizzata in rapporto al contesto di realtà da cui si è partiti.

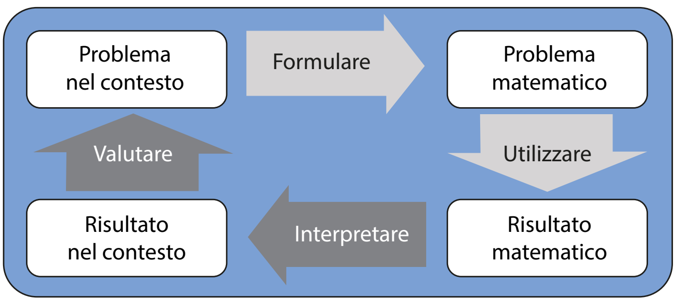


Figura 1
Il ciclo della matematizzazione tratto da PISA (OECD, 2013).

Il ciclo ideale illustrato in **Figura 1** parte da un "problema nel contesto". Chi risolve un problema di questo tipo cerca di individuare gli aspetti matematici rilevanti della situazione, depurandola da tutto ciò che è ininfluente ai fini della risoluzione, trovando dunque una struttura, un modello astratto e ideale della situazione (ad esempio una formula, un'espressione o equazione algebrica, uno schema) basato sulle ipotesi elaborate, sui concetti e sulle relazioni individuate. In questo modo trasforma il "problema nel contesto" in un "problema matematico", cioè gestibile attraverso strumenti, concetti e procedure proprie della matematica.

Un modello può essere definito come un «sistema di strutture concettuali usate per costruire, interpretare e descrivere matematicamente una situazione» (Richardson, 2004, p. viii, tradotto dagli autori). La modellizzazione prevede dunque da parte dell'allievo l'individuazione della struttura matematica all'interno del problema posto (English & Watters, 2004a).

Il primo processo di *formulazione* richiede la capacità di estrapolare le informazioni necessarie per analizzare, impostare e risolvere il problema. Dunque è necessaria a priori una comprensione profonda della situazione e una decodifica delle informazioni trasmesse dal testo (anche quelle sottintese) espresse in varie forme (linguistica, aritmetica, algebrica, grafica ecc.). Questo presuppone la capacità di saper estrapolare informazioni da varie rappresentazioni espresse in diversi registri semiotici (Duval, 1993).

Una volta ottenuto il "problema matematico" si procede poi con l'*utilizzare* strategie risolutive già note o elaborarne di nuove, applicando ad esempio fatti, regole, algoritmi; manipolando numeri, informazioni, dati grafici, espressioni o equazioni, costruzioni geometriche; utilizzando diverse rappresentazioni e passando dall'una all'altra
per arrivare alla soluzione.[1] Questo secondo processo avviene interamente nel mondo 1
della matematica e utilizza il suo linguaggio e i suoi metodi.

La determinazione di una (o più) soluzioni non conclude il ciclo; esso infatti prevede il passaggio attraverso due ulteriori processi, nonostante nella pratica didattica spesso si tenda a sottovalutare questa fase di analisi a posteriori. Il terzo processo del ciclo (*interpretare*) comporta la capacità degli studenti di riflettere su procedimenti, soluzioni o conclusioni matematiche e di interpretarle nel contesto del problema iniziale, richiedendo dunque una comprensione profonda del significato matematico di quanto ottenuto. In questo processo gli allievi sono particolarmente sollecitati a formulare e comunicare spiegazioni e argomentazioni relative al problema di partenza, appartenente ad un contesto di realtà, riflettendo sia sul processo di modellizzazione sia sui
risultati ottenuti.[2] 2

Nel quarto processo (*valutare*) si richiede la capacità di valutare l'accettabilità o meno dei processi risolutivi e delle soluzioni trovate in base alle condizioni reali poste dal problema. Questo comporta una riflessione critica sugli eventuali limiti o punti di forza

1. Nei primi due processi del ciclo si può individuare anche il processo *Esplorare e provare* previsto dal Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese (DECS, 2015).
2. Questo processo del ciclo è particolarmente legato a due di quelli previsti dal Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese (DECS, 2015): *Interpretare e riflettere sui risultati* e *Comunicare e argomentare*.

del modello matematico utilizzato, sul perché è stata ottenuta una o più soluzioni, sul loro senso nel contesto specifico della situazione-problema, oltre a una considerazione più ampia di come il mondo reale influisca sul modello matematico scelto.

In questo ciclo è possibile evidenziare due forme di matematizzazione individuate da Treffers (1987) e in seguito da Freudenthal (1991): una *orizzontale* e una *verticale*. La seguente citazione spiega questa distinzione:

> «Così, attraverso un approccio empirico – osservazione, sperimentazione, ragionamento induttivo – il problema viene trasformato in modo tale che possa essere affrontato da strumenti prettamente matematici. Il tentativo di schematizzare matematicamente il problema è indicato dal termine matematizzazione "orizzontale". (…) Le attività che seguono e che sono legate al processo matematico, alla soluzione del problema, alla generalizzazione della soluzione e all'ulteriore formalizzazione, possono essere descritte come matematizzazione "verticale"»
> (Treffers, 1987, p. 71, tradotto dagli autori)

In tutte le fasi dell'attività matematica entrambe le matematizzazioni si completano a vicenda (De Lange, 1987). Nella definizione iniziale di matematizzazione orizzontale si pone l'accento sul passaggio dal mondo reale al mondo matematico, così come parlando di matematizzazione verticale si definisce il processo solo all'interno del mondo matematico. Tuttavia in Jupri & Drijvers (2016) viene fornita una lettura più ampia che può essere applicata al ciclo della matematizzazione proposta da PISA (OECD, 2013). La matematizzazione orizzontale può essere interpretata come il passaggio e la comunicazione tra i due mondi (reale e matematico), quella verticale invece come l'elaborazione di strategie e procedure all'interno dello stesso mondo (**Figura 2**).

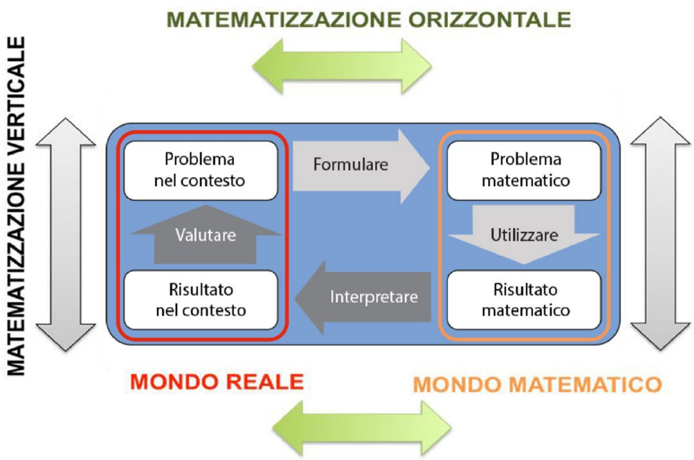


Figura 2
Matematizzazione orizzontale e verticale nel ciclo della matematizzazione.

La matematizzazione orizzontale richiede sia una traduzione in linguaggio matematico della situazione reale attraverso rappresentazioni semiotiche (*formulare*, dal mondo reale al mondo matematico), sia un'analisi e un'interpretazione dei risultati matematici ottenuti nel contesto della situazione reale (*interpretare*, dal mondo matematico al mondo reale).

La matematizzazione verticale richiede sia una riorganizzazione e ricostruzione del problema all'interno della matematica, attraverso la manipolazione di modelli matematici, l'utilizzo di procedure e concetti, riconoscendo schemi ricorrenti e strategie da usare con metodi noti o da esplorare (*utilizzare*, all'interno del mondo matematico), sia la verifica delle condizioni del problema, la generalizzazione delle procedure risolutive e il riconoscimento di una possibile applicazione di tali procedure in problemi simili (*valutare*, all'interno del mondo reale) (Jupri & Drijvers, 2016).

L'esplicitazione di queste fasi della matematizzazione permette di analizzare in modo più mirato e consapevole le competenze degli allievi e di prevedere eventuali azioni di intervento specifiche in caso di difficoltà.

2.2 Alcune difficoltà nel processo di Matematizzazione e modellizzazione

In letteratura sono diversi i lavori che si sono concentrati sull'analisi delle difficoltà degli allievi nel processo di *Matematizzazione e modellizzazione*, focalizzandosi su una delle varie fasi sopra descritte e in livelli scolastici differenti (Jupri, Drijvers & Van den Heuvel-Panhuizen, 2014; Jupri & Drijvers, 2016; Wijaya, Van den Heuvel-Panhuizen, Doorman & Robitzsch, 2014; English & Watters, 2004b; Zan, 2007a; 2016; D'Amore, 2014).

In analogia con quanto sviluppato da Newman (1977) per la risoluzione di problemi verbali (Newman Error Analysis), e ripreso da Clements (1980), possiamo inquadrare e categorizzare tali difficoltà nel seguente modo:

– *Significato delle parole*. In letteratura è ormai noto come molte difficoltà incontrate in ambito matematico derivino da carenze linguistiche legate in particolare al significato delle parole, il cosiddetto dizionario (Ferrari, 2003; Fornara & Sbaragli 2013; Zan, 2016).

– *Comprensione della situazione*. Difficoltà nel capire il significato del problema e rappresentarsi correttamente la situazione descritta nel testo. Secondo alcune ricerche (D'Amore, 1996a, 2014; Zan, 2007a, 2016) le difficoltà degli allievi derivano spesso da problematiche legate alla fase iniziale di comprensione. Gli insegnanti stessi evidenziano il fatto che spesso il bambino legge il testo ma non lo capisce a fondo, oppure non lo coglie in un tutto unico. Come afferma D'Amore:

> «una carente o distorta rappresentazione mentale del problema è una delle più frequenti cause di fallimento ed è dunque qui che occorre intervenire con efficacia e con intelligenza. (…) Il bambino può manifestare difficoltà nella prima fase dei processi di simbolizzazione: dal testo all'immagine mentale evocata nel seguito del testo; [oppure] può immaginare situazioni che provocano conflitti tra l'immagine stessa e le abilità già possedute».
>
> (2014, p.172)

Spesso sembra infatti mancare una effettiva ricostruzione della situazione problematica (Zan, 2011). Secondo l'autrice tale mancanza deriva generalmente da due fenomeni: la difficoltà di comprensione e la rinuncia alla comprensione.

- *Trasformazione del testo in un modello matematico*. Incapacità di tradurre la situazione reale in un problema matematico, difficoltà a stabilire collegamenti tra il linguaggio naturale e quelli specifici della matematica: verbale (dove si usano termini tratti dal linguaggio naturale, spesso con significati disciplinari diversi), grafico, algebrico, simbolico, logico, ecc. Tra le maggiori difficoltà che gli studenti incontrano nella risoluzione di problemi c'è proprio l'incapacità di gestire le diverse rappresentazioni e di passare dall'una all'altra nella fase di modellizzazione (Duval, 1993; D'Amore, 2006). Inoltre, nonostante la ricerca dimostri che anche i bambini di scuola elementare possono impegnarsi in complesse situazioni, con un adeguato sostegno e guida da parte degli insegnanti, tradizionalmente non vengono introdotti alla modellizzazione se non alla scuola media, impedendo loro di compiere i primi passi verso aspetti che coinvolgono questo processo (Diezmann, Watters, & English, 2002; Doerr & English, 2003).

- *Risoluzione matematica*. Difficoltà legate all'apprendimento algoritmico e concettuale (Fandiño Pinilla, 2008) all'interno delle procedure matematiche applicate. In questa categoria rientrano ad esempio errori di calcolo, di applicazione di algoritmi e di formule.

- *Interpretazione dei risultati*. Difficoltà di interpretare la soluzione matematica nel contesto reale e di rileggere criticamente i risultati ottenuti. Gli allievi spesso fraintendono il significato del problema contestualizzato e forniscono soluzioni matematiche che non sono coerenti o rilevanti per la situazione descritta nel compito (Palm, 2008).

Le ricerche di Clements, pubblicate nel 1980, illustrano come il fallimento degli allievi che non sanno risolvere problemi avvenga nei primi tre punti, precedenti all'applicazione delle procedure matematiche. Per questo è di estrema importanza focalizzare l'azione didattica in particolare nei primi passi della risoluzione di un problema.

2.3 Difficoltà linguistiche nella comprensione del testo

Gli item relativi al processo Matematizzare e modellizzare della prova standardizzata somministrata possono essere considerati *problemi verbali*.

Esistono diverse definizioni del termine *problema verbale* di matematica, in particolare scegliamo di fare riferimento a quella fornita da Gerofsky (1996), per cui un problema verbale di matematica è un compito presentato tramite un testo scritto in forma verbale, eventualmente integrato attraverso il simbolismo matematico. Molto spesso i problemi verbali coinvolgono anche aspetti narrativi, poiché descrivono situazioni verosimili con dei personaggi che svolgono determinate azioni; in questo caso vengono spesso chiamati anche *story problems* (Verschaffel, Greer & De Corte, 2000).

I problemi verbali proposti agli allievi sono solitamente eteroposti; ciò significa che il soggetto che li progetta e li somministra (generalmente il docente o lo sperimentatore) non è lo stesso soggetto che li deve risolvere (solitamente lo studente) e spesso anche le finalità delle persone coinvolte non sono le stesse. Ciò avviene in particolare nelle prove standardizzate, dove le intenzioni dei propositori e autori degli item possono essere molto diverse da quelle degli studenti che li devono risolvere. In questo caso gli item sono presentati attraverso una modalità di comunicazione comune: un testo. Con questo termine ci riferiamo a una qualunque produzione linguistica di lunghezza variabile (Ferrari, 2004). Studiare il testo di un compito significa considerare diversi aspetti; in particolare, in questo studio siamo interessati a quelli legati alla dimensione linguistica.

Non è possibile pensare che le scelte linguistiche che si fanno nella fase di formulazione del testo di un problema non abbiano conseguenze sull'interpretazione che il solutore si crea del compito. Come sostengono Bara e Bucciarelli (1992, p. 67): «La manipolazione di modelli mentali è un processo cognitivo di particolare rilievo nella comunicazione: la comprensione di un enunciato linguistico richiede la costruzione di un modello mentale a partire dall'enunciato stesso». Questo processo di interpretazione del testo è quindi cruciale quando si studia il comportamento di un solutore davanti ad un item di matematica, poiché tale comportamento dipende dalla rappresentazione mentale che quest'ultimo si è costruito del testo. Tale rappresentazione mentale è stata descritta in termini di *modello mentale* (Johnson-Laird, 1983) o *modello della situazione* (*situation model*, Kintsch, 1988). In riferimento alla teoria dei modelli mentali di Johnson-Laird (1983), Pancanti sostiene:

> «il processo di interpretazione di un testo avviene mediante il passaggio attraverso tre livelli di rappresentazione: il primo è il livello di rappresentazione grafema (il testo stesso); il secondo è il livello di rappresentazione proposizionale; infine il terzo livello è proprio la rappresentazione mediante un modello mentale. La rappresentazione proposizionale fornisce il significato del testo ottenuto come funzione dei significati delle singole parole e delle loro relazioni sintattiche. Il modello mentale permette di individuarne i referenti, le loro relazioni e quindi un mondo possibile rispetto a quanto descritto nel testo stesso».
>
> (2014, p. 109)

Un'altra prospettiva fornita da Marini & Carlomagno (2004), basata su una rielaborazione del modello descritto da Kintsch e Van Dijk (1978), afferma che la comprensione di un testo si basa su una preliminare astrazione dei significati delle singole parole, in seguito delle frasi (significati organizzati in proporzioni) e la loro successiva integrazione in reti concettuali che crescono in complessità fino a raggiungere il modello della situazione descritta dal testo in questione. «(…) La comprensione di un testo scritto o di un discorso o conversazione orale procede stabilendo delle connessioni tra le strutture linguistiche di base che vengono gradatamente processate e che queste connessioni forniscono a loro volta coerenza alle rappresentazioni mentali che gli ascoltatori/lettori si formano del testo» (Marini & Carlomagno, 2004, p. 9).

Risulta quindi evidente come il primo passo per la risoluzione di un compito sia strettamente legato all'interpretazione del testo allo scopo di farsi un modello della situazione. Come abbiamo già anticipato, le difficoltà in questo passaggio sono note da diversi anni; ad esempio Mayer (1982), De Corte & Verschaffel (1985), Laborde (1995), D'Amore (1996b, 1997a, 2014), Verschaffel et al. (2000), Ferrari (2004), Zan (2007b), Fornara & Sbaragli (2013) hanno mostrato come le difficoltà osservate in relazione al processo di risoluzione dei problemi verbali possono essere causate da un'inadeguata comprensione e interpretazione del testo con cui il compito è presentato, in particolare dall'influenza delle variabili redazionali del testo (lessicali, sintattiche, testuali) sul processo risolutivo di un problema da parte degli studenti. Come afferma D'Amore:

> «Spesso il testo non è espresso nella lingua che il bambino si aspetta o in una lingua sua (…) e quindi il bambino deve "tradurre" semanticamente da una lingua adulta a una lingua propria, capire il senso della richiesta, per farsi un'immagine di quel che la situazione problematica propone. È chiaro che occorre un'educazione linguistica di livello non banale (…)».
>
> (2014, p. 132)

In particolare lo studente deve conoscere il significato delle parole della lingua italiana (specialistiche o comuni) presenti nel testo, il cosiddetto *dizionario*; deve poi avere un'adeguata *enciclopedia*, ossia la conoscenza delle cose del mondo, che è necessario padroneggiare anche per cogliere i numerosi impliciti presenti nel testo (per approfondimenti rimandiamo a Zan, 2007b). Si tratta di una questione delicata poiché, come sostiene Zan:

> «(…) di fronte ad un testo scritto come problema, il fatto che i bambini non conoscano il significato corretto delle parole utilizzate non implica necessariamente che ne siano consapevoli, e che interrompano il processo di interpretazione in assenza di tali informazioni: di fronte a parole per loro sconosciute i bambini a volte riadattano quello che sentono in una costruzione per loro sensata».
>
> (2016, p. 50)

In un precedente lavoro, D'Amore (1997b) mette in evidenza lo stesso aspetto, tramite la richiesta di risolvere un problema nel quale vi era una parola inventata. A questa richiesta i bambini tendono a re-interpretare la parola sconosciuta, dandole connotati semantici attendibili rispetto alla realtà descritta dal testo.

> «È come se scattasse una clausola del contratto didattico secondo la quale non può accadere che l'insegnante inserisca nel testo una parola inesistente. Si tratta di una clausola appartenente al gruppo che amo definire "fiducia nell'insegnante". È piuttosto plausibile, per il bambino, che si tratti di una parola che lui non conosce, ma che certamente significa qualche cosa; il che sembra non impedire affatto la risoluzione.»
>
> (D'Amore, 1997b, p. 250)

Anche in una ricerca effettuata all'interno del progetto *Italmatica* da Fornara e Sbaragli (2013; 2016), si sono messe in evidenza le difficoltà di comprensione del testo da parte dei bambini di scuola elementare, derivanti da aspetti linguistici, e gli erronei atteggiamenti degli allievi assunti per risolvere problemi. La ricerca era volta a indagare le strategie attuate dai bambini per risolvere due problemi scolastici standard, molto semplici dal punto di vista della *struttura matematica* (processi risolutivi possibili, tipo di dati numerici ecc.), ma più complessi per quanto concerne la *struttura narrativa*, su cui si basa il processo di comprensione – o rappresentazione – del problema. In particolare, in tali testi la risoluzione era vincolata alla corretta interpretazione del significato di alcune parole: ossia, a una padronanza del dizionario, al quale si ricollegano le conoscenze enciclopediche. I dati raccolti hanno rilevato l'erroneo atteggiamento degli allievi di tentare di trovare una soluzione anche quando la comprensione del testo era lacunosa (verificata tramite la richiesta di scrivere il significato di alcune parole), dimostrando così che è più forte l'esigenza di fornire al docente un risultato, piuttosto che ammettere di non essere in possesso di tutte le conoscenze linguistico-enciclopediche per soddisfare la richiesta del problema. Infatti, vari allievi erano consapevoli di non conoscere il significato di alcune parole presenti nel testo, dal momento che lo hanno esplicitato (con frasi come "Non so il significato"), ma ciò non li ha spinti a interrompere il processo di risoluzione. Come sostiene Zan (2007b, p. 746), «Naturalmente se chi legge si rende conto di non conoscere il significato di una parola, può chiederlo o cercarlo, o sospendere l'interpretazione del testo. Ma non è detto che questo succeda».

In una successiva sperimentazione effettuata con allievi di scuola elementare (Fornara & Sbaragli, in stampa) si è voluta "rompere" questa abitudine stereotipata di risoluzione dei problemi di matematica, basata sulla convinzione che dopo la somministrazione di un testo di un problema debba seguire immediatamente la sua risoluzione, anche in mancanza di informazioni utili allo scopo. In particolare, si sono voluti sensibilizzare gli allievi sull'importanza di una riflessione sul significato delle parole presenti nel testo e dell'intera situazione, mostrando agli studenti la loro rilevanza per la risoluzione di un problema. Tale sperimentazione ha portato a significative considerazioni da parte degli allievi e a un miglioramento nella risoluzione dei problemi.

Oltre agli aspetti linguistici, tra le diverse difficoltà di comprensione da parte degli allievi, ve ne sono altri legati al senso stesso del problema, ossia riguardanti il tipo di situazione in cui il problema matematico è contestualizzato e il legame fra la situazione descritta e la domanda posta (Zan, 2016).

Secondo Zan (2012), la rappresentazione della situazione descritta nello stimolo spesso viene aggirata dagli studenti a favore di "comportamenti patologici" a lungo evidenziati dalla ricerca in didattica della matematica, come la *lettura selettiva del testo* e cioè la lettura orientata alla ricerca di dati numerici da combinare e di parole chiave che suggeriscano il modo di combinarli, la trascrizione del risultato di un algoritmo a prescindere dal contesto di partenza, che testimoniano «una rinuncia a priori a comprendere, in quanto le strategie utilizzate sembrano prescindere dalla comprensione del testo» (Zan, 2011, p. 18). Come sostiene Zan:

> «L'interpretazione di questo fenomeno è complessa, e mette in gioco diversi fattori che interagiscono (per una sintesi si veda Verschaffel et al., 2000): gli stereotipi dei problemi verbali standard, le norme implicite ed esplicite che regolano l'attività matematica in classe (il cosiddetto contratto didattico), le convinzioni che i bambini costruiscono interpretando l'attività con i problemi».
>
> (2012, p. 437)

Come dimostrato da numerose ricerche nel campo della didattica della matematica, il linguaggio naturale può quindi diventare un "intralcio supplementare" (e inevitabile) nell'interpretazione di un testo di matematica e, se non adeguatamente padroneggiato, rischia di essere uno dei più pervasivi ostacoli alla sua risoluzione.

3 Metodologia

Prima somministrazione. Nel maggio 2015, verso la fine dell'anno scolastico, è stata somministrata una prova standardizzata di matematica a tutti i 3012 allievi di quinta elementare del Cantone Ticino. La prova era costituita da due fascicoli di 45 item ciascuno. Gli allievi avevano a disposizione un'ora di tempo per risolvere gli item di ciascun fascicolo. La finestra di tempo nella quale è avvenuta la prova è stata di due settimane.

Come già anticipato, nella valutazione didattica di tale prova si è scelto di analizzare il processo *Matematizzare e modellizzare*, costituito da 15 item legati all'ambito *Numeri e calcolo* e 15 all'ambito *Grandezze e misure* (Sbaragli & Franchini, 2017). Gli item appartenenti a questa categoria risultano essere di notevole interesse, poiché essi presentano uno stimolo in cui viene descritto un contesto realistico su cui lo studente deve operare, allo scopo di costruire un modello della situazione presentata.

Per effettuare la valutazione didattica puntuale delle risposte degli allievi, abbiamo analizzato i protocolli di un campione di 508 bambini estratto casualmente da tutti i fascicoli, in modo da garantire la validità statistica. Il campione è stato scelto in modo da bilanciare tutti i circondari scolastici del Canton Ticino e da essere equilibrato per genere; in questo modo sono state incluse quasi tutte le scuole.

Questo ha permesso di rilevare oltre alle percentuali di risposte corrette, errate e mancanti, anche le tipologie di errori più ricorrenti e individuare alcune ipotesi interpretative delle motivazioni che possono aver spinto gli allievi a fornire determinate risposte. Per confermare tali ipotesi è stata effettuata successivamente una seconda somministrazione di alcuni item seguita da alcune interviste.

Seconda somministrazione. Per validare le ipotesi formulate dalla prova standardizzata, all'inizio dell'anno scolastico 2016/2017 sono stati somministrati 15 item degli ambiti *Numeri e calcolo* e *Grandezze e misure*, scelti tra quelli precedenti, le cui risposte fornite non presentavano esplicitamente i processi coinvolti nella determinazione della soluzione, e si è proceduto ad effettuare interviste individuali per indagare con più profondità il processo risolutivo.[3] Per fare in modo di raccogliere dati il più possibile confrontabili con quelli raccolti in precedenza, era necessario individuare un campione che fosse il più possibile simile a quello a cui era stata somministrata la prova standardizzata. Trattandosi dell'inizio dell'anno scolastico, non era possibile selezionare una popolazione dello stesso livello scolare del campione, poiché gli argomenti trattati in classe e l'esperienza scolastica sarebbero stati inferiori. Per questo motivo, si è individuato un campione di studenti di prima media, per i quali è possibile ipotizzare un livello paragonabile con quello degli allievi dell'ultimo mese della classe quinta elementare. Sono state coinvolte otto classi di tre scuole medie: Locarno 1, Locarno 2 e Minusio per un totale di 174 studenti.[4]

3

4

3. Si ringraziano Romina Casamassa e Gemma Carotenuto per l'aiuto fornito nell'effettuare le interviste.
4. Si ringraziano per la disponibilità fornita i direttori delle scuole medie di Locarno 1, Locarno 2 e Minusio: Daniele Bianchetti, Carla Stockar e Paolo Iaquinta e gli insegnanti di matematica: Marco Banfi, Rocco Legato, Lara Caverzasio, Daniele Pezzi, Sara Cataldi e Daniele Zezza.

Il fascicolo composto dai 15 item selezionati è stato somministrato durante le ore scolastiche ed è stato fornito un limite di tempo per risolverli proporzionale al tempo dato all'intera prova standardizzata (20 minuti). A partire dall'analisi dei protocolli, sono stati selezionati e intervistati alcuni studenti. In **Tabella 1** presentiamo nel dettaglio le otto classi coinvolte nella somministrazione, specificando il numero di studenti ai quali è stato somministrato il fascicolo e il numero di studenti intervistati.

Scuola	Classe	Numero studenti a cui è stato somministrato il fascicolo	Numero studenti intervistati
Locarno 1	IA	20	9
	IC	19	10
Locarno 2	IA	24	12
	IB	20	8
	IC	21	14
Minusio	IA	22	7
	IB	23	12
	IC	23	13

Tabella 1
Numero di studenti coinvolti nell'indagine.

In questo articolo si è scelto di riportare l'analisi effettuata per il seguente item dell'ambito *Numeri e calcolo*:

Un appartamento aveva 7 locali.

Dal locale più grande sono state ricavate 2 camere.

Quanti locali ha ora l'appartamento?

Risposta: ....

Figura 3
Item somministrato.

Si tratta di un item che verte su un problema contestualizzato, il cui testo descrive un appartamento inizialmente composto da 7 locali a cui è stata apportata una modifica: il locale più grande è stato diviso in due ulteriori camere allo scopo di aggiungere un nuovo locale all'appartamento, portando così il numero di camere dell'appartamento da 7 a 8.

Trattandosi di un item presentato attraverso un testo scritto in forma verbale, è necessaria una decodifica delle informazioni del testo per una comprensione della situazione, anche dal punto di vista linguistico.

Analizzando l'item, il processo di *matematizzazione orizzontale*, cioè la traduzione del problema reale nel problema matematico, è possibile che generi difficoltà negli allievi poiché coinvolge il passaggio e la comunicazione tra i due mondi espressi attraverso registri differenti.

4 Analisi dei risultati

4.1 Analisi dei risultati della prima somministrazione

L'item somministrato risulta particolarmente interessante da essere analizzato. Riportiamo di seguito i risultati rilevati dall'analisi dei 508 protocolli relativi alla prova standardizzata:

N. STUDENTI E PERCENTUALI DEL CAMPIONE (MAGGIO 2015)		
	Numero studenti	Percentuale
Risposte corrette	180	35,4%
Risposte errate	268	52,8%
Risposte mancanti	50	9,8%

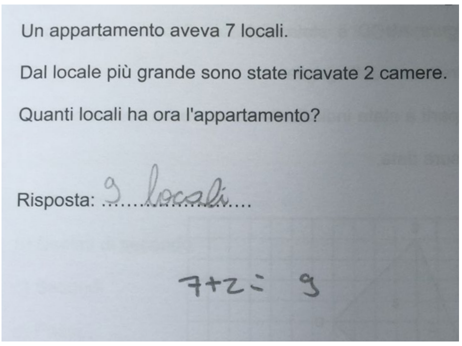
Tabella 2
Percentuale delle risposte del campione.

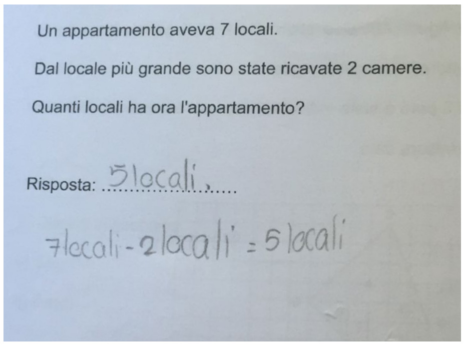
La percentuale di risposte errate di questo item supera il 50% delle risposte fornite. Si tratta dell'unico item tra quelli a risposta aperta che ha collezionato un numero così alto di fallimenti. Inoltre, va rilevato che la percentuale di risposte mancanti è bassa in riferimento al numero di risposte non corrette e paragonata a quelle di altri item dei fascicoli (Sbaragli & Franchini, 2017). Questo potrebbe indicare che il quesito non è stato percepito dagli allievi particolarmente difficile. Si riportano di seguito le risposte errate più frequenti fornite dagli allievi:

Categorie di risposte esatte	Numero studenti del campione (maggio 2015)	Percentuale del campione (maggio 2015)
9, 9 locali o 9 camere	124	24,4%
6, 6 locali o 6 camere	87	17,1%
5, 5 locali o 5 camere	28	6,3%
7, 7 locali o 7 camere	12	2,4%
Altro	17	2,6%
Totale	268	52,8%

Tabella 3
Categorie di risposte errate fornite dagli studenti del campione.

Solo in pochi casi è stato possibile rilevare oltre al risultato, anche il processo risolutivo adottato dall'allievo per fornire la risposta, ossia il procedimento che ha permesso di individuare il valore numerico presentato nella risposta.





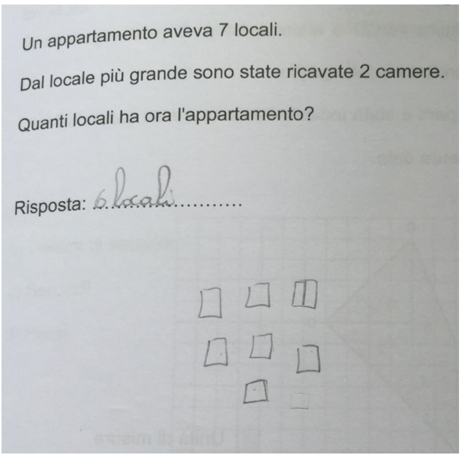


Figura 4, Figura 5, Figura 6
Esempi di risposte errate in cui è stato esplicitato il processo risolutivo adottato.

Come si può osservare in **Figura 4**, lo studente ha fornito la risposta 9 locali. Tale valore è stato individuato attraverso l'operazione 7+2. Questa scelta potrebbe suggerire che lo studente ha interpretato la situazione rappresentata dal testo dell'item come l'aggiunta di due ulteriori locali ai 7 già esistenti. In modo differente, lo studente che ha fornito la risposta presentata in **Figura 5**, potrebbe aver interpretato la situazione come se fossero stati eliminati due locali dall'appartamento, portando a 7-2=5 il numero di locali effettivamente rimasti. Ancora diversa la risposta mostrata in **Figura 6**, dove lo studente si è servito di una rappresentazione iconografica per modellizzare la situazione; tale modello è coerente con il testo presentato ma non lo è la risposta fornita.

Sulla base delle risposte date a questo item, si sono create alcune ipotesi interpretative che potrebbero aver condotto gli studenti alle risposte errate, legate prevalentemente ad aspetti linguistici del testo che condizionano la matematizzazione orizzontale. In particolare, esse sono legate al processo di *formulazione*, che richiede da parte degli allievi la capacità di estrapolare dal testo scritto le informazioni necessarie per analizzare, impostare e risolvere il problema.

Nell'item vi sono infatti alcuni aspetti linguistici che potrebbero avere avuto degli effetti sulle scelte risolutive degli studenti coinvolti nella somministrazione. In particolare, va osservato che, per evitare ripetizioni all'interno del testo, gli autori dell'item hanno scelto di fare uso di due termini, locali e camere, che devono essere interpretati dal solutore come sinonimi. In effetti, nel vocabolario dei sinonimi e contrari della lingua italiana, alla voce *locale* si legge:

> ***Locale*** *s. m. [dal fr. local, uso sost. Dell'agg. local "locale"]. - 1. a. [ambiente o complesso di ambienti di costruzioni edilizie: la casa ha quattro l.] ≈ camera, stanza, vano.* (Treccani, 2003, *voce locale*).

Allo stesso modo, il termine *camera* viene definito:

> ***Càmera*** *s. f. [lat. camĕra, camăra «volta, soffitto a volta di una stanza», dal gr. μάρα]. – 1. a. In senso generico, qualunque ambiente interno di un edificio per abitazione, che non abbia, per particolarità di forma, dimensioni e impianti, una destinazione speciale. Più concretam., ciascuno dei locali che compongono un appartamento: c. da letto, c. da pranzo, c. da soggiorno; un appartamento di tre c. e cucina.* (Treccani, 2003, *voce camera*).

È possibile notare che nella definizione di locale si fa uso del termine camera indicato proprio come sinonimo e viceversa. In realtà, andando a cercare la definizione della parola locale in un dizionario della lingua italiana si può notare come con tale termine si possa fare riferimento ad un ambiente o a un complesso di ambienti più generico rispetto alla parola camera, infatti:

> ***Locale*** *s. m. [dal fr. local, uso sostantivato dell'agg. local «locale1»]. – Ambiente o complesso di ambienti, anche in costruzioni non edilizie (come, per es., nelle navi), che per forma, disposizione, attrezzatura, e sim., è destinato a determinati usi: paese in cui scarseggiano l. scolastici; cercare un l. adatto per una conferenza, per una riunione; il l. è troppo ristretto per essere adibito a sala cinematografica; nelle navi, l. macchine, l. caldaie, ecc. Più genericam., stanza, ambiente, soprattutto di edifici pubblici o per collettività: caserma, collegio con l. ampî, ariosi, ecc.* (Treccani, 2003, *voce locale*).

Si tratta di una distinzione molto sottile che però potrebbe portare a interpretazioni del testo differenti rispetto agli intenti dall'autore dell'item: il locale è un ambiente in cui possono presentarsi più camere. In riferimento a questa interpretazione, la situazione presentata nell'item potrebbe essere intesa da alcuni studenti come una circostanza in cui il numero di camere dell'appartamento varia, in particolare aumenta, ma quello di locali rimane invariato, pari a 7.

Altri studenti potrebbero invece aver interpretato la situazione come la trasformazione di un locale in due camere. In questo modo, il locale più grande non rientra più nel conteggio dei locali e per questo i locali calano a 6 (coerentemente con la risposta presentata in Figura 6).

Un ulteriore termine che potrebbe non appartenere al dizionario degli studenti è il verbo ricavare. Negli intenti dell'autore, tale termine è presentato con il significato di *ottenere*. In effetti, sempre in un vocabolario della lingua italiana, il termine viene definito come:

> ***Ricavare*** *v. tr. [comp. di ri- e cavare]. 2. Cavare fuori, ottenere, trarre o estrarre, di solito attraverso una elaborazione o trasformazione più o meno profonda: r. una scala nella roccia; il gruppo statuario è ricavato da un unico blocco di marmo; acquavite ricavata dalla distillazione delle vinacce; un sottosuolo ricchissimo da cui si ricavano ferro e carbone. (Treccani, 2003, voce ricavare).*

Se tale termine non appartiene al dizionario degli studenti coinvolti nella risoluzione dell'item, è possibile che essi reagiscano non rispondendo alla domanda dell'item oppure che interpretino il significato del verbo in modo personale.

Analizzando i processi risolutivi degli allievi, è possibile che il termine ricavare possa essere stato interpretato come: aggiungere, togliere, unire. Coerentemente con ognuna di queste interpretazioni, lo studente potrebbe aver fornito una risposta all'item differente da quella corretta. Ad esempio, lo studente che interpreta il verbo come sinonimo di *aggiungere*, potrebbe fornire come risposta 9, facendo, 7+2=9 (**Figura 4**); oppure, colui che al termine ricavare associa il significato di *togliere*, potrebbe indicare come risposta 5 camere e dunque svolgere il calcolo: 7-2=5 (**Figura 5**). Infine, lo studente che interpreta l'azione di ricavare come sinonimo di *unire*, potrebbe fornire come risposta 6 poiché due locali sono diventati uno solo e quindi 7-1=6.

Inoltre, nella consegna dell'item si fa implicito riferimento a dei lavori edili attuati in un appartamento, contesto che potrebbe non rientrare nei fatti del mondo legati al vissuto degli allievi. Per dimostrare la veridicità di queste ipotesi e stabilire se tali risposte sono effettivamente collegabili all'interpretazione errata del testo o ad altre fasi del processo di *Matematizzazione e modellizzazione*, è stato necessario raffinare le nostre analisi tramite la seconda somministrazione.

4.2 Analisi dei risultati della seconda somministrazione

L'analisi delle risposte ottenute dalla seconda somministrazione di questo item, effettuata con 174 studenti di prima media nel mese di settembre 2016, mette in evidenza un'uniformità delle risposte rispetto a quelle raccolte nell'indagine cantonale con allievi di quinta elementare nel precedente mese di maggio (**Tabella 4**). Infatti, anche nel secondo caso possiamo notare che la percentuale degli studenti che hanno risposto in maniera corretta rimane intorno al 30%, anche se inferiore rispetto a quella precedente, e la percentuale di risposte errate è intorno al 55%. In questa somministrazione, però, a differenza del caso precedente, avevamo chiesto agli studenti di indicare il motivo di una eventuale mancanza di risposta. Come possiamo vedere dai dati raccolti, circa un 5% degli studenti esplicita di non aver risposto a causa di una mancata comprensione del testo dell'item.

	Percentuali prima somministrazione (maggio 2015)	**Percentuali seconda somministrazione (settembre 2016)**
Risposte corrette	35,4%	29,9%
Risposte errate	52,8%	55,2%
Risposte mancanti senza motivazione	9,8%	9,8%
Risposte mancanti con motivazione legata alla comprensione del testo	-	5,1%

Tabella 4
Percentuali di risposta della seconda somministrazione paragonata con la prima.

Anche le risposte errate fornite dagli studenti in questa somministrazione possono essere identificate attraverso le stesse categorie osservate nell'indagine precedente (Tabella 5).

Categorie di risposta	Percentuali prima somministrazione (maggio 2015)	Percentuali seconda somministrazione (settembre 2016)	Numero studenti della seconda somministrazione	Numero studenti intervistati
5, 5 locali o 5 camere	17,1%	20,7%	36	9
9, 9 locali o 9 camere	24,4%	16,1%	28	8
6, 6 locali o 6 camere	6,3%	9,2%	16	7
7, 7 locali o 7 camere	2,4%	4%	7	3
Altro	2,6%	5,2%	9	5
Totale	52,8%	55,2%	96	35

Tabella 5
Percentuali per le categorie di risposte errate fornite dagli studenti nella seconda somministrazione a confronto con la prima.

Confrontando le percentuali relative alle diverse tipologie di risposte, possiamo osservare che in generale i risultati raccolti dalla seconda somministrazione non si distanziano molto da quelli raccolti nella prima. Inoltre, grazie alle interviste siamo risusciti a confermare o meno le ipotesi interpretative presentate nel paragrafo 4.1. In particolare, di seguito discuteremo ogni singola categoria di risposta fornendo un'interpretazione a posteriori sulla base delle interviste effettuate.

Studenti che rispondono 5

Gli studenti intervistati che hanno risposto 5 motivano le proprie scelte in vari modi che possono essere distinti nelle due seguenti categorie:

- alcuni esplicitano di attribuire al termine *ricavare* il significato di *demolire/togliere*;
- altri manifestano varie difficoltà di comprensione del testo dell'item, dichiarando di non riuscire a interpretare la situazione, senza esplicitare per il termine *ricavare* un significato alternativo.

Si rilevano quindi difficoltà nella matematizzazione orizzontale, ossia nel passaggio dalla situazione reale al modello matematico che la interpreta. In alcuni casi, la scelta dell'operazione matematica da applicare sembra totalmente sganciata dalla situazione descritta, ossia dall'azione svolta sulle camere dell'appartamento. Alcuni allievi effettuano una *lettura selettiva del testo* individuando i dati del testo e scegliendo l'operazione da effettuare, senza ricercare un collegamento tra i due mondi (reale e matematico) (Zan, 2011; D'Amore, 2014).

Di seguito sono presentate le trascrizioni di alcune parti delle interviste svolte in modo da chiarire le tipologie di motivazioni sopra descritte (Tabella 6), con I. viene indicato l'intervistatore.

Trascrizione dell'intervista	Interpretazione
I.: "Cosa si fa in questo appartamento?" L.: "Si ricavano altre due camere." I.: "Praticamente cosa si fa?" L.: (dopo qualche secondo di silenzio) "Non lo so." I.: "È il testo che non è chiaro?" L.: "Sì." I.: "Tu riesci ad immaginarti cosa devono fare degli operai che entrano in questo appartamento?" L.: "Devono demolire."	Allo studente L. viene chiesto di descrivere la situazione; inizialmente egli ripete la frase presentata dal testo. Dopo una richiesta più esplicita da parte dell'intervistatrice, egli dichiara di non aver capito. A seguito di una seconda richiesta di chiarimento, lo studente palesa la sua interpretazione del termine ricavare come *demolire*. In questo caso lo studente appartiene alla prima tipologia di motivazione fornita.
I.: "Ti ricordi la domanda dei locali? Mi fai vedere come hai fatto per rispondere?" M.: "Ho fatto 7-2." I.: "Hai fatto 7-2, ma cosa ti chiede questa domanda? Riesci a raccontarmela?" M.: "Mmm, dal locale più grande sono stati ricavati, sono stati tolti, mi sa, due camere." I.: "Quindi ricavati per te significa tolti?" M.: "Sì."	A seguito della domanda dell'intervistatrice, lo studente M. esplicita l'operazione effettuata per determinare la risposta fornita. Successivamente l'intervistatrice chiede allo studente di esplicitare la sua interpretazione della situazione, ed egli dichiara di aver interpretato il significato del verbo *ricavare* come sinonimo di *togliere*. Anche in questo caso lo studente rientra nella prima categoria di motivazioni per spiegare la scelta dell'operazione risolutiva adottata: 7-2=5.
I.: "Come ti sembrava questo qua?" (indica l'item). R.: "Non l'avevo capita bene. Allora sono 7 locali, dal locale più grande sono state ricavate due camere." I.: "Che vuol dire?" R.: "Vuol dire che un locale ha due camere gli altri 1." I.: "Quindi da un locale si ricavano due camere, cosa vuol dire?" R.: "Eh, non lo so bene, dal locale più grande sono state ricavate due camere quindi si può andare a dormire in 2 e nelle altre in 1." I.: "Ma letti o camere?" R.: "Ah, ma camere nel senso stanze?" I.: "Sì." R.: "Ah, adesso capisco! Il locale lo dividono in stanze." I.: "Lo dividono in quante stanze?". R.: "Due, tipo fanno una parete in mezzo."	Lo studente R. esplicita la mancata comprensione del testo, legata principalmente all'interpretazione della situazione reale. In questo caso lo studente non attribuisce al termine *ricavare* un significato alternativo, rientrando nella seconda categoria.

Tabella 6
Parte della trascrizione dell'intervista a studenti che hanno risposto 5.

Studenti che rispondono 9

Molti degli studenti che rispondono 9 locali, esplicitano l'operazione effettuata: 7+2=9. Anche in questo caso, dalle interviste emergono due motivazioni differenti:

- coloro che attribuiscono al termine ricavare il significato di *aggiungere*;
- coloro che manifestano una difficoltà nella creazione di un modello matematico che permette di strutturare la realtà.

Come nel caso precedente emerge una difficoltà linguistica legata al significato del termine *ricavare*, interpretato in modo differente al caso precedente, e una legata alla modellizzazione della situazione. In quest'ultimo caso gli studenti mostrano di aver compreso il tipo di intervento edilizio fatto sull'appartamento, ma rispondono velocemente cercando un'operazione adatta a modellizzare tale intervento in riferimento ai dati numerici presentati, senza interpretare nella realtà se una camera era già conteggiata.

Nella **Tabella 7** sono presentati due casi esemplificativi delle due motivazioni riscontrate negli studenti intervistati.

Trascrizione dell'intervista	Interpretazione
I.: "Mi fai vedere come hai fatto a rispondere?" L.: "Ricavate? Eh, non mi ricordavo bene cosa significa ricavate." I.: "Secondo te cosa significa? Proviamo a rileggere." L. legge ad alta voce. I.: "Allora, tu hai risposto 9, mi spieghi come hai fatto a dire 9?" L.: "Forse ho fatto una cavolata ma ho pensato, aggiungendo due camere. Quindi si aggiungeva nell'appartamento." I.: "Quindi tu hai fatto?" L.: "Più 2!"	In questo caso lo studente L. si identifica nella prima categoria, in effetti, egli esplicita di non ricordare il significato del termine *ricavare*. Dopo una rilettura suggerita dall'intervistatrice, lo studente spiega che ha scelto di svolgere l'operazione 9+2 perché aveva interpretato il significato del verbo ricavare come *aggiungere*.
R.: "Il locale lo dividono in stanze." I.: "Lo dividono in quante stanze?" R.: "Due, tipo fanno una parete in mezzo." R.: "Prima ne aveva 7 e adesso ne ha 9!" I.: "Ne ha 9?" R.: "Perché se ne ha 7 e ne aggiungi 2." I.: "Quindi crei due stanze." R.: "No, parti da qualcosa che già avevi." I.: "Prima cosa avevi?" R.: "Una stanza." I.: "E adesso?" R.: "2." I.: "Quindi quante stanze avevi?" R.: "Ah, 8!"	In questo caso lo studente R. esplicita una corretta interpretazione del testo; nonostante ciò modellizza la situazione come se fossero state aggiunte due camere e non una. In questo caso lo studente può essere descritto attraverso la seconda categoria. Solo dopo che l'intervistatore indirizza il ragionamento, lo studente risponde correttamente alla domanda aggiungendo una sola camera alle 7 già esistenti.

Tabella 7
Parte della trascrizione dell'intervista a studenti che hanno risposto 9.

Studenti che rispondono 6

Nel caso degli studenti che rispondono 6, si evidenziano due diverse difficoltà legate entrambe alla conoscenza del dizionario:

- coloro che interpretano il termine *ricavare* come *unire*, e dunque due dei 7 locali diventano uno unico e per questo il numero totale dei locali cala a 6;
- coloro che non riconoscono lo stesso significato ai termini *camere* e *locali*, interpretando lo stimolo come se uno dei 7 locali venisse trasformato in due camere. In questo modo, dopo la modifica all'appartamento rimangono 6 locali e 2 camere.

In **Tabella 8** sono presentate due interviste esemplificative di tali convinzioni.

Trascrizione dell'intervista	Interpretazione
I.: "Guardiamo questo qui; tu dici ne ha 6, come hai fatto a trovare questa risposta?" C.: "Allora, un appartamento ha 7 locali nel senso…" I.: "Cosa significa locali secondo te?" C.: "Come dire camere." I.: "Ah, ok, quindi sono la stessa cosa?" C.: "Sì, e poi, ehm, dal locale più grande sono state ricavate due camere quindi da sette locali ho unito due camere." I.: "Quindi ricavare cosa significa?" C.: "Unire, due diventano una!"	In questo caso lo studente C. ha interpretato correttamente il significato delle parole *camere* e locali ma non ha compreso il significato del verbo *ricavare*. Come si può intuire dalla trascrizione, infatti, per lo studente sono state *unite* due camere e dunque due delle 7 sono diventate una unica. In questo caso lo studente appartiene alla prima categoria di motivazione descritta in precedenza.

I.: "Come hai fatto a rispondere a questa domanda?" A.: "Qui diceva 7 locali e ho pensato visto che ne han tolto uno anche se era grande l'hanno tolto." I.: "Ah, che l'hanno tolto, dov'è che dice questa cosa?" A.: "Lo dice nella seconda, dal locale e non dai locali, sono state ricavate due camere." I: "Cosa vuol dire sono state ricavate due camere?" A: "Che un locale è stato diviso per fare due camere; quindi ne hanno tolto uno che sono diventate due camere e quindi rimangono 6 locali."	Nella prima parte dell'intervista potrebbe sembrare che lo studente abbia avuto delle difficoltà nell'interpretazione del termine *ricavare*. In realtà, attraverso le domande dell'intervistatrice si può notare che lo studente ha compreso il significato del termine ricavare, ma non ha colto che la scelta di utilizzare la parola *camere* è stata fatta solo per evitare la ripetizione della parola *locali*. In questo caso, infatti, lo studente esplicita di aver compreso che un locale è stato trasformato in due camere ma al momento del conteggio dei locali non ha conteggiato le due nuove camere, ma solo i locali rimasti che non hanno subito modifiche.

Tabella 8
Parte della trascrizione dell'intervista a studenti che hanno risposto 6.

Studenti che rispondono 7

Dalle interviste emerge che tutti gli studenti che rispondono 7 non considerano come sinonimi i termini *camere* e *locali*. In questo caso quindi si riscontra un'unica difficoltà di interpretazione linguistica di ciò che l'item voleva veicolare, mentre viene considerato che il numero di locali rimane invariato e il numero di camere cambia. Si riportano in Tabella 9 alcuni esempi.

Trascrizione dell'intervista	Interpretazione
I.: "Questo te lo ricordi?" F.: "Sì, l'ho fatto a mente." I.: "Ok, ora fammi vedere come hai fatto a trovare quella risposta lì." F.: (Legge ad alta voce il testo) "Eh, ne ha comunque sette". I.: "Fammi vedere come hai fatto, puoi scrivere, dirlo a parole." F.: "Dal locale più grande sono state ricavate due camere, ma le camere vanno come per l'appartamento?" I.: "Quindi? C'è una questione di locali, camere e appartamenti". F.: "Io ho scritto 7 perché non capivo se i locali e le camere erano uguali. Cioè è come se il locale grande è stato diviso in due?" I.: "Sì, giusto!" F.: "Ah! io pensavo soltanto che fossero state ricavate due camere assieme". I.: "Secondo te con locali e camere si intende la stessa cosa o no?" F.: "Queste due dipende se si intende come camera da letto o locale o camera in senso grande da cui si ricava un locale cioè si mette la camera, la cucina e il bagno." I.: "Quindi locale e camera è la stessa cosa o no secondo te?" F.: "Forse qui è la stessa cosa ma pensavo di no".	In questa discussione lo studente F. esplicita chiaramente la sua difficoltà nell'interpretazione dei termini camere e locali, da considerare come sinonimi. La sua interpretazione del termine locale è più ampia, come del resto viene contemplata anche dal dizionario della lingua italiana. Solo alla conclusione del confronto con l'intervistatrice dichiara che nell'item forse i due termini sono stati utilizzati come sinonimi.

I.: "Come mai qua hai risposto 7 locali?" A.: "Perché se ci sono 7 locali e dal più grande ne ricavo 2, rimane sempre lo stesso". I.: "Ma che cos'è un locale?" A.: "Una stanza." I.: "E la camera?" A.: "È anche un locale." I.: "Quindi camere e locali sono la stessa cosa?" A.: "No, il locale è un appartamento."	Lo studente A. mostra che, indipendentemente dall'operazione fatta sulle camere, il numero di locali rimane invariato. Lo studente esplicita un po' di confusione nell'interpretazione del termine locale, di conseguenza una mancata comprensione dell'equivalenza di significato dei termini camere e locali nel testo del problema.

Tabella 9
Parte della trascrizione di interviste a studenti che hanno risposto 7.

Studenti che rispondono con altri valori

Tra le risposte ottenute differenti da quelle ipotizzate prima della somministrazione, va segnalata: 14 locali, fornita da 5 studenti su 9.

Come si può leggere dalle trascrizioni presentate di seguito (**Tabella 10**), gli studenti hanno interpretato la situazione come se da ogni locale fossero state ricavate 2 camere. Questo aspetto mostra che gli studenti non hanno prestato attenzione al fatto che si parlasse solo del locale più grande e dunque hanno interpretato il testo come se fosse: "un appartamento ha 7 locali; da ogni locale sono state ricavate due camere." Ciò mette in evidenza come spesso gli allievi leggono in modo superficiale il testo di un problema, senza dare importanza alle diverse parole, ma deducendo frettolosamente ciò che secondo loro il testo vuole veicolare.

Trascrizione dell'intervista	Interpretazione
I.: "Spiegami questo qua dell'appartamento," R.: "Ho calcolato che ci sono due camere e ogni camera ha 7 locali allora ho fatto 7+7 che fa 14."	Alla richiesta di spiegazioni la risoluzione, lo studente R. esplicita senza esitazioni la sua interpretazione: da ogni locale sono state ricavate due camere.
I.: "Raccontami qual è la situazione, cosa ti chiedevano." S.: "Che un appartamento ha 7 locali" I.: "Cosa significa?" S.: "Che ha 7 cam…ere." I.: "Che ha 7 camere e poi?" S.: "Dal locale più grande sono state ricavate due camere." I.: "E questo cosa significa?" S.: (silenzio) "Che nel locale più grande hanno aggiunto due camere." I.: "Come mai hai risposto 14?" S.: "7×2." I.: "Come mai hai fatto 7×2?" S.: "Perché prima aveva 7 locali e poi dice che ne aveva ricavate altre due". I.: "Da tutti i locali?" S.: "Sì".	In questo secondo esempio, invece, lo studente S. mostra una certa titubanza. In questo caso, egli ha chiaramente compreso che *locali* e *camere* sono termini che devono essere intesi come sinonimi, ma non ha prestato attenzione al fatto che sono state ricavate due camere solo da uno dei 7 locali e non da tutti.

Tabella 10
Parte della trascrizione dell'intervista a studenti che hanno risposto 14.

Anche questo atteggiamento è legato al frequente fenomeno di *lettura selettiva del testo*; infatti gli studenti hanno letto frettolosamente il testo soffermandosi solo sulle informazioni presentate attraverso i dati numerici:

– l'appartamento ha 7 locali;
– un locale è stato trasformato in 2 camere;
considerando superficialmente le altre informazioni che sono state proposte attraverso il linguaggio verbale e non numerico: "dal locale più grande".

Le risposte degli altri 4 studenti sono state: 8,5, 12 e in due casi 3,5. La motivazione di quest'ultima risposta verte sul fatto che un locale è stato diviso in due, quindi è stato diviso il numero 7 per due, ottenendo 3,5.

5 Conclusioni

Dai risultati ottenuti dalla somministrazione di questo item, si rileva come spesso le difficoltà di risoluzione di un problema siano legate al primo processo del ciclo della matematizzazione, ossia alla *formulazione*, che richiede un'interpretazione e una comprensione profonda della situazione e delle informazioni necessarie per risolvere il problema, individuando gli aspetti matematici rilevanti al fine di trovare un modello che interpreti la situazione. Le evidenze si rivelano quindi in linea con le considerazioni di Clements (1980). Infatti, il fallimento nella risoluzione dell'item proposto nell'articolo si è verificato nelle prime tre fasi del processo risolutivo, e deriva da difficoltà legate al significato delle parole, alla comprensione della situazione e alla trasformazione del testo in un modello matematico. In questo lavoro risulta interessante osservare come un aspetto già evidenziato dalla letteratura fin dagli anni ottanta, possa essere amplificato grazie alle prove standardizzate, che consentono di capire come molti comportamenti degli allievi non siano casuali o legati alle risposte del singolo, ma nascondano, invece, ostacoli di diversa natura, profondi e diffusi. Tali evidenze consentono al docente di mettere a fuoco aspetti dell'insegnamento/apprendimento che possono essere migliorati o che suggeriscono interventi mirati sugli apprendimenti degli allievi.

In questa prospettiva, gli item presentati nelle prove standardizzate relative all'aspetto di competenza *Matematizzare e modellizzare* (Sbaragli & Franchini, 2017) possono essere un punto di riferimento per i docenti per identificare eventuali difficoltà degli allievi nelle diverse fasi del processo risolutivo e per lo sviluppo di significativi percorsi didattici.

In particolare, dalle risposte fornite a questo item è emerso come la maggior parte delle difficoltà degli allievi fossero legate ad aspetti linguistici di conoscenza del dizionario, o più in generale dell'enciclopedia, ossia dei fatti del mondo che riguardano la situazione. Il testo, che poteva apparire a priori comprensibile dagli allievi di questa età, è risultato in realtà molto complesso, anche per gli impliciti linguistici in esso sottesi. Come afferma D'Amore (2014, p. 185): «Leggere il testo del problema, prima di risolverlo, sembra essere una ovvia condizione preliminare. Ma non è così facile. Abbiamo più volte visto (…) come ci siano ostacoli alla lettura e alla comprensione, come ci si formino subito immagini mentali che possono distogliere, come vi siano termini imbarazzanti, operazioni indotte semanticamente eccetera».

Inoltre, è emerso in diverse occasioni una lettura selettiva del testo da parte degli studenti, ossia una lettura orientata alla ricerca di strategie risolutive "alternative" alla comprensione. Riguardo a questo fenomeno, Sowder (1989) elenca una varietà di approcci, già menzionati in questo testo, che vengono spesso praticati dagli allievi nella risoluzione dei problemi: cercare di indovinare l'operazione; guardare i numeri, e da quelli risalire all'operazione "giusta"; provare tutte le operazioni e scegliere quella che dà la risposta più "ragionevole"; cercare "parole chiave" (*in tutto* vuol dire che bisogna sommare, *spende* invece è legata a sottrarre, ecc.) e altri ancora.

Risulta quindi molto importante dal punto di vista didattico combinare due discipline avvertite tradizionalmente molto distanti l'una dall'altra, l'italiano e la matematica, con il fine di sviluppare contemporaneamente competenze matematiche e linguistiche, e favorire negli allievi un produttivo atteggiamento di fronte alla risoluzione di problemi, che verte sull'esigenza di comprendere e interpretare la situazione data (Demartini, Fornara & Sbaragli, 2017; Demartini & Sbaragli, 2015a,b; Fornara & Sbaragli, 2013; 2016). L'analisi dei testi dei problemi verbali di matematica effettuata in classe con gli allievi, basata sull'approfondimento degli aspetti lessicali presenti e sull'interpretazione delle situazioni descritte in relazione anche al vissuto degli allievi, e un'attenzione particolare alla modellizzazione della situazione, sono elementi fondamentali sui quali, far leva con i propri allievi, allo scopo di sviluppare e rafforzare strategie risolutive cognitive e metacognitive, significative ed efficaci.

Bibliografia

Bara, B. & Bucciarelli, M. (1992). L'intenzionalità comunicativa nei modelli mentali. *Methodologia*, *10*, 67-82.

CDPE (2011). *Competenze fondamentali per la matematica*. Disponibile in http://edudoc.ch/record/96785/files/grundkomp_math_i.pdf (consultato il 24.04.2017).

Clements, M. A. (1980). Analysing children's errors on written mathematical tasks. *Educational Studies in Mathematics*, *11*(1), 1-21.

Crescentini, A. (2016). *Prove standardizzate ticinesi. Matematica nella classe V Scuola Elementare*. Locarno: SUPSI, Dipartimento formazione e apprendimento, Centro innovazione e ricerca sui sistemi educativi.

D'Amore, B. (1996a). Difficoltà nella lettura e nella interpretazione del testo di un problema. *Bollettino degli insegnanti di matematica del Canton Ticino, 32*, 57-64.

D'Amore, B. (1996b). Immagini mentali, lingua comune e comportamenti attesi, nella risoluzione dei problemi. *La matematica e la sua didattica, 4*, 424-439.

D'Amore, B. (1997a). Lingua naturale, modelli intuitivi e stereotipi nelle ore di matematica. *Riforma e didattica, 1*, 29-36.

D'Amore, B. (1997b). Matite - Orettole - Przxetqzyw. Le immagini mentali dei testi delle situazioni-problema influenzano davvero la risoluzione? *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 20A*(3), 241-256.

D'Amore, B. (2006). Oggetti matematici e senso. Le trasformazioni semiotiche cambiano il senso degli oggetti matematici. *La matematica e la sua didattica, 4*, 557-583.

D'Amore, B. (2014). *Il problema di matematica nella pratica didattica*. Modena: Digital Docet.

De Corte, E., & Verschaffel, L. (1985). Beginning first graders' initial representation of arithmetic word problems. *The Journal of Mathematical Behavior*, *4*, 3-21.

DECS (2015). *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese*. Disponibile in http://www.pianodistudio.ch/ (consultato il 17.04.2017).

De Lange, J. (1987). *Mathematics insight and meaning*. Utrecht: OW & OC [Dissertation].

Demartini, S., Fornara, S., & Sbaragli, S. (2017). *Italmatica. Percorsi di italiano e matematica per la scuola dell'infanzia*. Firenze: Giunti scuola.

Demartini, S., & Sbaragli, S. (2015a). Geometria e narrazione alla scuola dell'infanzia: un "binomio fantastico". In B. D'Amore & S. Sbaragli (ed.), *La didattica della matematica, disciplina per l'apprendimento*, Bologna: Pitagora, 67-72.

Demartini, S., & Sbaragli, S. (2015b). *Storie di figure. Scuola dell'infanzia. 16*(4), 17-18.

Diezmann, C., English, L. D., & Watters, J. J. (2002). Teacher behaviours that influence young children's reasoning. In A. D. Cockburn & E. Nardi (eds.), *Proceedings of the 26th Annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education Vol. 2*, Norwich: University of East Anglia, 289-296.

Doerr, H. M., & English, L. D. (2003). A modeling perspective on students' mathematical reasoning about data. *Journal for research in mathematics education, 34*(2), 110-136.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 5*(1), 37-65.

English, L. D., & Watters, J. J. (2004a). Mathematical Modeling in the Early School Years. *Mathematics Education Research Journal, 16*(3), 59-80.

English, L. D., & Watters, J. J. (2004b). Mathematical modelling with young children. In M. Johnsen Hoines & A. Berit Fuglestad (eds.), *Proceedings of the 28th International PME Conference*, Bergen University College, 335-342

Eurydice (2011). *Mathematics education in Europe: Common challenges and national policies*. Brussels: Education, Audiovisual and Culture Executive Agency.

Fandiño Pinilla, M. I. (2008). *Molteplici aspetti dell'apprendimento della matematica*. Trento: Erickson.

Ferrari, P. L. (2003). Costruzione di competenze linguistiche appropriate per la matematica a partire dalla media inferiore. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 26*(4), 469-496.

Ferrari, P. L. (2004). *Matematica e linguaggio. Quadro teorico e idee per la didattica*. Bologna: Pitagora.

Fornara, S., & Sbaragli, S. (2013). Italmatica. Riflessioni per un insegnamento/apprendimento combinato di italiano e matematica. In B. D'Amore, & S. Sbaragli (a cura di), *La didattica della matematica come chiave di lettura delle situazioni d'aula*, Bologna: Pitagora, 33-38.

Fornara, S., & Sbaragli, S. (2016). Che problema, queste parole! *La vita scolastica, 2*, 16-18.

Fornara, S., & Sbaragli, S. (in stampa). Italmatica. L'importanza del dizionario nella risoluzione di problemi matematici. *Atti del XVIII Convegno Giscel*, Roma, 26-29 marzo.

Freudenthal, H. (1968). Why to teach mathematics so as to be useful? *Educational Studies in Mathematics, 1*(1), 3–8.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: D. Reidel.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education. China Lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gerofsky, S. (1996). A linguistic and narrative view of word problems in mathematics education. *For the Learning of Mathematics, 16*(2), 36-45.

Gravemeijer, K. P. E. (1994). *Developing realistic mathematics education*. Utrecht: CD-B Press.

Johnson-Laird, P. N. (1983). *Mental models: Towards a cognitive science of language, inference, and consciousness (Vol. 6)*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Jones, G., Langrall, C., Thornton, C., & Nisbet, S. (2002). Elementary school children's access to powerful mathematical ideas. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education*, Mahwah, NJ: Erlbaum, 81-112.

Jupri, A., Drijvers, P., & Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2014). Difficulties in initial algebra learning in Indonesia. *Mathematics Education Research Journal, 26*(4), 683-710.

Jupri, A., & Drijvers, P. H. M. (2016). Student difficulties in mathematizing word problems in algebra. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 12*(9), 2481-2502.

Kintsch, W. (1988). The use of knowledge in discourse processing: A construction-integration model. *Psychological Review, 95*, 163-182.

Kintsch, W., & Van Dijk, T. A. (1978). Toward a model of text comprehension and production. *Psychological review, 85*(5), 363.

Laborde, C. (1995). Occorre imparare a leggere e scrivere in matematica? *La matematica e la sua didattica, 2*, 121-135.

Mayer, R. (1982). The psychology of mathematical problem solving. In F. L. Lester, & J. Garofalo (eds.), *Mathematical problem solving. Issues in research*, Philadelphia: The Franklin Institute Press, 1-13.

Marini, A., & Carlomagno, S. (2004). *Analisi del discorso e patologia del linguaggio (Vol. 10)*. Milano: Springer.

Newman, M. A. (1977). An analysis of sixth-grade pupils' errors on written mathematical tasks. *Victorian Institute for Educational Research Bulletin, 39*, 31-43.

NCTM (2000). *Principles and standard for school mathematics*. Reston: Author.

OECD (2004). *The PISA 2003 Assessment Framework: Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*. Paris: OECD Publishing.

OECD (2006). *Assessing Scientific, Reading and Mathematical Literacy: A Framework for PISA 2006*. Paris: OECD Publishing.

OECD (2007). *Valutare le competenze in scienze, lettura e matematica: Quadro di riferimento di PISA 2006*. Roma: Armando Editore.

OECD (2010). PISA 2009 *Assessment Framework: Key Competencies in Reading, Mathematics and Science*. Paris: OECD Publishing.

OECD (2013). *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy*, OEC Paris: OECD Publishing.

OECD (2016). PISA 2015 *Assessment and Analytical Framework: Science, Reading, Mathematic and Financial Literacy*. Paris: OECD Publishing.

Palm, T. (2008). Impact of authenticity on sense making in word problem solving. *Educational Studies in Mathematics, 67*(1), 37-58.

Pancanti, S. (2014). *I test PISA e i test di ingresso di matematica con l'E-Learning: da momento di verifica a occasione didattica*. Tesi di dottorato, Università di degli Studi di Firenze, Italia. Disponibile in https://flore.unifi.it/retrieve/handle/2158/1010305/67764/pancanti_tesi_dottorato.pdf

Richardson, K. (2004). *A design of useful implementation principles for the development, diffusion, and appropriation of knowledge in mathematics classrooms*. Unpublished doctoral dissertation, Purdue University.

Sbaragli, S., & Franchini, E. (2014). *Valutazione didattica delle prove standardizzate di matematica di quarta elementare*. Locarno: SUPSI, Dipartimento formazione e apprendimento.

Sbaragli, S., & Franchini, E. (2017). *Valutazione didattica delle prove standardizzate di matematica di quinta elementare*. Locarno: SUPSI, Dipartimento formazione e apprendimento.

Sowder, L. (1989). Searching for Affect in the Solution of Story Problems. In D. McLeod & V. Adams (eds.), *Affect and Mathematical Problem Solving. A New Perspective*, New York: Springer Verlag, 104-113.

Treccani (2003). *Il vocabolario treccani* (a cura di M. Cannella & B. Lazzarini). Roma: Istituto della Enciclopedia Italiana.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions: a model of goal and theory description in mathematics instruction - The Wiskobas project*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Treffers, A. (1991). Realistic mathematics education in The Netherlands 1980-1990. In L. Streefland (ed.), *Realistic Mathematics Education in Primary School*, Utrecht: CD-b Press & Freudenthal Institute, Utrecht University.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2000). *Mathematics education in the Netherlands: A guided tour. Freudenthal Institute CD-rom for ICME9*. Utrecht: Utrecht University.

Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Drijvers, P. (2013). Realistic Mathematics Education. In S. Lerman (ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*, Dordrecht, Heidelberg, New York, London: Springer, 521-525.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Lisse: Swets & Zeitlinger.

Wheeler, D. (1982). Mathematization Matters. *For the Learning of Mathematics, 3*(1), 45-47.

Wijaya, A., Van den Heuvel-Panhuizen, M., Doorman, M., & Robitzsch, A. (2014). Difficulties in solving context-based PISA mathematics tasks: An analysis of students' errors. *The Mathematics Enthusiast, 11*(3), 555-584.

Zan R. (2007a). *Difficoltà in matematica: osservare, interpretare, intervenire*. Milano: Springer.

Zan, R. (2007b). La comprensione del problema scolastico da parte degli allievi: alcune riflessioni. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 30* A-B (6), 741-762.

Zan, R. (2010). *L'errore in matematica: alcune riflessioni. Materiale del Piano Nazionale Qualità e merito (PQM)*. Firenze: INDIRE.

Zan, R. (2012). La dimensione narrativa di un problema: il modello C&D per l'analisi e la (ri)formulazione del testo. Parte II. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 35*(2), 437-467.

Zan, R. (2016). *I problemi di matematica: difficoltà di comprensione e formulazione del testo*. Roma: Carocci.

Autori / Elena Franchini*, Alice Lemmo° e Silvia Sbaragli*
*Dipartimento Formazione e Apprendimento-SUPSI di Locarno
°Università degli Studi di Palermo
elena.franchini@supsi.ch, alice.lemmo@gmail.com e silvia.sbaragli@supsi.ch

Esperienze didattiche

DdM

Un'orchestra di strumenti matematici

Macchine matematiche, software di geometria dinamica e LIM nella scuola media[1]

Giuliana Bettini
Scuola media di Giubiasco

Sunto / In questo articolo è descritto l'uso intenzionale di più strumenti (orchestrazione strumentale) quali un pantografo, un software di geometria dinamica e una lavagna interattiva multimediale (LIM), per introdurre studenti di seconda media all'idea di simmetria assiale come corrispondenza biunivoca tra punti del piano, superando quella più ingenua di trasformazione di figure. Si è fatto riferimento alla teoria della mediazione semiotica (Bartolini Bussi & Mariotti, 2009) e alla struttura didattica in essa proposta: attività con artefatto a piccolo gruppo, attività individuale e discussione collettiva. Inoltre ci si è riferiti all'approccio strumentale (Rabardel, 1995) basato sulla distinzione fra artefatto e strumento. La LIM è stata utilizzata come *spazio d'azione* (Didoni & Di Palma, 2009) per rendere visibili all'intera classe azioni individuali.

Parole chiave: orchestrazione strumentale; pantografo; software di geometria dinamica; lavagna interattiva multimediale; simmetria assiale.

Abstract / This article describes the intentional use of multiple instruments (instrumental orchestration) such as a pantograph, a dynamic geometry software and an interactive whiteboard (IWB), for introducing 7th grade students to the idea of axial symmetry as one-to-one correspondence between points in the plane, overcoming the naïve concept one of figures transformation. The chosen frame of reference is the theory of semiotic mediation (Bartolini Bussi & Mariotti, 2009) and its didactical structure: small group activity with artifact, individual activity and class discussion. Moreover, the instrumental approach (Rabardel, 1995) based on the distinction between artifact and instrument has been taken into account. The IWB has been used as an *action place* (Didoni & Di Palma, 2009) in order to show individual actions to the whole class.

Keywords: instrumental orchestration; pantograph; dynamic geometry software; interactive whiteboard; axial symmetry.

1 Introduzione

Le indicazioni metodologiche e didattiche del *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese* (DECS, 2015) individuano il laboratorio come «spazio didattico in cui l'allievo è attivo, formula congetture e ipotesi, progetta, sperimenta, raccoglie dati, realizza e controlla le conseguenze delle scelte effettuate, negozia significati, valida e argomenta le proprie scelte con il resto del gruppo classe, costruisce significati interindividuali,

[1] Sintesi del lavoro di diploma per il *Master of Arts SUPSI in Insegnamento per il livello secondario I*, anno accademico 2015/2016, relatore: Michele Impedovo.

socializza le conoscenze emerse. Il laboratorio matematico costituisce uno spazio privilegiato per lavorare sui nuclei fondanti della disciplina».

Nel Piano di studio si sottolinea inoltre «l'importanza di proporre significativi artefatti utili per l'apprendimento degli allievi, tra i quali i tradizionali strumenti». Nell'ambito di competenza *Geometria*, si raccomanda inoltre la trattazione della simmetria assiale per esplorare significative situazioni geometriche e riconoscere le principali caratteristiche di figure convenzionali (triangoli, quadrilateri, cerchi, poligoni regolari, ecc.) o di figure ispirate alla vita comune (foglie, case, pesci, alberi, ecc.), anche se non è previsto lo studio sistematico delle trasformazioni.

In questo contributo, il laboratorio è stato scelto come ambiente di apprendimento per svolgere attività che si ritengono adatte alla costruzione di significati inerenti la simmetria. Attorno a un unico oggetto matematico, la simmetria assiale, sono stati orchestrati diversi strumenti introducendo artefatti di differente natura (macchine matematiche e tecnologie digitali).

Come artefatto si è scelto il pantografo, che risulta significativo per il concetto di simmetria assiale, al quale è stata affiancata la LIM. Gli studenti sono stati guidati in un percorso di esplorazione e di scoperta e accompagnati nella costruzione di significati matematici inerenti alla simmetria assiale; hanno utilizzato gli strumenti proposti arricchendoli di modalità personali e nel corso dell'attività vi hanno affiancato anche quelli più tradizionali come il compasso o la squadra. Inoltre l'attività di laboratorio ha permesso di far diventare strumenti di apprendimento anche i loro gesti, le loro parole e il confronto con i compagni.

2 Quadro teorico

In questa sperimentazione si è fatto riferimento alla *teoria della mediazione semiotica* (Bartolini Bussi & Mariotti, 2009) e all'approccio strumentale dovuto a Rabardel (1995a). È stato necessario approfondire gli ostacoli legati al concetto di simmetria assiale e documentarsi su sperimentazioni e ricerche inerenti alla didattica con la LIM.

2.1 Artefatti e strumenti

Rabardel nel 1995 pubblicò il volume *Les homme et les technologies, une approche cognitive des instruments contemporains* nel quale distingue tra artefatti e strumenti in riferimento alla tecnologia informatica.

Un artefatto è un oggetto materiale (il compasso, la squadra, la calcolatrice ecc.) o simbolico (un grafico, un algoritmo ecc.). Secondo l'autore, gli artefatti diventano strumenti solo quando, utilizzandoli, ce ne appropriamo e li arricchiamo di componenti soggettive che vengono chiamate "schemi d'utilizzo".

Uno strumento, quindi, è frutto della costruzione di un individuo ed è costituito di due parti: l'artefatto e gli schemi d'utilizzo a esso associati.

Il processo di costruzione individuale di uno strumento a partire da un artefatto è detto "genesi strumentale" ed è il risultato di un doppio processo:
- la "strumentalizzazione", diretta verso l'artefatto: si indagano le componenti dell'artefatto, in alcuni casi fino alla modifica dell'artefatto stesso;
- la "strumentazione", relativa al soggetto in apprendimento: si costruiscono schemi di utilizzo personali a partire da compiti specifici da eseguire.

L'insegnante ha il compito di scegliere l'artefatto e di guidare la genesi strumentale poiché è in questa fase che gli allievi costruiscono i significati matematici. Ciascun alunno costruisce il proprio strumento secondo schemi d'uso individuali: Trouche (2005) introduce la nozione di orchestrazione strumentale proprio per descrivere la gestione didattica delle genesi strumentali.

Se nelle attività sono coinvolti più strumenti, questi non possono essere considerati isolati, ma si devono valutare le loro reciproche influenze: la gestione di più strumenti rientra anch'essa nelle dinamiche di orchestrazione strumentale.

2.2 La mediazione semiotica

La macchina, nel nostro caso il pantografo, ha un forte legame con la storia della matematica, elemento proposto nella teoria della mediazione semiotica (Bartolini Bussi & Mariotti, 2009), che prevede l'uso di artefatti nella costruzione di significati matematici in una prospettiva vygostkiana (Vygotskij, 1978).

L'artefatto, scelto dall'insegnante, deve essere il mediatore di significati relativi ai saperi che esso incorpora. Sono le scelte dell'insegnante che danno una direzione al processo di esplorazione della macchina. Il compito dato agli allievi deve essere accessibile e dare luogo a una produzione intensa di segni (attività semiotica). Questi segni, prodotti dagli studenti, non sono solo disegni o testi, ma anche sguardi, parole e gesti: i segni hanno la funzione di comunicare con i compagni, con l'insegnante e anche di rappresentare il problema a se stessi.

L'insegnante accompagna l'evoluzione dei segni: l'artefatto è uno strumento di mediazione semiotica poiché è legato alla consegna assegnata allo studente e al sapere matematico che si vuol far scaturire.

La struttura didattica della *teoria della mediazione semiotica* propone un «ciclo didattico» costituito da tre attività (lato destro della Figura 1): attività a piccolo gruppo con l'artefatto, attività individuali con produzione di segni, *testi situati*, e la produzione collettiva di segni che avviene mediante una discussione, *testi matematici*. La discussione matematica (Bartolini Bussi & Mariotti, 2009), condotta dall'insegnante, ha l'obiettivo di utilizzare i contributi individuali degli allievi per favorire il passaggio verso segni matematici.

I segni prodotti nell'attività favorita dall'artefatto si possono distinguere, per aspetti cognitivi, in due categorie:
- "segni artefatto", che si riferiscono ad attività con l'artefatto e contengono il riferimento a sue parti, ad azioni che vengono fisicamente compiute nel corso del suo uso; sono segni di carattere fortemente soggettivo;

– "segni matematici", legati ai significati matematici condivisi dalla comunità, di cui l'insegnante si fa mediatore. Fanno parte dell'eredità culturale e il loro apprendimento costituisce l'obiettivo dell'insegnamento.

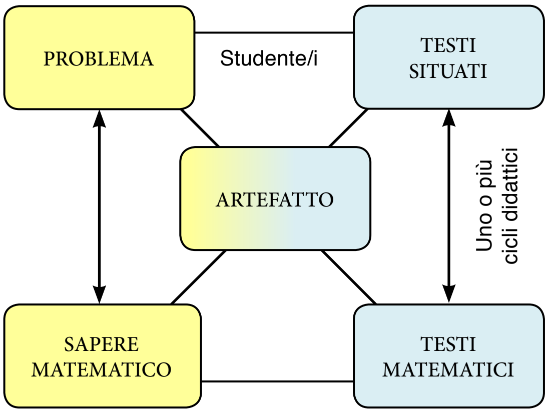


Figura 1
La mediazione semiotica.

A queste due categorie si possono aggiungere i "segni pivot" che possono riferirsi sia all'attività con l'artefatto sia al sapere matematico. È l'insegnante a giocare con i *segni pivot* per favorire la transizione dal contesto di utilizzo degli artefatti al contesto matematico.

I segni prodotti dagli studenti risentono del processo di genesi strumentale, cioè degli schemi d'utilizzo che essi sviluppano a partire dalle consegne dell'insegnante. Si potrebbe dire che negli schemi di utilizzo si trovano quei significati matematici che l'artefatto media e contribuisce a costruire.

2.3 Lavagna interattiva multimediale (LIM)

Le ricerche relative all'utilizzo della LIM in classe sono state in questi anni prevalentemente qualitative. In un articolo pubblicato sul sito *educa.ch* (Burton, Monney & Jauquier, 2010) si legge che nessuno studio sperimentale finora effettuato ha potuto dimostrare evidenti effetti positivi sull'apprendimento a lungo termine dovuti all'utilizzo della LIM. Sono invece confermati effetti positivi (Salvadori, 2012) sulla motivazione degli allievi e degli insegnanti, nonostante non si escluda la possibilità che la LIM favorisca lezioni svolte in modalità prevalentemente frontale. Recentemente sono stati pubblicati i risultati di una ricerca svolta in Québec (Samson & Lefebvre, 2016) in cui si descrivono le pratiche didattiche degli insegnanti della scuola elementare e della scuola media che utilizzano questo supporto didattico. Nei risultati di questa ricerca si conferma il largo uso di didattiche frontali in classi in cui è presente una lavagna interattiva e si mette in evidenza come l'utilizzo combinato di tablet e della LIM in classe sarebbe la ricetta da privilegiare per trarre pienamente profitto dalle potenzialità di questa tecnologia.

Didoni e Di Palma (2009) classificano tre diversi modi d'uso della lavagna multimediale: *finestra multimediale, memoria digitale o spazio d'azione*. Nei primi due casi la LIM è utilizzata come una periferica di output: per la condivisione di materiali multimediali elaborati dal docente o dagli studenti (finestra multimediale) e per una facile consultazione a casa, o nelle lezioni successive, di quanto prodotto in classe (memoria digitale). La LIM è, però, anche una periferica di input e come tale ha una terza importantissima funzione: condivisione di azioni rese visibili a tutta la classe (spazio di azione). L'armonizzazione di queste tre funzionalità, secondo gli autori, sarebbe la condizione ideale per favorire la costruzione della conoscenza.

Nel suo scritto *Registres de représentation sémiotioque et fonctionnement cognitif de la penseé* (1993), Duval distingue fra oggetti matematici e loro rappresentazione. Questi due aspetti, paradosso cognitivo del pensiero matematico, non si possono scindere nella fase di apprendimento. Proprio per evitare che l'allievo identifichi l'oggetto matematico con la sua rappresentazione è necessario presentare più rappresentazioni semiotiche.

L'utilizzo combinato del software di geometria dinamica *Geogebra* e della LIM risponde ai criteri, per Duval (1993) necessari, affinché un sistema semiotico sia considerato un registro di rappresentazione: è un sistema di segni che permette di riempire le funzioni di comunicazione (permette di disegnare, di scrivere, ecc.), di trattamento (la dinamicità del software permette continue riconfigurazioni) e di conversione in un altro registro senza cambiare oggetto (l'alunno descrive le sue azioni, le discute con i compagni).

Quale LIM?
Esistono diverse tipologie di lavagne interattive multimediali. Si distinguono per le caratteristiche tecnologiche (alcune sono touch, altre interagiscono unicamente mediante l'utilizzo di una penna specifica), per il tipo di proiezione (proiettore frontale o retroproiettore) e per i programmi applicativi che utilizzano.

«Diverse marche di LIM si dividono il mercato scolastico. Sfortunatamente, però, i software che lavorano su queste diverse lavagne non sono compatibili tra loro. Alcune marche propongono soluzioni limitate per l'importazione e l'esportazione dei file dei prodotti concorrenti. Questa mancanza di interoperabilità è problematica poiché limita la condivisione delle risorse digitali tra gli insegnanti. Essa complica […] rende più difficile il lavoro dei formatori del corpo insegnante» (Burton Monney & Jauquier, 2010). Per ovviare a questi problemi si potrebbero utilizzare soluzioni *opensource*, come ad esempio Open-Sankoré, compatibili con le diverse LIM.

Non sono però solo i software a essere differenti, variano anche le caratteristiche di interoperabilità. Per alcune lavagne, ad esempio, è possibile registrare o stampare il contenuto presente sulla lavagna, per altre no; in alcune lavagne è possibile importare file in vari formati, modificarli e poi salvarli per le lezioni seguenti, in altri casi si possono modificare solo file realizzati nel software specifico della LIM. I diversi schemi d'uso possono essere così differenti da non poter parlare genericamente di attività con la LIM, ma rendono necessario specificare le caratteristiche della lavagna utilizzata.

2.4 La simmetria assiale
«C'è un legame privilegiato tra la geometria e la realtà. La geometria è una disciplina teorica, ma al tempo stesso, dipende dalla realtà come modello di alcuni suoi aspetti» (Bartolini Bussi & Maschietto, 2007). Anche la simmetria rientra fra questi casi: essa può

essere sperimentata in campi come la musica, l’arte, la biologia e la fisica. Nella vita di tutti i giorni il termine simmetria assume il significato di *armonioso o ben proporzionato*, ma la simmetria è anche un’idea centrale della matematica (Weyl, 1952) e richiede un processo matematico di definizione che deve essere guidato dall’insegnante.

La simmetria assiale è fra i concetti indagati da Nathalie Sinclair, della facoltà di Educazione della Simon Fraser University (Canada), che si occupa del modo in cui le tecnologie digitali e i software di geometria dinamica cambiano l’apprendimento della matematica.

In un articolo presentato ad Ankara nel 2011, conferma che i bambini mostrano una forte capacità di riconoscere figure simmetriche, ma anche che, prima dei dodici anni, molti concetti della simmetria non sono ancora stabilizzati.

Anche Rabardel, in un articolo del 1995, cita ricerche condotte in Canada (Ouray, 1991) in cui si mette in evidenza come la nozione di simmetria assiale, che richiede il concetto di ortogonalità, non possa essere pienamente trasmessa attraverso pratiche di piegamento o con l’utilizzo di fogli quadrettati. Lo strumento, secondo Rabardel (1995b), non è indifferente per il processo di concettualizzazione: la costruzione ottenuta con il foglio quadrettato, anche se corretta, è comunque più povera di quella ottenuta con uno strumento come la squadra. Utilizzando una squadra l’alunno deve considerare l’ortogonalità ed effettuare misure prendendo in carico una dimensione fondamentale della simmetria, la distanza.

Gli autori del manuale destinato alla formazione degli insegnanti *Donner du sens aux mathématiques* (Fénichel, Pauvert & Pfaff, 2004), nella sezione dedicata allo spazio e alla geometria, individuano differenti procedure di risoluzione di problemi inerenti alla simmetria assiale ed elencano gli errori tipici e ricorrenti che si riscontrano nei diversi cicli scolastici. Le procedure dipendono dagli strumenti proposti agli studenti per la soluzione (forbici, riga, squadra, carta trasparente ecc.), dai diversi supporti (carta a quadretti, fogli bianchi ecc.), dalla figura stessa (esterna all’asse, attraversata dall’asse ecc.) e, infine, dalla direzione dell’asse di simmetria all’interno del foglio (verticale, orizzontale ecc.). Gli autori del volume, citando Lurçat (1982), rilevano che la prima procedura applicata si affida in ogni caso alla percezione: non ci si deve stupire se anche un bambino della scuola materna riconosce l’asse di simmetria di una figura, in particolare se l’asse è verticale. Secondo gli autori, la ricerca di un asse di simmetria parte sempre da un’ipotesi che si basa su una percezione: un’idea, anche non rigorosa, su cui poi basare la costruzione. Alle scuole elementari ci si esercita maggiormente nel trasformare globalmente figure, senza porre l’attenzione sui particolari della figura stessa, sui punti. La simmetria assiale è una corrispondenza biunivoca tra punti del piano, per questo quando si passa a problemi più complessi, la strategia puntuale risulta più efficace che considerare l’intera figura. Basta esaminare esercizi in cui, ad esempio, si debba costruire la simmetrica di una figura poligonale i cui lati non seguono le diagonali dei quadretti del foglio. Per arrivare a una soluzione, la figura deve essere pensata come una successione di vertici uniti da segmenti. Queste situazioni costringono lo studente a considerare la distanza dei vertici dall’asse introducendo una procedura puntuale.

Ci sono comunque errori ricorrenti e tipici che si verificano in particolare se l’asse non è né *verticale* né *orizzontale*, oppure se l’asse attraversa la figura. Questi segnali permettono di identificare un ostacolo (D'Amore, 1995): un'idea che inizialmente era efficace per il tipo di problemi proposti (seguire i quadretti, piegare il foglio ecc.) diventa fallimentare nei nuovi casi da affrontare (non è possibile piegare lo schermo della LIM, mancano i quadretti, l'asse è obliquo, la figura interseca l'asse ecc.). Didatticamente questi ostacoli si possono superare con situazioni, appositamente studiate, che "convincano" gli studenti della necessità di rivedere e modificare le proprie concezioni e strategie.

3 Domande di ricerca

D1. L'introduzione di artefatti significativi può favorire i processi cognitivi che qualificano il sapere matematico (esplorare, provare, interpretare, argomentare e comunicare)? (DECS, 2015).

D2. Cosa può aggiungere uno strumento tecnologico, come una lavagna multimediale, all'esperienza di laboratorio matematico?

D3. Consapevoli del prevalere delle procedure percettive nel realizzare figure simmetriche, l'orchestrazione di più strumenti può aiutare a superarle?

D4. La LIM può favorire il passaggio da una concezione globale (trasformazione di una figura) a una concezione puntuale (simmetrico di un punto) della simmetria assiale?

D5. L'attività di laboratorio fatta affiancando artefatti differenti, come le macchine matematiche e la LIM (utilizzata come touch-screen per un software di geometria dinamica), può introdurre l'idea di trasformazione geometrica come corrispondenza biunivoca tra punti del piano?

4 Metodologia di ricerca

La sperimentazione si è svolta in una seconda media di 18 alunni (11 ragazze e 7 ragazzi) del Collegio Papio di Ascona ed è stata realizzata in due fasi distinte:

– attività di laboratorio a gruppi con una macchina matematica (senza la LIM), della durata di tre ore;
– attività dialogata con schede di lavoro (con la LIM), della durata di tre ore.

Nella prima parte, gli studenti hanno lavorato con cinque pantografi avuti in prestito dal *Laboratorio delle Macchine Matematiche* dell'Università di Modena e Reggio Emilia. Al termine delle due fasi sopra descritte si è svolta una verifica e la discussione in classe dei relativi risultati (due ore).

Si è scelto di non anticipare l'oggetto del laboratorio: gli studenti non sono stati informati del tipo di trasformazione che effettua il pantografo.

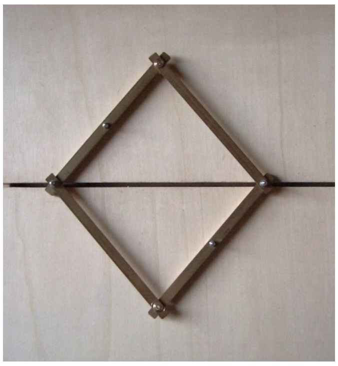
Come strumenti di rilevamento dei dati è stato utilizzato un diario di tipo esperienziale, la video documentazione delle prime lezioni e i protocolli degli allievi. Nel corso delle attività didattiche sono stati annotati fatti significativi (interventi degli alunni, loro dialoghi, azioni di particolare interesse). Grazie alla collaborazione di due colleghi, è stato possibile filmare alcune parti del laboratorio coi pantografi e la riscrittura dei dialoghi è stata utilizzata nell'analisi dei dati. Nel corso dei lavori con la LIM o della verifica si è fatto anche uso delle fotografie per documentare momenti significativi. Tutti i protocolli prodotti dagli allievi sono stati raccolti e utilizzati per rispondere alle domande di ricerca.

Per la ricerca è stato utilizzato un videoproiettore con funzionalità interattiva. Il videoproiettore ha una periferica di rilevamento fissa: l'utilizzatore può così lavorare sulla stessa superficie sia con dei pennarelli (a rilevatore spento), sia interattivamente per mezzo di una penna (a rilevatore acceso e connesso al computer). L'utilizzo della penna rende il videoproiettore una lavagna multimediale (LIM). È possibile, inoltre, passare dalla modalità *finestra multimediale* alla modalità *spazio d'azione* senza perdere quanto disegnato alla lavagna. Ad esempio è possibile interagire con il software utilizzando la penna come mouse e passare poi alla modalità lavagna mantenendo lo stesso sfondo.

I file utilizzati con la LIM sono stati realizzati dall'insegnante con il software di geometria dinamica *Geogebra*.

4.1 Il laboratorio col pantografo per la simmetria assiale

L'artefatto proposto nella prima fase è stato il pantografo per la simmetria assiale (Figura 2).



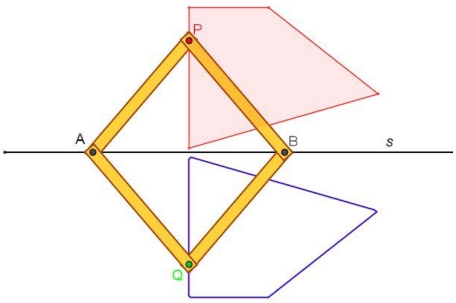


Figura 2
Pantografo per la simmetria assiale.

Figura 3
Immagine di un'animazione di un pantografo per la simmetria assiale.

Il pantografo è formato da un rombo articolato AQBP (**Figura 3**) i cui vertici A e B sono vincolati a muoversi su una scanalatura *s*, mentre gli altri due vertici, P e Q, hanno due gradi di libertà. La macchina realizza una corrispondenza fra due regioni limitate di piano che giacciono su semipiani opposti rispetto a *s*. Per le proprietà del rombo e per come questo è incernierato al piano (una delle diagonali giace sulla scanalatura *s*), i punti P e Q si corrispondono in una simmetria assiale (in cui l'asse è la scanalatura *s*). Quando P percorre una traiettoria assegnata, Q descrive la traiettoria simmetrica, come mostrato nella **Figura 3** (Associazione Macchine Matematiche).

In accordo con i riferimenti teorici citati, l'attività si è svolta seguendo questa successione:

a) Com'è fatta la macchina?
   – Esplorazione della macchina come artefatto a piccolo gruppo (quante aste, quanti vincoli, materiali, limiti della macchina);
   – produzione di testi (in gruppo o individuale);
   – condivisione dei risultati.
b) Cosa fa la macchina?
   – Esplorazione della macchina come strumento, suddivisi in gruppi (all'artefatto si aggiungono gli schemi d'uso e la macchina diventa uno strumento);
   – produzione di congetture (individuale o in gruppo).
c) Perché lo fa?
   – Matematica incorporata nella macchina: lavoro collettivo (caratteristiche costruttive dello strumento che permettono di ottenere la trasformazione, proprietà matematiche alla base della costruzione).

Per il lavoro a gruppi sono state fornite agli allievi schede di lavoro con domande atte a sostenere la genesi strumentale nell'esplorazione della macchina matematica.

4.2 Discussione attorno alla LIM

Sequenza 1

Agli studenti sono stati consegnati esercizi da svolgere individualmente: le stesse configurazioni presenti sulle schede sono state riproposte alla classe sulla lavagna interattiva e la discussione si è spostata attorno alla LIM (spazio d'azione).
La discussione collettiva è stata arricchita dalla possibilità di realizzare con un software di geometria dinamica e con la LIM la stessa trasformazione studiata con i pantografi. Lo scopo era evidenziare eventuali contraddizioni fra le risposte degli allievi e porre il problema della validazione.

Sequenza 2

Dopo il laboratorio con le macchine e la sequenza di esercizi, l'idea di simmetria è già stata condivisa, gli studenti sono stati invitati alla lavagna per svolgere, a turno, esperienze dinamiche di simmetria con l'ausilio dello strumento *Traccia* e delle funzionalità *touch-screen* della LIM.

Sequenza 3

La LIM in dotazione della classe permette a due utenti di scrivere contemporaneamente, perciò le esperienze dinamiche con l'ausilio della lavagna coinvolgono direttamente al massimo due alunni alla volta. Si è scelto quindi di far seguire alla *Sequenza 2*, in cui la LIM era protagonista, una serie di esercizi di anticipazione da svolgere anche con carta e matita, su schede prodotte dall'insegnante, e successivamente tornare alla discussione collettiva sulla LIM, dando così la possibilità, nelle tre sequenze, a tutti gli alunni di essere sempre attivi e di partecipare alla discussione. Le attività sono state progettate dall'insegnante e presentavano diverse categorie di esercizi (nelle figure seguenti sono riportati due esempi, gli altri si trovano in Esercizi introduttivi.docx):

a) Tracciare l'asse di simmetria e la figura simmetrica a quella data, a partire da due punti simmetrici.

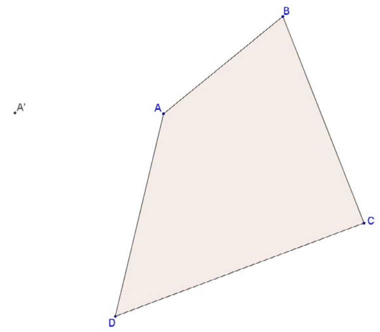


Figura 4
Esercizio assegnato: Disegna l'asse e il simmetrico del quadrilatero.

b) Tracciare la figura simmetrica rispetto a un asse su foglio a quadretti (l'asse segue la diagonale dei quadretti):

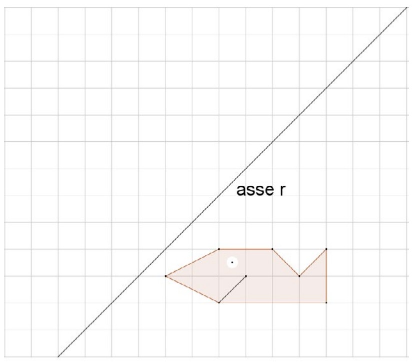


Figura 5
Esercizio assegnato: Traccia il pesce simmetrico.

Al termine del percorso è stata somministrata una verifica in cui sono state proposte costruzioni di difficoltà crescente seguendo le indicazioni riportate nel quadro teorico e secondo le categorie di esercizi proposti durante la ricerca.

5 L'esperienza in classe

5.1 Come è fatta la macchina?

La classe è stata suddivisa in cinque gruppi composti di 3-4 allievi. Si è deciso di formare gruppi omogenei. Nei primi cinque minuti di lezione è stata introdotta l'attività e presentato l'artefatto senza anticipare la sua funzione. Si sono utilizzati termini come scanalatura, aste, tracciatore e puntatore, di cui alcuni alunni si sono serviti per descrivere il pantografo.

Nella fase iniziale i gruppi hanno lavorato approcciando con curiosità l'artefatto. Inizialmente si sono dedicati all'esplorazione della macchina, poi hanno compilato le schede fornite dall'insegnante continuando a muovere le aste e utilizzando strumenti di misura. Ogni studente era libero di formulare una risposta condivisa con il gruppo o meno. Sono stati forniti anche fogli bianchi e le mine necessarie per tracciare i segni e per favorire anche le osservazioni dei movimenti.

Domande poste agli studenti (Com'è fatta la macchina.docx):

– Descrivi accuratamente la macchina servendoti anche di disegni se necessario.
– Prendi le misure delle diverse componenti della macchina.
– Di quante aste rigide è costituita la macchina?
– Vi sono aste fissate tra loro? In che modo?
– Quale figura formano tali aste?
– Quali parti del sistema si muovono e quali restano fisse?
– Vi sono parti fissate alla base in legno? Quali? Dove sono posizionate?

Compilando le schede e rispondendo alle domande, gli studenti hanno prodotto testi situati in cui erano ancora presenti molti riferimenti all'artefatto: questi testi sono stati utilizzati dall'insegnante come segni pivot, per favorire l'evoluzione di segni matematici. Terminata l'esplorazione durata circa 25 minuti, l'insegnante ha guidato la discussione collettiva mostrando un pantografo alla classe. Anche in questa fase sono stati utilizzati, dagli alunni e dall'insegnante, i termini *scanalatura, aste, tracciatore e puntatore*.

Utilizzando gli stessi gesti della fase di esplorazione ("gesti d'uso" della macchina), la docente si è fatta carico della genesi strumentale degli allievi: i gesti fanno parte di quei segni la cui produzione è sollecitata dall'utilizzo del pantografo. In termini di genesi strumentale, la successione di attività proposte agli studenti ha portato l'attenzione sull'importanza di quella parte del processo di esplorazione in cui la macchina è in movimento.

Ha suscitato dibattito la domanda *Quale figura formano tali aste?*
Fra le risposte: «un quadrilatero modificabile», «un quadrato che si può modellare (muovere)», «un rombo (che può diventare un quadrato)», «una figura con un asse di simmetria (la scanalatura), che è una diagonale». L'insegnante non conferma né sottolinea l'ultima osservazione. Conclude affermando che la macchina utilizza il rombo per realizzare disegni geometrici.

5.2 Cosa fa la macchina?

Nella lezione successiva a ogni gruppo sono assegnate una macchina e tre schede con figure diverse e la richiesta *Confronta la figura di partenza e quella tracciata: quali proprietà si conservano e quali variazioni osservi* (cosa fa la macchina.docx). La consegna aveva lo scopo di far riprodurre figure assegnate e far vivere esperienze sulle proprietà invarianti della simmetria assiale.

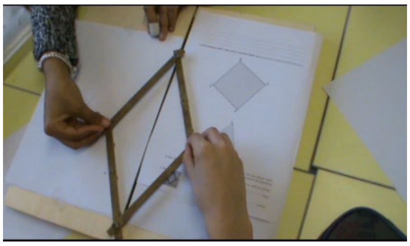


Figura 6
Immagine di due alunni al lavoro col pantografo. Estratto dal video [Alunni al lavoro col pantografo](#).

Sono riportate le risposte più significative dei cinque gruppi e alcune immagini realizzate col pantografo.

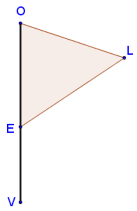


Figura proposta sulla scheda

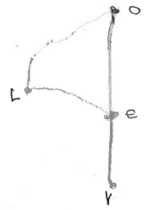
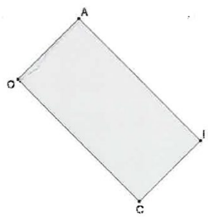


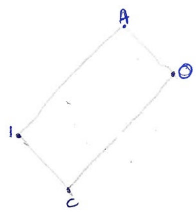
Figura riprodotta col tracciatore

Confronta la figura di partenza e quella tracciata: quali proprietà si conservano e quali variazioni osservi.

OSSERVIAMO CHE I PUNTI SONO INVERTITI RISPETTO ALL'IMMAGINE.

Figura 7
Figura, sua trasformata e risposta di un gruppo.





Confronta la figura di partenza e quella tracciata: quali proprietà si conservano e quali variazioni osservi.

se si fa un rettangolo, si fa un rettangolo anche dall'altra parte se il lato misura 10 cm anche dall'altra parte misura 10cm, è TUTTO simmetrico

Figura 8
Figura, sua trasformata e risposta di un gruppo.

Le figure ottenute col pantografo non sono precise, ma consentono ai gruppi di sperimentare il movimento e gli invarianti. Solo due gruppi hanno sottolineato inizialmente "l'inversione" delle figure (**Figura 7** e **Figura 12**), ma, nel corso dell'osservazione in classe, tutti hanno in seguito posto l'attenzione su questo aspetto.

Confronta la figura di partenza e quella tracciata: **quali proprietà si conservano e quali variazioni osservi.**

Se da una parte ci si avvicina si avvicina anche dall'altra parte se traccio una linea retta si traccia una linea retta anche dall'altra parte. praticamente é tutto simmetrico!!! Se da una parte un angolo ha 90° anche l'altro ha 90°

Figura 9
Risposta di un gruppo.

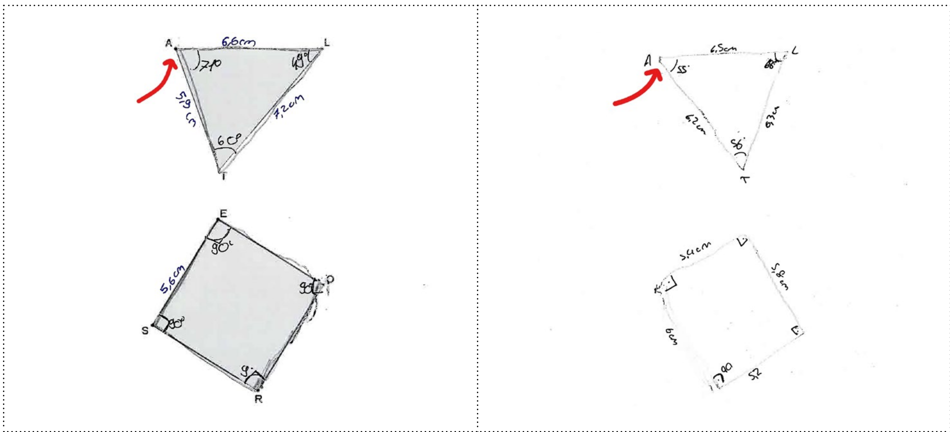


Figura 10
Figura e rispettiva trasformata.

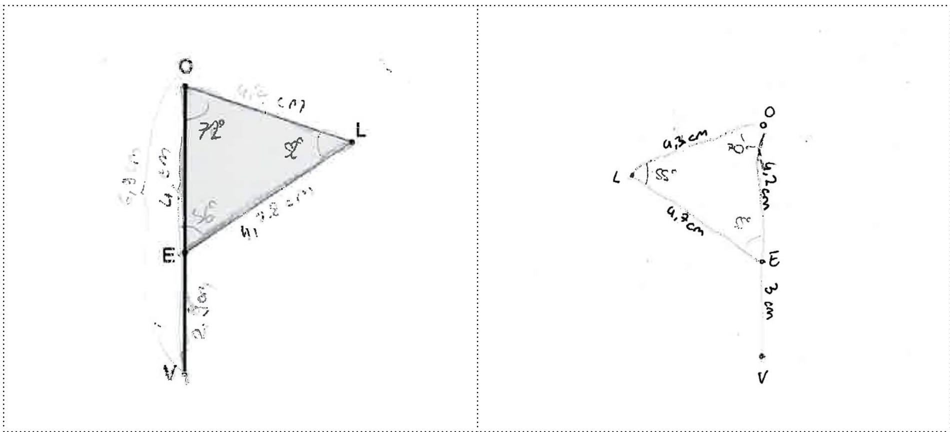


Figura 11
Figura e rispettiva trasformata.

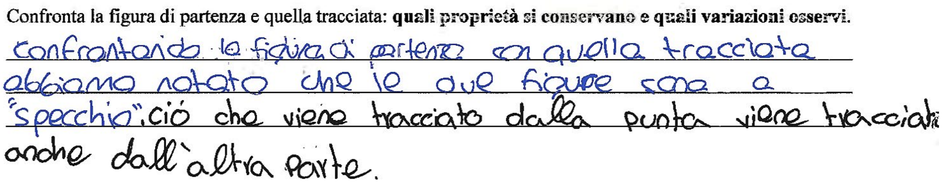
Si noti che nella **Figura 10** le lettere sono state scambiate come se si volesse mantenere l'ordine della figura da trasformare, mentre un altro gruppo scrive quanto riportato nel protocollo in **Figura 12**.

Confronta la figura di partenza e quella tracciata: **quali proprietà si conservano e quali variazioni osservi.**

Praticamente la lettera "A" nel foglio che abbiamo fatto noi diventa la lettera "L". Il tutto s'inverte.

Figura 12
Risposta di un gruppo.

Sarà necessaria la discussione matematica della lezione successiva per fare chiarezza sull'ordine dei vertici. Nelle osservazioni in classe si è potuto constatare che la maggior parte degli alunni definisce la trasformazione con i termini "figure a specchio" come è riportato in alcuni protocolli, forse derivante dal loro vissuto o dall'insegnamento ricevuto nei livelli scolastici precedenti (**Figura 13** e **Figura 14**).


Confronta la figura di partenza e quella tracciata: **quali proprietà si conservano e quali variazioni osservi.**
confrontando la figura di partenza con quella tracciata abbiamo notato che le due figure sono a "specchio", ciò che viene tracciato dalla punta viene tracciato anche dall'altra parte.

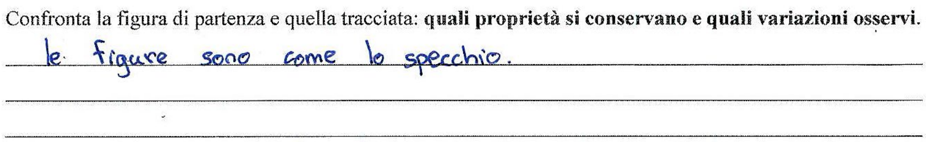

Confronta la figura di partenza e quella tracciata: **quali proprietà si conservano e quali variazioni osservi.**
le figure sono come lo specchio.

Figura 13 e 14
Risposte di due gruppi.

Disegnare la figura simmetrica della circonferenza è stato particolarmente problematico per gli studenti, una di loro propone di utilizzare il compasso (**Figura 15**).

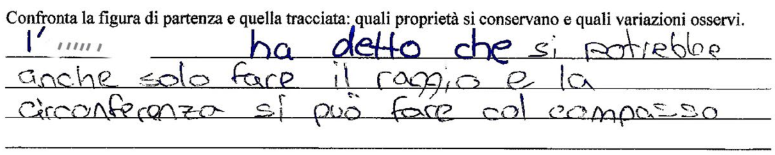

Confronta la figura di partenza e quella tracciata: quali proprietà si conservano e quali variazioni osservi.
l' [redacted] ha detto che si potrebbe anche solo fare il raggio e la circonferenza si può fare col compasso

Figura 15
Risposta di un gruppo.

Si osservi come diffusi riferimenti alla simmetria siano già evidenti in questa seconda fase e non solo in un paio di casi come in precedenza. Avendo tracciato i simmetrici di alcune figure geometriche (triangoli, rettangoli, ecc.). Gli studenti hanno osservato che si mantiene invariata anche l'ampiezza degli angoli e che rette parallele restano parallele. In questa fase tutti i gruppi si sono scontrati con i limiti fisici della macchina e hanno spesso dovuto modificare la posizione della scheda assegnata per fare in modo che fosse possibile tracciare le figure simmetriche.

5.3 Perché lo fa?

La terza lezione ha avuto inizio con una discussione collettiva. Si sono discusse le caratteristiche della trasformazione emerse nell'esplorazione col pantografo e le sue proprietà invarianti: se un punto appartiene a un semipiano, il suo simmetrico si trova nel semipiano opposto; la simmetria assiale mantiene invariata la lunghezza dei segmenti, ma non conserva l'orientamento dei punti; quando il puntatore si avvicina alla scanalatura il tracciatore si avvicina, quando il puntatore si muove in senso orario il tracciatore si muove in senso antiorario.

L’insegnante mostrava il pantografo agli alunni e guidava la discussione ponendo domande. Quando le risposte erano condivise venivano riportate alla lavagna. Lo scopo era di passare dai segni artefatto ai segni matematici.

Al termine dell’indagine è stata posta agli studenti la domanda: *quale trasformazione realizza la macchina?* In un primo momento le risposte sono state «triangoli», «tutti i quadrilateri», e infine ha prevalso la proposta di un alunno: «simmetria assiale, perché c’è un asse».

Alla classe è stata distribuita una scheda (perché lo fa.docx) che doveva essere completata per istituzionalizzare le osservazioni precedenti. In essa si chiedeva cosa cambia e cosa non cambia a seguito della trasformazione effettuata (la misura dei segmenti, l’ampiezza degli angoli, il parallelismo, la direzione delle rette, l’orientamento delle figure). L’insegnante si è fatta carico di riprendere le osservazioni fatte dalla classe in termini matematicamente corretti. La questione della direzione delle rette (cambia o no?) ha destato qualche perplessità, ma l’intervento di un allievo ha convinto tutti: «Sì, cambia. Tipo hai due rette parallele che vanno da su a giù, cioè da sinistra a destra (gesti con le mani), quando le riporti dall’altra parte vanno da destra a sinistra».

Terminata la discussione era necessario definire la simmetria assiale attraverso la costruzione del simmetrico di un punto rispetto a una retta, utilizzando riga e squadra alla lavagna. Gli strumenti utilizzati erano noti alla classe. La prima parte della costruzione è stata realizzata dall’insegnante e gli alunni dovevano ripetere i passi della costruzione sul loro foglio, ma è stato sufficiente riprendere le osservazioni scaturite dal gruppo per ottenere una definizione condivisa.

Gli studenti sono tornati poi sulle macchine divisi per gruppo e hanno ricevuto la seguente consegna: *quali caratteristiche della macchina permettono la realizzazione di tale trasformazione?* Erano a disposizione fogli bianchi, inoltre il puntatore e il tracciatore del pantografo avevano entrambi la possibilità di disegnare. Alcune risposte:

- «Perché fissa i due angoli con dei chiodi sull’asse, così che sia ancora (solo) possibile muoverli sull’asse così il rombo è diviso a metà e ogni cosa che si fa in una metà succede anche nell’altra».
- «Questa macchina serve per fare da specchio, se da una parte disegni un cerchio dall’altra ti disegnerà un cerchio».
- «Perché i segmenti isometrici sono collegati fra loro, di conseguenza se allarghi i due punti sull’asse, il puntatore e il tracciatore si avvicinano isometricamente all’asse. Il centro del rombo rimane sempre il medesimo».

L’attività con i pantografi è terminata con la raccolta dei protocolli degli alunni e la distribuzione del materiale per la costruzione di un rombo articolato, con la consegna di assemblarlo per la volta successiva.

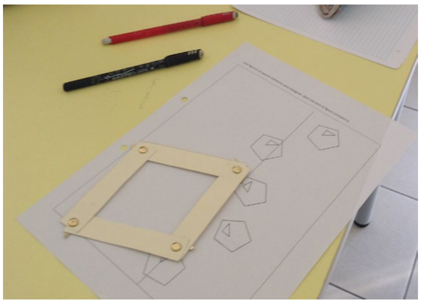


Figura 16
Rombo articolato.

5.4 Discussione attorno alla LIM

Successivamente è stato introdotto un nuovo strumento: la LIM.
Agli studenti sono stati inizialmente assegnati esercizi da svolgere con carta e matita per poi passare alla discussione collettiva dei risultati con la lavagna. Negli esercizi assegnati, si trattava di verificare se una retta data è asse di simmetria per la figura proposta a meno di traslazioni. Le schede proposte inizialmente erano ancora di tipo esplorativo.

Nei file, predisposti per la fase di confronto alla lavagna, compariva la *barra di navigazione* e le figure erano state importate come immagini.

Figura 17
Consegna: Trova il gatto simmetrico.

Alcuni elementi (nell'esempio il gatto a sinistra dell'asse e l'asse, nella **figura 17**) erano fissati, altri potevano essere spostati dagli studenti. Era possibile anche disegnare con la penna della LIM alternando le due funzioni: schermo touch del computer e lavagna. Gli studenti anticipavano le posizioni sulla lavagna e il software permetteva la verifica. Il gatto a destra doveva essere posizionato dall'alunno e si poteva verificarne l'esattezza procedendo con la barra di navigazione. L'immagine simmetrica del gatto compariva con bassa *opacità* in modo da non coprire la proposta dell'allievo. Trova il gatto simmetrico.

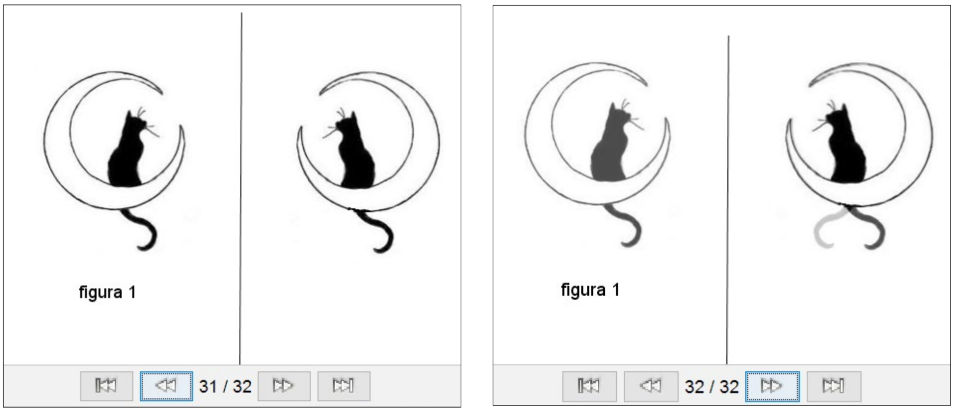


Figura 18
Esempio di verifica col software della congettura.

In questa fase si fa riferimento ancora alla percezione globale, ma gli esercizi iniziano a sottolineare alcune caratteristiche della simmetria assiale: coppie di punti corrispondenti di due figure simmetriche devono avere la stessa distanza dall'asse e devono essere sulla stessa perpendicolare all'asse.

Figura 19
Protocollo di un'allieva relativo alla consegna: Individua il solo albero simmetrico.

Gli esercizi hanno avuto una valenza ludica, i ragazzi si sono appassionati e discutevano in modo animato (**Figura 19**, ricerca dell'albero simmetrico).

Per favorire la genesi strumentale della macchina "simmetria assiale", che gli studenti avevano visto in azione, è stato utilizzato un file di esplorazione dal nome *la mosca*.

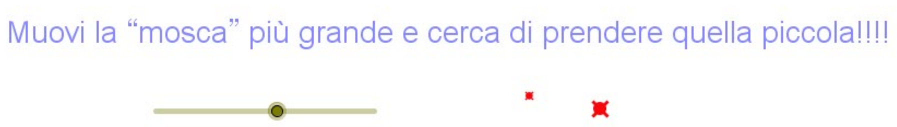


Figura 20
Immagine dello schermo del file "mosche".

All'apertura del file compaiono due punti e uno *slider.* Il punto di dimensione maggiore ha due gradi di libertà mentre il punto più piccolo è il suo simmetrico. L'asse di simmetria è nascosto. Agli alunni è stato poi chiesto di muovere, a turno, il punto mosca nel piano e osservare i movimenti del simmetrico, per il quale era stato attivato il comando

Traccia, con lo scopo di raggiungere la mosca piccola. Lo *slider* serve all'insegnante per modificare la posizione dell'asse nel piano.

Figura 21
Immagine dello schermo del file "mosche".

Lo strumento *Traccia* è attivo su entrambi i punti. Gli studenti avevano due ruoli: lo studente che a turno andava alla lavagna interagiva con la LIM e gli altri che erano spettatori, suggerivano movimenti e scambiavano osservazioni col compagno alla lavagna.

Figura 22
Immagine dello schermo del file "mosche".
Si veda il video La mosca.

La LIM è stata utilizzata come "spazio d'azione" e la configurazione, molto libera, è stata coinvolgente per gli studenti. Si è reso necessario lasciare loro il tempo anche di provare a turno, per consentire che si esaurisse l'entusiasmo dovuto alle figure multicolore (gli alunni coinvolti nella ricerca conoscevano il software e lo hanno utilizzato in aula informatica, quindi inizialmente volevano sapere come avrebbero potuto riprodurre l'effetto). Dopo poche sequenze hanno individuato l'asse in corrispondenza dei punti in cui le *mosche* si sono incontrate. Nella fase successiva si è mostrato l'asse: gli alunni hanno riprodotto i movimenti di puntatore e tracciatore muovendo il punto *mosca* per osservare le posizioni reciproche.

Un'alunna, nel ruolo di spettatrice, ha domandato: «Ma allora il punto può passare dall'altra parte?». Più che una domanda è apparsa un'idea da sottoporre all'opinione del gruppo, che l'ha condivisa con differenti gradi di consapevolezza.

Il software ha favorito l’approccio dinamico allo studio della simmetria e la LIM ha permesso di sperimentare nuove configurazioni. Gli studenti hanno ritrovato i movimenti sperimentati con i pantografi, ma hanno potuto scoprire qualcosa di nuovo: la simmetria assiale è una trasformazione del piano e non c’è un semipiano privilegiato. Il lavoro di gruppo ha poi lasciato spazio a una fase con carta e matita in cui sono stati proposti svariati esercizi come per esempio:

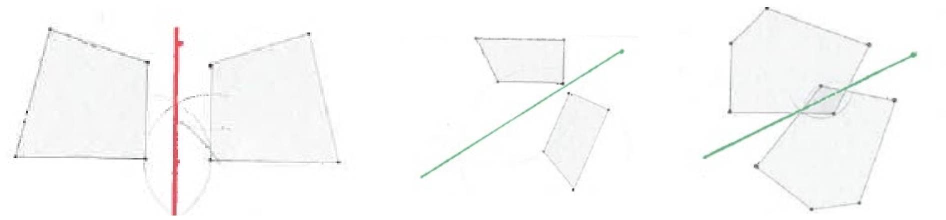
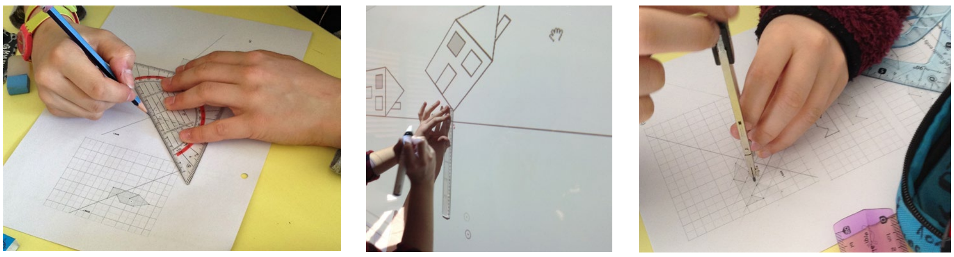


Figura 23
Consegna: Disegna l’asse di simmetria.

Dall’analisi dei protocolli e dall’osservazione in classe, si è evidenziato che alcuni alunni stavano mettendo in atto strategie soggettive, come l’utilizzo di strumenti a loro familiari (**Figura 24**), o di strumenti introdotti nel corso della ricerca (**Figura 6**): si è assistito ad evidenti segnali di un’evoluzione dell’idea di simmetria attraverso l’esplicitazione degli schemi di utilizzo personali (*strumentazione*).



a) b) c)

Figura 24
Immagini di alunni nello svolgimento di esercizi.

Nella terza sequenza di esercizi proposti era necessario modificare le posizioni dell’asse e introdurre figure attraversate dall’asse di simmetria. In questo caso i file proposti per la validazione con la LIM riportavano gli stessi soggetti, ma non riproducevano la stessa situazione, ma situazioni modificabili, quindi più dinamiche. Nelle figure seguenti sono riportati alcuni esempi dei protocolli cartacei.

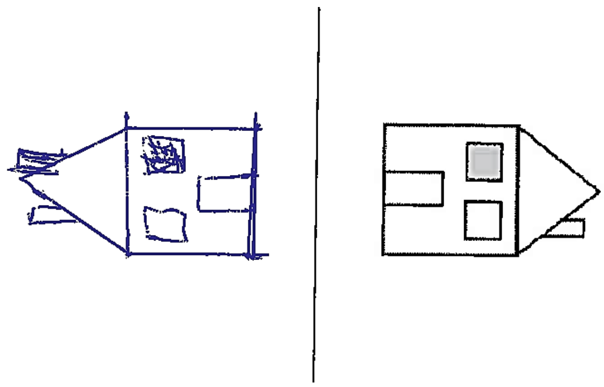
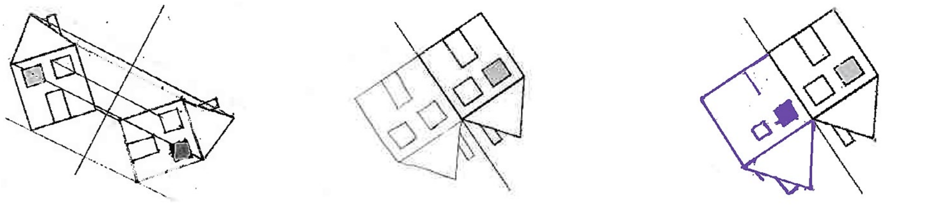


Figura 25
Consegna: Traccia la casetta simmetrica.

Alla figura sono stati aggiunti piccoli particolari per spostare l'attenzione dell'alunno dalla percezione globale al punto. Nella **Figura 25** è ben visibile la difficoltà di posizionare il camino della casetta. La stessa difficoltà si ritrova in altri casi anche più complessi come in **Figura 26**.



a) b) c)

Figura 26
Disegni di alunni: casette simmetriche.

Negli esercizi conclusivi è stato richiesto di esplicitare la strategia utilizzata: di seguito alcuni esercizi svolti dagli alunni.

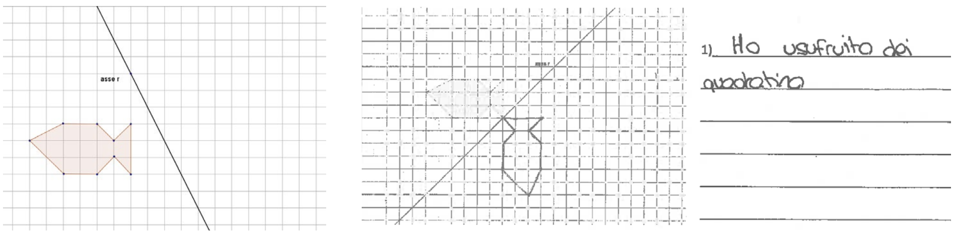


Figura 27a
Protocollo di un allievo relativo alla consegna: Trova il pesce simmetrico! Descrivi il metodo da te utilizzato per ogni figura.

Nell'esempio di **Figura 27a** e **27b** l'asse e alcuni lati del "pesciolino" non seguono le diagonali dei quadretti, ma la figura coincide con l'asse in un punto e la strategia ben nota agli studenti dalle scuole elementari risulta ancora efficace. Questa procedura, comune a tutti, in alcuni casi però conduce a conclusioni errate:

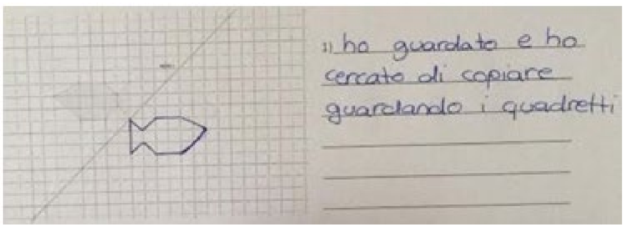


Figura 27b
Protocollo di un allievo relativo alla consegna: Trova il pesce simmetrico! Descrivi il metodo da te utilizzato per ogni figura.

Un'altra alunna scrive: «penso che sia uno specchio e quindi, poiché la pinna del pesce è la parte più bassa e tocca la linea di simmetria dall'altra parte, la parte più in alto della pinna tocca la linea di simmetria». Alcuni alunni ricorrono alla piegatura del foglio: «ho piegato il foglio per capire esattamente dove tracciare le linee del pesce». In **Figura 27c** è riportato un esercizio di una alunna in cui è evidente un primo tentativo poi abbandonato, inoltre compare un testo cancellato che fa pensare a un ripensamento.

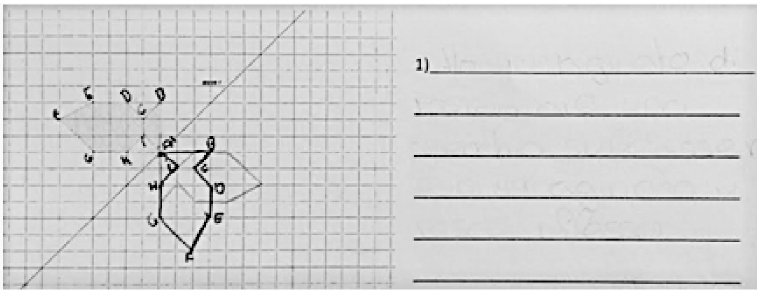


Figura 27c
Protocollo di un allievo relativo alla consegna: Trova il pesce simmetrico! Descrivi il metodo da te utilizzato per ogni figura.

Il testo scritto dall'allieva era: «ho immaginato di posizionare uno specchio sull'asse r e ho immaginato il pesce riflesso». La procedura a specchio non era risultata efficace.

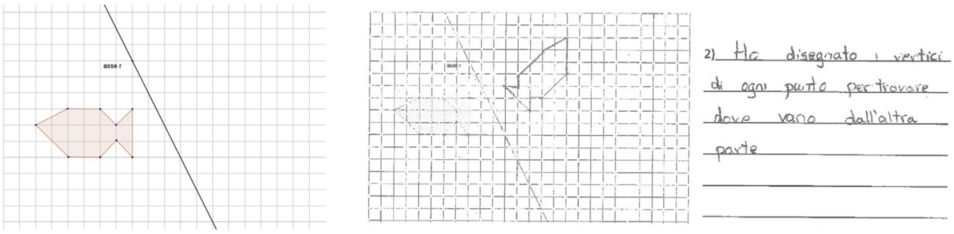


Figura 28
Protocollo di un allievo relativo alla consegna: Trova il pesce simmetrico! Descrivi il metodo da te utilizzato per ogni figura.

In **Figura 28** il "pesciolino" non tocca l'asse e si legge nel commento dell'allievo l'esigenza di tracciare prima i punti simmetrici dei vertici.

Figura 29
Protocollo di un allievo relativo alla consegna: Trova il pesce simmetrico! Descrivi il metodo da te utilizzato per ogni figura.

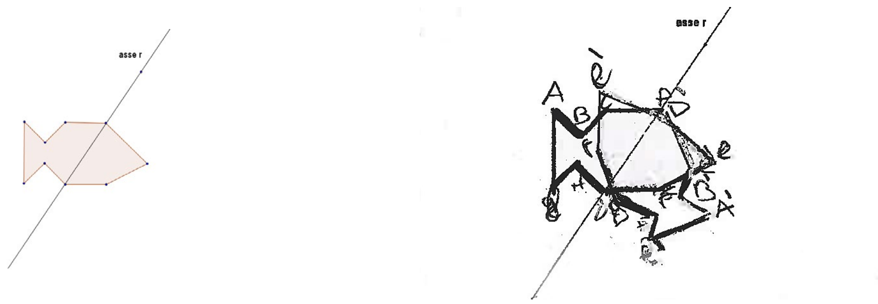


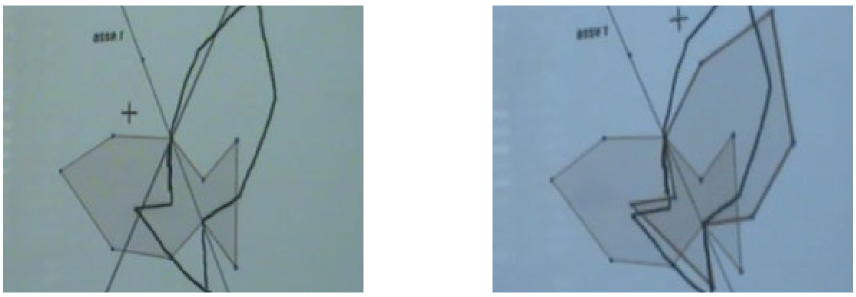
Figura 30
Protocollo di un allievo relativo alla consegna: Trova il pesce simmetrico! Descrivi il metodo da te utilizzato per ogni figura.

L'alunna che ha realizzato queste trasformazioni, e altri che hanno seguito procedure simili, non ha però scritto la metodologia utilizzata come invece aveva fatto nel caso dei quadretti.

Viste le notevoli difficoltà emerse nel lavoro su carta, gli studenti che avevano acquisito sicurezza sono stati invitati a mostrare i gesti delle loro costruzioni alla lavagna (**Figura 31** e **Figura 32**). A partire da figure simili a quelle proposte, l'insegnante modificava le configurazioni, mostrando o meno lo sfondo a quadretti e facendo lavorare gli studenti con la penna. Il "pesciolino" è costruito con lo strumento *Poligono* e quindi era possibile far tracciare dal software il pesciolino simmetrico per la validazione.

a) b)

Figura 31
Immagini dei gesti di una alunna alla LIM.



c) d)

Figura 32
Fasi della validazione della costruzione.

5.5 Verifica

Nella verifica sono stati proposti esercizi in ordine crescente di difficoltà: agli studenti era richiesto di individuare la figura simmetrica di una data rispetto ad un asse, oppure di individuare l'asse di simmetria date due figure. Gli studenti potevano utilizzare gli strumenti e le strategie che avevano scelto per le attività in classe (**Figura 27a** e **Figura 27c**). Si riportano esempi per ogni tipologia di esercizi, i risultati e alcune immagini. Gli alunni erano tutti presenti alla verifica.

Figure con asse di simmetria che segue i quadretti (1).
La figura scelta nella prima richiesta della verifica ricordava quella dell'ultima esercitazione con la LIM, ma aveva in più alcuni elementi per verificare la percezione puntuale,

che rappresenta uno degli obiettivi dell'esperienza. Questo esercizio è stato risolto correttamente da 17 alunni su 18.

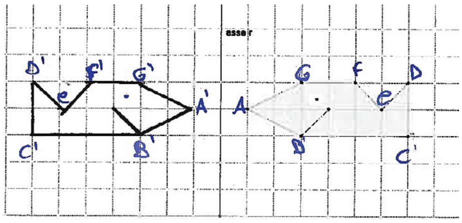


Figura 33
Figura tracciata da un alunno: l'asse segue i quadretti.

Figure con asse di simmetria che segue i quadretti (2).
In due casi la figura è stata traslata, sedici sono invece le soluzioni corrette.

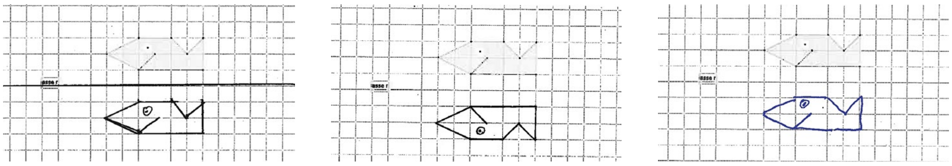


Figura 34
Figure tracciate dagli alunni: l'asse segue i quadretti.

L'asse non attraversa la figura, su foglio a quadretti.
Alcuni studenti hanno utilizzato la strategia condivisa nelle ultime lezioni e sono partiti dai vertici: nei loro elaborati compaiono infatti i nomi dei vertici e in alcuni casi i segmenti che congiungono i due punti simmetrici. Due alunni risolvono i primi esercizi servendosi dei quadretti e decidono di utilizzare una strategia puntuale solo quando i quadretti non sono più d'aiuto.

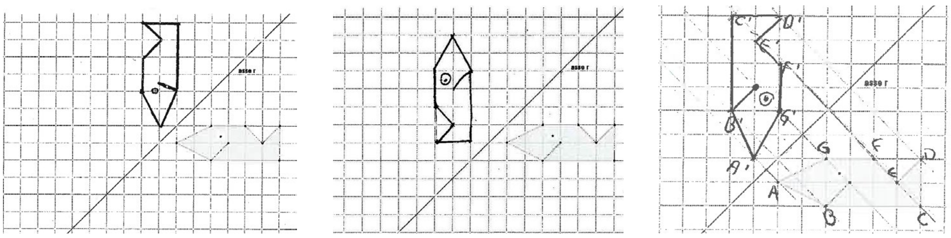


Figura 35
Figure tracciate dagli alunni: l'asse, esterno alla figura, segue la diagonale dei quadretti.

L'asse attraversa la figura su foglio a quadretti.
Due studenti sbagliano la trasformazione e tre non fornisco un tentativo di soluzione, gli altri risolvono correttamente.

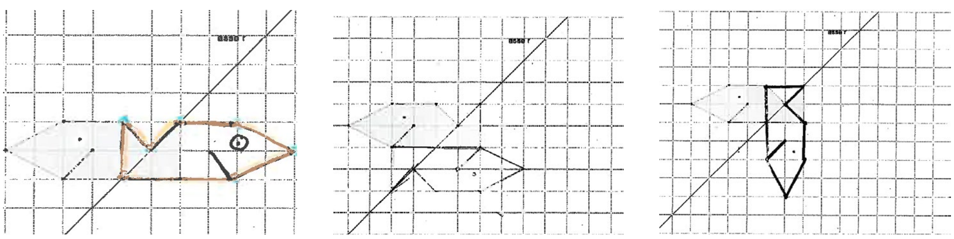


Figura 36
Figure tracciate dagli alunni: l'asse attraversa la figura e segue la diagonale dei quadretti.

Esercizio su foglio bianco.

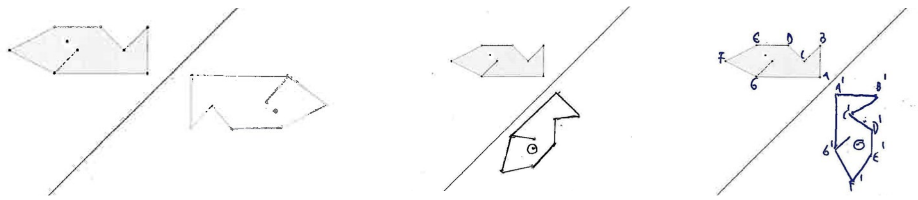


Figura 37
Figure tracciate da allievi su foglio bianco.

Le risposte corrette sono state 14, inoltre l'osservazione dell'elaborato di un alunno, mostra come abbia tentato una strategia per punti senza riuscire però a portare a termine la costruzione del simmetrico (Figura 38).

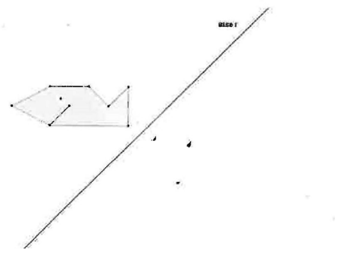


Figura 38
Tentativo di un alunno di tracciare la figura simmetrica a partire dai vertici.

Esercizio su foglio bianco, con figura attraversata dall'asse.
Questo esercizio ha avuto solo cinque risultati positivi e cinque tentativi errati. Ben otto studenti non hanno tentato la soluzione.

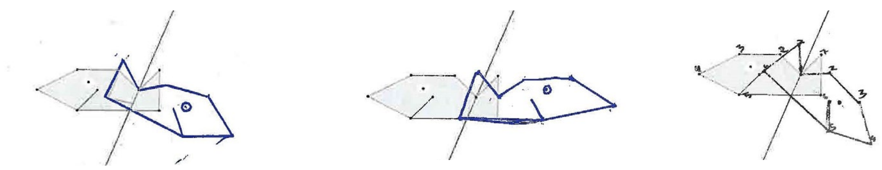


Figura 39
Simmetria assiale su foglio bianco.

Disegnare l'asse di simmetria di una configurazione di due figure.
In questo esercizio tutti gli studenti hanno tentato la soluzione e in quattordici hanno disegnato correttamente l'asse di simmetria di una configurazione assegnata.

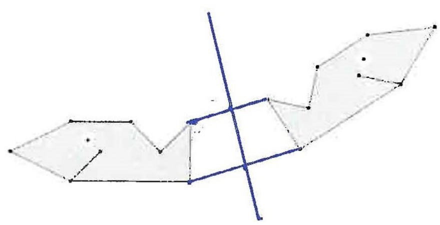


Figura 40
Asse di simmetria disegnato da un alunno.

Un altro esercizio prevedeva diverse configurazioni in cui occorreva distinguere fra quelle simmetriche e quelle che non lo erano: 14 alunni hanno risposto correttamente per tutte le configurazioni e un solo alunno non ha svolto l'esercizio.

Disegnare una figura simmetrica ad una data a partire dall'immagine di uno dei vertici.

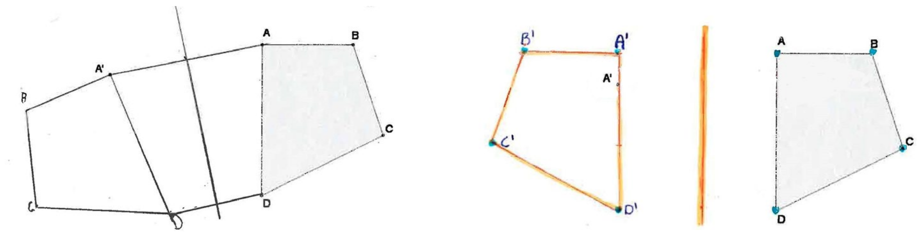


Figura 41
Soluzioni proposte da alcuni alunni.

L'ultimo esercizio è stato risolto correttamente solo da quattro studenti, mentre sette allievi hanno fornito tentativi solo parzialmente corretti. Tre alunni non hanno provato a risolverlo, mentre quattro studenti non hanno individuato la strategia adeguata.

6 Risposte alle domande di ricerca

L'artefatto e le attività proposte hanno suscitato interesse e favorito il confronto fra gli studenti. La situazione fornita, adattandosi ai diversi stili cognitivi, ha coinvolto gli studenti in tutte le sue fasi.

Inizialmente il pantografo ha suscitato curiosità e le congetture degli studenti sono state facilmente verificabili manipolando la macchina. In tutte le fasi del lavoro con il pantografo sono state inoltre stimolate l'argomentazione e l'interpretazione dei procedimenti e dei risultati. È in questa prima fase che la percezione globale di simmetria è emersa *(Cosa fa la macchina?, Perché lo fa?)*, poiché gli studenti hanno posto l'attenzione sulla figura (globale) e non sui suoi punti (puntuale). La dinamicità della macchina è risultata subito limitata ed è stato utile e necessario affiancare le potenzialità di un software di geometria dinamica per verificare tutte le congetture emerse dalla classe nella fase di esplorazione.

L'uso integrato di un software di geometria, che permette di variare dinamicamente le posizioni dell'asse di simmetria, e della LIM, hanno consentito una verifica immediata delle loro anticipazioni, consentendo di mettere in evidenza l'inefficacia della procedura percettiva per disegnare la figura simmetrica di una assegnata rispetto ad un asse e la necessità di costruire nuove strategie. L'orchestrazione strumentale ha permesso di favorire l'idea di trasformazione geometrica come corrispondenza biunivoca tra punti del piano.

La funzione *Traccia di Geogebra* ha aggiunto nuove rappresentazioni del concetto, mettendo in evidenza gli aspetti puntuali della trasformazione.

La discussione matematica è avvenuta, nella fase conclusiva, intorno alla LIM: gli alunni hanno potuto alternarsi alla lavagna interattiva per realizzare esercizi di anticipazione, esplorazione e scoperta nell'ambito della ricerca del simmetrico di un punto rispetto a un asse.

7 Conclusioni

Considerando la natura della classe e la presenza di due alunni con disturbi specifici dell'apprendimento, le attività svolte sono state complessivamente coinvolgenti e adatte ai diversi stili cognitivi. L'attività, infatti, caratterizzata da una forte componente visiva, ha messo in evidenza abilità geometriche che in alcuni alunni prevalgono rispetto alle abilità analitiche (Krutetskii, 1976, citato in Bartolini Bussi & Maschietto, 2007) ridando fiducia a ragazzi spesso demoralizzati dalle loro difficoltà. Questi alunni sono stati in grado di argomentare le proprie scelte senza timore e il confronto si è sempre svolto in modo sereno.

La macchina matematica proposta, pur avendo molti limiti fisici, è stata per tutti gli studenti una esperienza reale alla quale far riferimento nel corso dello svolgimento delle attività di laboratorio. Tutti gli allievi, incuriositi, hanno esplorato il pantografo e sono rimasti colpiti dal rombo articolato e dai suoi movimenti. In poco tempo sono stati in grado di riconoscere che l'artefatto proposto disegnava figure simmetriche. Nel ricercare le proprietà meccaniche del pantografo che permettono di realizzare figure simmetriche, più studenti hanno individuato nel centro del rombo il punto chiave per la simmetria. Il *centro del rombo* è l'ideale punto d'incontro delle diagonali del rombo, esso non compare nella macchina poiché solo una delle due diagonali, quella che coincide con la scanalatura, è visibile, ma ciò nonostante è diventato per gli studenti un segno al quale fare riferimento anche nella fase successiva. La macchina è quindi stata arricchita dalle esperienze e dai gesti degli alunni; il rombo articolato, racchiude il concetto di ortogonalità che è necessario per arrivare a una corretta concettualizzazione della simmetria assiale, ed è divenuto una rappresentazione alla quale far riferimento anche in assenza della macchina.

Per passare a esercizi più complessi, non riproducibili col pantografo, sono stati introdotti esercizi realizzati con *Geogebra* e progettati per essere svolti con la LIM utilizzata come touch-screen.

Le attività svolte con la LIM hanno consentito un'esplorazione delle configurazioni priva di imperfezioni e più veloce. Ogni esercizio è stato un po' un gioco e un po' una sfida. Le congetture degli studenti sono state messe alla prova, le conoscenze sono state socializzate e si sono costruiti significati condivisi.

La LIM ha consentito di coinvolgere tutti, anche gli alunni in difficoltà con il pantografo. Le idee degli studenti sono state rapidamente verificate e le configurazioni modificate seguendo anche i ritmi della classe. La discussione matematica ne ha tratto un notevole vantaggio per la continua condivisione fra compagni e insegnante.

La funzione *Traccia*, tipica del software, è stata fondamentale per incrementare ulteriormente l'utilizzo della LIM come spazio d'azione e richiamare, nella seconda fase della ricerca, gli schemi d'uso dell'attività col pantografo.

Il gioco delle *mosche che si rincorrono* è stato un valido momento di conflitto cognitivo: si è passati dalla costruzione di figure simmetriche alla determinazione del simmetrico di un punto. L'esternazione spontanea di un'alunna «Ma allora il punto può passare dall'altra parte?» ha posto per la prima volta veramente l'attenzione del gruppo su un punto e non più su un'intera figura contenuta in uno dei due semipiani.

Gli studenti hanno sentito la necessità di modificare la propria concezione di simmetria: la lavagna non si può piegare e non c'è un semipiano privilegiato come quando si fa riferimento allo specchio (da una parte abbiamo l'oggetto, dall'altra solamente la sua immagine); le due mosche si possono scambiare i ruoli e si incontrano solo sull'asse. L'esercizio proposto era stato studiato proprio per accompagnare al superamento dell'ostacolo.

In precedenti sperimentazioni (Bettini, Facchetti & Maschietto, 2012) era stata realizzata alla lavagna tradizionale un'attività simile a quelle delle *mosche*: con il gesso si tracciava una traiettoria e un alunno doveva disegnare la traiettoria simmetrica rispetto ad una retta. L'azione era la stessa, ma non c'era modo per gli studenti di verificarne la correttezza: l'attività coinvolgeva esclusivamente l'alunno alla lavagna e l'insegnante. Dall'esercizio proposto in passato non era scaturita una discussione matematica: lo strumento utilizzato era meno significativo.

L'orchestrazione non ha riguardato unicamente gli strumenti, ma anche i diversi schemi d'uso. Durante la discussione matematica seguita al gioco delle mosche gli studenti si osservavano, scambiavano significati, facevano gesti e si interrogavano sui gesti dei compagni.

La lavagna, che sia interattiva o tradizionale, non può essere considerata uno strumento matematico poiché essa, al contrario del pantografo, non è matematicamente "ricca". La LIM però, in questa sperimentazione è stata arricchita matematicamente dall'insegnante che l'ha affiancata a un software di geometria e a file appositamente progettati. La combinazione di questi tre elementi è divenuta uno strumento matematico per mediare significati relativi alla simmetria assiale e per favorire, come auspicato, il passaggio da una concezione globale ad una puntuale della simmetria.

Bibliografia

Associazione Macchine Matematiche (2017, 4 aprile). Associazione Macchine Matematiche, Modena. Disponibile in http://www.macchinematematiche.org.

Bartolini Bussi, M. G., & Maschietto, M. (2007). *Macchine matematiche: dalla storia alla scuola*. Milano: Springer.

Bartolini Bussi, M. G., & Mariotti, M. A. (2009). Mediazione semiotica nella didattica della matematica: artefatti e segni nella tradizione di Vygotskij. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 32*, 269-294.

Bettini, G., Facchetti, C., & Maschietto, M. (2012). *Costruzione di significati nel laboratorio di matematica: attività con la macchina matematica per la simmetria assiale*. In O. Robutti, & M. Mosca (a cura di). *Atti del V Convegno Nazionale di Didattica della Fisica e delle Matematica DiFiMa 2011*, pp. 193-204. Torino: Kim Williams Books.

Burton Monney, S., & Jauquier, L. (2010). *LIM Insegnare con le lavagne interattive multimediali*. Bern: Educa.ch. Disponibile in http://insegnamento.educa.ch/sites/default/files/20110126/guide_iwb_1.pdf (consultato il 15.5.2017).

ESPERIENZA DIDATTICA

D'Amore, B. (1995). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.

DECS, (2015). *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese*. Bellinzona: DECS. Disponibile in: http://www.pianodistudio.ch.

Didoni, R., & di Palma, M. T. (2009). Lavagne interattive multimediali e innovazione didattica. *Tecnologie Didattiche, 48*, 32-38.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5*(1), 37-65.

Fénichel, M., Pauvert, M., & Pfaff, N. (2004). *Donner du sens aux mathématiques*. Paris: Bordas.

Paola, D. (2003). Il laboratorio di matematica. *Atti XXIII Convegno UMI – CIIM, L'insegnante di matematica nella scuola di oggi: formazione e pratica professionali*. 150-152.

Prodi, G., & Bastianoni, A. (2003). *Scoprire la matematica: Geometria del piano*. Milano: Ghisetti e Corvi.

Rabardel, P. (1995a). *Les hommes et les technologie. Approches cognitive des instruments contemporains*. Paris : A. Colin.

Rabardel, P. (1995b). Qu'est-ce qu'un instrument? Les dossier de l'Ingénierie éducative. *CN-DP-DIE, mars 1995*, 61-65.

Salvadori, I. (2012). Cosa sappiamo circa l'efficacia della LIM nel contesto scolastico? *Form@re, 78*(12), 4-10.

Samson, G., Lefebvre, S. & Gareau, A. (2016). *L'impact de l'utilisation des tableaux numeriques interactifs sur les pratiques pedagogiques des enseignants du primaire et du secondaire*. Universite du Quebec a Trois-Rivieres.

Sinclair, N., & Kaur, H. (2011a). *Young children's under standing of reflectional symmetry in a dinamic geometry environment*, Ankara: PME.

Sinclair, N. (2011b). L'uso della geometria dinamica nella scuola primaria: un modo nuovo di vedere, pensare, parlare. In O. Robutti & M. Mosca (a cura di). *Atti del V Convegno Nazionale di Didattica della Fisica e delle Matematica DiFiMa 2011*. 67-74. Torino: Kim Williams Books.

Trouche, L. (2005). Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques : nécessité des orchestrations. *Recherches en didactique des mathématiques, 25*, 91-138.

Vygotskij, L. (1978). *Mind in Society. The Development of Higher Psychological Process*. Harvard University Press.

Weyl, H. (1952). *Symmetry.* Princeton University Press.

Allegati

1. Esercizi introduttivi.docx
2. Com'è fatta la macchina.docx
3. Cosa fa la macchina.docx
4. Video - Alunni al lavoro con il pantografo
5. Perché lo fa.docx
6. Video -Trova il gatto simmetrico
7. Video -Ricerca dell'albero simmetrico
8. Video - La mosca

Autore / Giuliana Bettini
Scuola media di Giubiasco
giuliana.bettini@edu.ti.ch

Ideazione e costruzione di giochi matematici[1]

Sara Cataldi Spinola
Scuola media Minusio

ESPERIENZA DIDATTICA

Sunto / Il progetto, basato sull'ideazione e creazione di giochi matematici, è stato proposto ad allievi di prima media ed è adattabile ai diversi cicli della scuola dell'obbligo. Esso propone una modalità di lavoro che consente da un lato di sviluppare competenze disciplinari, con particolare attenzione a quelle matematiche, e dall'altro di promuovere l'affinamento di alcune competenze trasversali, in primis la collaborazione. L'itinerario propone, inoltre, alcuni possibili strumenti di monitoraggio dell'evoluzione delle competenze trasversali considerate.

Parole chiave: giochi matematici; competenze trasversali; collaborazione; percorso multidisciplinare.

Abstract / The project, based on the design and creation of mathematical games, has been proposed to sixth grade students and is adaptable to the different cycles of compulsory education. It proposes a working method which allows on the one hand to develop disciplinary skills, with particular attention to mathematical ones, and on the other to promote the refinement of some transversal skills, primarily collaboration. The itinerary also proposes some tools for monitoring the evolution of transversal competences.

Keywords: mathematical games; transversal competences; collaboration; multidisciplinary path.

1 Introduzione

L'istinto del gioco è comune a tutti gli esseri umani, in qualsiasi tempo, e a qualsiasi contesto geografico e culturale appartengano. È un'esigenza biologica innata nell'uomo e nelle specie animali evolute: attraverso il gioco si esplorano gli oggetti e l'ambiente circostante, si sperimentano relazioni sociali e affettive, ruoli, si compete. Non è solamente un'attività spontanea, motivante e divertente. Il gioco costituisce sin dalla prima infanzia un importante fattore di sviluppo dell'individuo, offrendo l'occasione di esercitare abilità sociali, motorie, cognitive, affettive, espressive, relazionali e linguistiche. Nel tempo, numerosi autori si sono dedicati ad analizzare le caratteristiche e le funzioni del gioco nello sviluppo del bambino: tra gli studi più classici, interessanti e significativi, ricordiamo i contributi di Piaget (1955, 1972a, 1972b), Vygotskij (1981, 1990a, 1990b) e Bruner (1968, 1981, 2003).

[1] Una versione approfondita di questa sperimentazione, che evidenzia maggiormente i legami esistenti con il Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese (DECS, 2015), sarà prossimamente pubblicata sul nuovo portale didattico della Divisione scuola. Il progetto è stato infatti elaborato nell'ambito del CAS *Progettare per competenze* e più precisamente all'interno del laboratorio di formazione generale e di competenze trasversali.

Secondo Piaget (1972a), ai diversi stadi dello sviluppo psicologico corrispondono diverse tipologie di gioco. Si passa così dallo sviluppo dei primi schemi senso-motori e dall'esplorazione del proprio corpo ai primi tentativi di interagire con il mondo circostante e gli oggetti.

Con lo sviluppo della capacità rappresentativa (2-6 anni) compaiono il gioco simbolico e il gioco di ruolo, l'imitazione e l'identificazione con modelli condivisi; in particolare, il linguaggio consente di ordinare le esperienze e organizzare gli elementi della realtà (classificazione, seriazione, numerazione).

Dopo i 6-7 anni, superati i limiti della percezione, grazie all'attività rappresentativa, compaiono i giochi che comportano individuazioni di nessi causali, spaziali e temporali, e che coinvolgono operazioni matematiche.

Dopo i 12 anni si entra nella fase più avanzata dello sviluppo in cui il pensiero può operare sul piano astratto, mettendo in rapporto immagini mentali, formulando ipotesi e trovando soluzioni a problemi teorici (ragionamento induttivo e ipotetico-deduttivo). È il tempo degli enigmi, dei giochi di tattica e strategia, di investigazione e di logica.

Secondo Vygotskij (1981), è il gioco stesso a contenere intrinseche spinte verso lo sviluppo dell'individuo: nel gioco gli oggetti non influiscono sul comportamento del bambino, ma acquistano nuovi significati, diventano simboli di ciò che l'immaginazione di volta in volta decide. E l'osservanza delle regole di un gioco diventa assai più interessante e coinvolgente di quanto non sia quella delle regole della quotidianità.

Sono tanti gli studi significativi che concordano nel considerare il gioco strettamente collegato allo sviluppo dell'individuo, o meglio nel considerarlo di per sé un potente stimolo all'apprendimento. Ad esempio, secondo Bruner (1981):
– nel gioco il bambino sperimenta e ripete qualcosa che lo diverte di per sé e che lo soddisfa;
– nel gioco si possono prendere in considerazione nuovi stimoli e sperimentare nuovi modi di guardare la realtà;
– il risultato del gioco è percepito come meno importante dell'azione di giocare;
– gli ostacoli nel gioco non generano ansia, poiché non comportano fallimento in senso reale;
– l'eventuale insuccesso non è percepito come reale fallimento.

Le caratteristiche del gioco sin qui evidenziate potrebbero essere impiegate da docenti e da educatori in progetti didattici ed educativi efficaci, in contesti motivanti e divertenti, con la certezza di vedere progressi non solo nel campo dell'apprendimento disciplinare, ma anche in termini di competenze trasversali.

Nell'esperienza descritta è stata usata la forte leva motivazionale costituita dal gioco. L'attività ha consentito di sviluppare/allenare diverse competenze trasversali, fra cui in primis la collaborazione, e una serie di competenze legate alle diverse discipline coinvolte. Alcuni traguardi di apprendimento cui mira il percorso per le discipline matematica, italiano, educazione visiva e/o educazione alle arti plastiche sono visionabili nell'**Allegato 1**.

Per realizzare attività di questo genere è utile ricorrere a una modalità di lavoro per progetti, modalità che consente ai ragazzi di dare respiro al potenziale creativo personale.

L'itinerario, proposto ad una prima media durante il semestre primaverile dell'anno scolastico 2014/2015, è stato pensato per allenare e affinare alcune delle conoscenze e delle abilità matematiche acquisite dai ragazzi nel corso delle lezioni del primo semestre, mobilitando alcune competenze.

La progettazione e la creazione di un gioco rappresenta una sfida, soprattutto se quest'ultimo sarà usato anche da compagni di altre classi o da altre persone. Il processo di ideazione e sperimentazione del nuovo gioco induce necessariamente alla collaborazione. Vi è dunque una naturale motivazione intrinseca a collaborare per elaborare un prodotto finale valido, originale, curato e che duri nel tempo. In realtà, l'itinerario mobilita anche una serie di altre competenze trasversali, quali lo *sviluppo personale* (DECS, 2015, 29-31), la *comunicazione* (14-35), il *pensiero riflessivo e critico* (36-37) e il *pensiero creativo* (38-39), come mostrato di seguito:

– Sviluppo personale
  Per potere lavorare in gruppo e interagire in modo funzionale con i compagni, i ragazzi devono prima di tutto conoscere se stessi, avere fiducia nelle proprie capacità e imparare ad assumersi responsabilità.

– Comunicazione
  Sapere comunicare in modo efficace i propri punti di vista e sapere argomentare usando il registro linguistico adeguato al contesto considerato ed al destinatario sono due abilità essenziali per potere dare il proprio contributo al lavoro svolto all'interno di un gruppo. Inoltre, sapere comunicare non significa solo sapersi esprimere, ma anche sapere ascoltare, che significa lasciare parlare i compagni senza interrompere, facendo spazio nella propria mente per il pensiero degli altri, senza tentare di imporre a tutti i costi il proprio.

– Pensiero riflessivo e critico
  Nella preparazione di un gioco matematico, è necessario rivedere, in modo critico, ogni tappa del processo creativo per valutare la bontà di quanto pensato/prodotto in rapporto alle aspettative prefissate e al destinatario del prodotto.

– Pensiero creativo (ivi, pp. 38-39)
  In tutto il processo di ideazione e di realizzazione di un gioco, la fantasia e l'inventiva personale sono messe costantemente in atto.

Inoltre, il progetto proposto ben si presta a rientrare nella cornice di senso "Vivere assieme ed educazione alla cittadinanza" (DECS, 2015, 50-52), perché promuove l'autostima e atteggiamenti partecipi e propositivi, nel rispetto e nell'accettazione delle differenze e insegna a far parte di un gruppo e a riconoscere la ricchezza e l'efficacia di un'azione sinergica rispetto all'agire puramente individuale.

Il lavoro d'équipe, ossia lavorare insieme per un fine preciso e un obiettivo definito, infatti, è la modalità di lavoro più attuale e diffusa in molti ambiti lavorativi: la capacità di collaborare sarà perciò uno strumento essenziale per l'inserimento sociale e lavorativo.

Educare alla collaborazione significa promuovere e sviluppare principi e comportamenti essenziali alla convivenza nel rispetto di sè e degli altri.

2 Situazione problema

Come fare emergere negli allievi il desiderio di apprendere? Molti ricercatori, pedagogisti e studiosi delle scienze dell'educazione si sono interessati a questo problema. È importante citare il contributo di Philippe Meirieu (1997). La soluzione che lui propone è di "fare del sapere un enigma". In altre parole, Meirieu propone di mettere gli allievi in situazioni che presentino il sapere come un enigma, svelando quanto basta di questo mistero per incuriosirli e motivarli a procedere. Meirieu ha ideato delle schede per l'elaborazione di un dispositivo didattico, partendo dalla definizione di obiettivi, passando dalla formalizzazione della situazione problema, fino a considerare la valutazione.

Come suggerito anche da Philippe Perrenoud (1995), una situazione problema non è una situazione didattica qualsiasi, poiché deve porre l'allievo davanti a una serie di decisioni da prendere per raggiungere un obiettivo da lui stesso scelto o che gli è stato proposto o assegnato. Per stimolare un allievo a sviluppare delle competenze è necessario confrontarlo regolarmente con situazioni problema relativamente complesse che mobilitino diverse risorse cognitive.

La situazione problema è di fatto una situazione concreta, reale, attraverso la quale si vogliono mobilitare gli apprendimenti dei ragazzi. Essa può essere analizzata da diverse prospettive e mediante diverse risorse, permette di riflettere e di scegliere fra diverse possibili soluzioni. Gli allievi sono chiamati a lavorare in gruppo, a collaborare, a formulare ipotesi, a progettare il lavoro insieme e a documentarlo.

In questo progetto gli allievi sono invitati a ideare un gioco il cui scopo dichiarato è allenare, in modo divertente, le competenze matematiche acquisite nel corso del primo semestre. I ragazzi sono liberi di scegliere la tipologia di gioco ed i temi che desiderano sviluppare. La condizione vincolante è di lavorare in gruppo; ogni decisione va presa di comune accordo all'interno del proprio gruppo, dopo avere discusso e avere valutato i pro e i contro di ogni ipotesi di lavoro. I gruppi di lavoro sono scelti dal docente e sono eterogenei rispetto alle competenze disciplinari e sociali.

Il gioco prodotto dovrà essere testato, presentato ai compagni e documentato, al fine di essere usato da allievi di altre classi.

3 Descrizione dell'attività

In origine, il progetto è nato dal desiderio esplicitato dagli allievi di una classe di prima media di svolgere delle attività di giochi matematici. Avendo già preparato in passato le *Settimane di giochi matematici* con porte aperte anche ai genitori, e avendo quindi sperimentato l'efficacia del gioco quale forte leva motivazionale, di aggregazione sociale e quale strumento per fare emergere e sviluppare il potenziale creativo personale, si è colta la richiesta dei ragazzi, provando una nuova modalità di lavoro: fare ideare e realizzare dagli allievi, in piena libertà, dei giochi matematici basati sui contenuti matematici affrontati nel primo semestre.

Dato l'argomento e la modalità di lavoro per gruppi, l'attività si è prestata bene per osservare e migliorare la capacità di collaborazione dei ragazzi.

È stata lanciata agli allievi la seguente sfida: «Come possiamo allenare in modo divertente le competenze matematiche acquisite nel primo semestre?»

I ragazzi hanno colto con entusiasmo la sfida. Gli allievi sono stati invitati a esprimersi in merito a cosa bisogna considerare per progettare dei giochi matematici (discussione plenaria, brainstorming) ed è stato preparato insieme uno schema (**Figura 1**) dal quale emergono i seguenti punti: tipo di gioco, argomenti matematici scelti, regole, materiali, metodo di lavoro, spirito di gioco, squadre. Successivamente, il docente ha formato i gruppi di lavoro (quattro allievi per gruppo), facendo attenzione che fossero eterogenei rispetto alle competenze disciplinari e sociali.

ORGANIZZAZIONE DELL'ATTIVITÀ DIDATTICA
Tempo stimato A dipendenza della complessità dei giochi ideati dagli allievi e dalle discipline coinvolte, l'attività può durare da un trimestre a un semestre, considerando 1 ora di laboratorio settimanale più alcune ore doppie per alcune parti del progetto. L'attività è da proporre nel secondo semestre.
Spazi Aule di matematica, di italiano, di educazione alle arti plastiche o di educazione visiva e di informatica.
Materiali I materiali di lavoro dipendono dalla tipologia di giochi che scelgono di realizzare gli allievi. In particolare, bisognerà prevedere di avere a disposizione una serie di materiali di uso comune, quali fogli e cartoncini colorati di diverso formato, l'occorrente per scrivere e gli strumenti di geometria, le tempere, le forbici, la colla e quanto necessario per realizzare il gioco (materiali d'uso di arti plastiche o di educazione visiva), oltre alle schede di lezione, al quaderno degli appunti di matematica per documentare il percorso (appunti, schizzi, testi, ecc.) e al libro di testo.

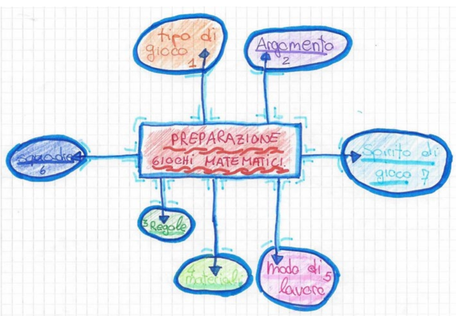
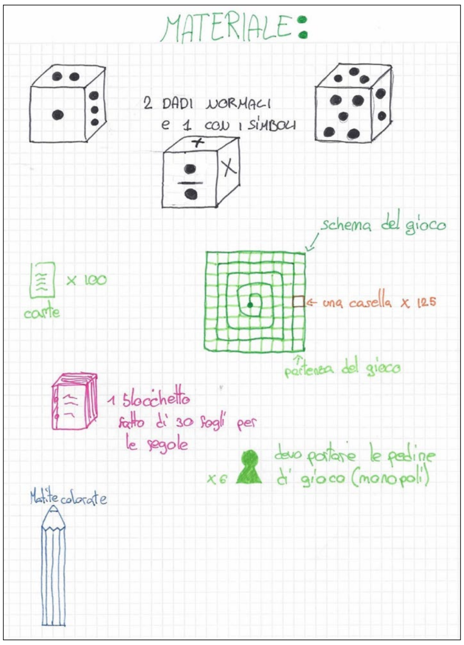


Figura 1
Lo schema condiviso nel protocollo di un allievo.

Figura 2
Un momento di lavoro di gruppo.

Ogni gruppo ha definito la sua scaletta di lavoro e nel corso degli incontri successivi, a cui è stata dedicata mediamente un'ora a settimana, l'ha gradualmente sviluppata (**Figura 2**), tenendo traccia scritta di quanto via via discusso e prodotto (es: bozze, disegni, suddivisione dei ruoli all'interno del gruppo, prodotti finali, ecc. Un esempio è disponibile nella **Figura 1**).

Come già anticipato, i contenuti matematici dei giochi sono stati scelti dai ragazzi stessi, tra quelli sviluppati nel primo semestre, tramite una ricognizione sui materiali in loro possesso (quaderno degli appunti, libro di testo, fogli di esercizi). Ciò ha contribuito a renderli più consapevoli di quanto trattato e di quanto imparato nel semestre precedente.



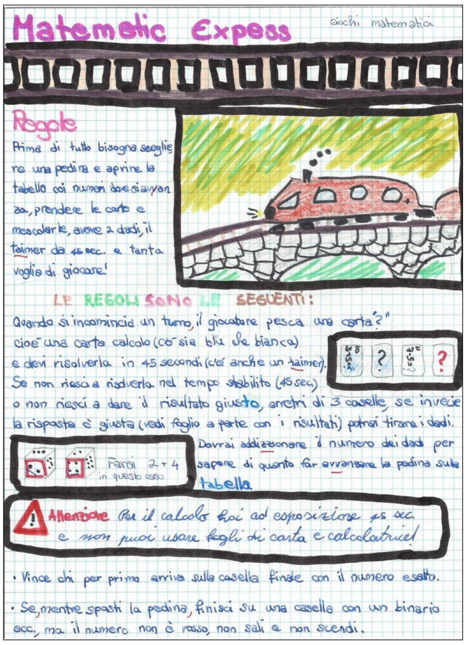


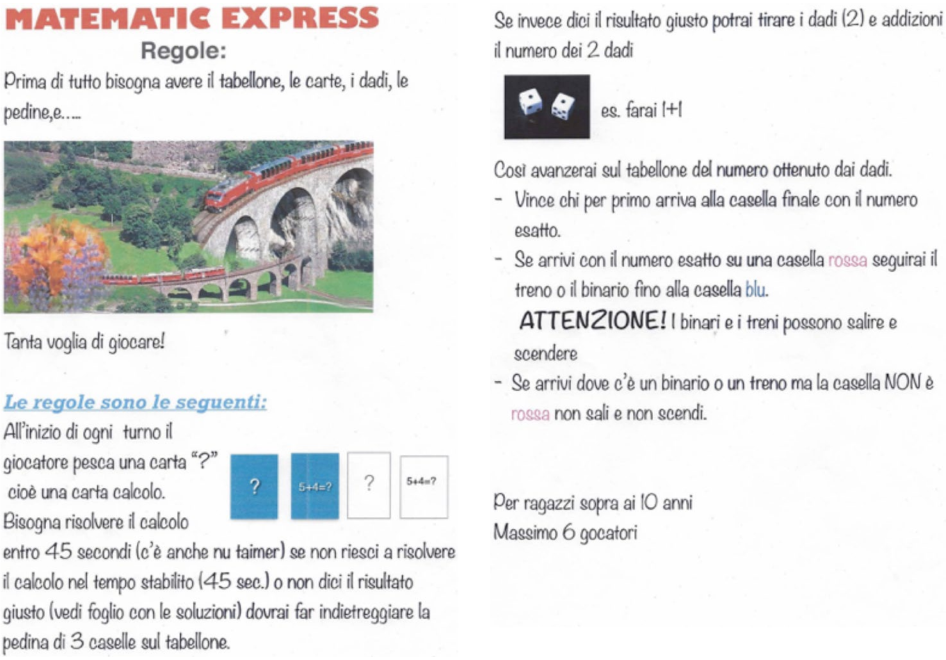
Figura 3
Bozze del materiale richiesto per il gioco "Matematic Express".

Figura 4
Bozza di una parte del descrittivo del gioco "Matematic Express" (regolamento).

Una volta pronte le prime bozze dei progetti (**Figure 3 e 4**), ogni gruppo le ha presentate alla classe per ricevere suggerimenti ed eventualmente apportare miglioramenti. La discussione in classe è stata guidata per evitare che si traducesse in critiche sterili, invece che in proposte costruttive, e gli allievi sono stati invitati a evidenziare i punti di forza, gli aspetti da chiarire e le possibili modifiche. Pertanto, questo passaggio è stato molto significativo, sia per chi ha formulato suggerimenti, sia per chi li ha ricevuti, accettandoli positivamente e integrandoli successivamente nelle progettazioni.

Dopo questa presentazione, è iniziata la costruzione vera e propria del gioco, utilizzando i materiali resi disponibili dalla scuola, così da poter mobilitare in un contesto nuovo competenze acquisite in altre discipline. In questa fase, è stata utile la collaborazione di un collega di educazione visiva.

Una volta preparati i materiali di gioco e i testi dei regolamenti, visionati e corretti dal docente di italiano, ogni gruppo ha nuovamente presentato alla classe il proprio progetto, ricevendo ancora un feedback dai compagni. In ogni gruppo ciascun allievo ha partecipato attivamente alle presentazioni, usando gli ausili che preferiva, quali la lavagna, i lucidi e altro ancora. La suddivisione dei ruoli durante la presentazione è stata decisa in autonomia da ogni gruppo. Perfezionati i materiali (**Figura 5**), sono state predisposte tante postazioni di gioco quanti erano i giochi costruiti dai vari gruppi e a turno ogni gruppo ha potuto testare i giochi ideati dai compagni.



MATEMATIC EXPRESS

Regole:

Prima di tutto bisogna avere il tabellone, le carte, i dadi, le pedine,e.....

Tanta voglia di giocare!

Le regole sono le seguenti:

All'inizio di ogni turno il giocatore pesca una carta "?" cioè una carta calcolo.

Bisogna risolvere il calcolo entro 45 secondi (c'è anche nu taimer) se non riesci a risolvere il calcolo nel tempo stabilito (45 sec.) o non dici il risultato giusto (vedi foglio con le soluzioni) dovrai far indietreggiare la pedina di 3 caselle sul tabellone.

Se invece dici il risultato giusto potrai tirare i dadi (2) e addizioni il numero dei 2 dadi

es. farai 1+1

Così avanzerai sul tabellone del numero ottenuto dai dadi.

- Vince chi per primo arriva alla casella finale con il numero esatto.
- Se arrivi con il numero esatto su una casella rossa seguirai il treno o il binario fino alla casella blu.

  ATTENZIONE! I binari e i treni possono salire e scendere
- Se arrivi dove c'è un binario o un treno ma la casella NON è rossa non sali e non scendi.

Per ragazzi sopra ai 10 anni

Massimo 6 gocatori

Figura 5
Descrittivo finale delle regole del gioco "Matematic Express" elaborato con un editor di testi.

4 Giochi prodotti e competenze mobilitate

I cinque giochi matematici realizzati sono apprezzabili, sia dal punto di vista delle competenze matematiche toccate, sia sotto l'aspetto tecnico ed estetico della loro realizzazione materiale (vedi **Allegato 5**).

Gli ambiti matematici coinvolti nella realizzazione di questi giochi sono stati principalmente tre: *Numeri e calcolo*, *Geometria* e *Grandezze e misure*. L'ambito matematico privilegiato, presente in tutti e cinque i giochi, è stato *Numeri e calcolo*, poiché i giochi ideati ben si prestavano ad affinare il calcolo aritmetico e il calcolo mentale. Anche gli ambiti *Geometria* e *Grandezze e misure*, fra loro strettamente connessi, sono stati toccati. I ragazzi hanno proposto in diversi giochi dei quesiti inerenti la geometria metrica (in particolare il calcolo di lunghezze, di aree e di ampiezze), come pure hanno formulato domande riguardanti le grandezze e la conversione fra misure espresse rispetto a diverse unità.

Dal punto di vista della costruzione del gioco e delle sue regole, tre giochi su cinque sono ispirati al tradizionale "Gioco dell'oca", ma si differenziano da quest'ultimo per i contenuti matematici dei quesiti proposti; quesiti ai quali è necessario dare risposta corretta per avanzare nel percorso. Tutti i giochi presentano anche una serie di trappole. In uno di questi, "Avventura sul vulcano", le caselle si articolano su un percorso posizionato su una struttura tridimensionale rappresentante un vulcano; in un altro, "Gioco dell'oca con gli occhiali", le carte con i quesiti sono classificate in carte speciali e in carte facili, medie e difficili, secondo un grado di difficoltà delle loro domande stabilito dagli allievi; nell'ultimo, "Matematic Express", si ha un tempo massimo, scandito da un timer, per rispondere ai quesiti.

Un quarto gioco, "Il labirinto", ha la struttura di un labirinto e per certi aspetti si ispira a giochi di ruolo; in questo gioco non servono dadi per avanzare, ma solo carte alle quali rispondere correttamente ai quesiti matematici proposti, in al massimo 30 secondi scanditi da un timer, e sul percorso c'è una serie di trappole che possono portare anche a veri e propri "duelli matematici".

L'ultimo gioco, "Tesoro nascosto", si differenzia dai precedenti, in quanto non sembra ispirarsi ai tradizionali giochi da tavola. Esso è costituito da una grata nella quale sono inseriti 96 cubetti; al di sotto di alcuni cubetti vi è un tesoro nascosto che è accessibile unicamente rispondendo correttamente ai quesiti matematici proposti. In questo gioco, oltre alle competenze matematiche, si allenano anche altre abilità, quali la memorizzazione dei quesiti già risolti e della posizione dei rispettivi cubetti all'interno della grata. Una descrizione più dettagliata dei cinque giochi è presente nell'Allegato 5.

5 Risultati e feedback degli allievi

All'inizio del progetto, collaborare all'interno del proprio gruppo di lavoro e prendere delle decisioni di comune accordo non è stato semplice per tutti gli allievi.
La capacità di collaborare si è affinata via via, in corso d'opera, sia perché i ragazzi diventavano man mano più consapevoli delle difficoltà e della necessità di modificare alcuni comportamenti per favorire una più facile realizzazione del prodotto finale, per il raggiungimento del quale erano molto motivati, sia perché l'insegnante è intervenuta a mediare nei momenti di difficoltà, focalizzando spesso l'attenzione dei ragazzi sui comportamenti più o meno efficaci per ottimizzare il lavoro comune.
I ragazzi, a più riprese, sono stati invitati a scrivere le loro riflessioni sul lavoro in corso seguendo una traccia predisposta (esempi di domande: «Come ti senti a lavorare in gruppo?», «Quali sono i tuoi punti di forza e quali quelli da migliorare?», «Quali sono i punti di forza del tuo gruppo e quali quelli da migliorare?», «Vi sono stati problemi all'interno del gruppo? Se sì, quali?», «Cosa potresti fare tu e cosa i tuoi compagni per migliorare il lavoro all'interno del gruppo?»). Qui di seguito sono riportati alcuni estratti degli scritti dei ragazzi:

> «All'inizio era un casino totale. Io sono in gruppo con S., e all'inizio eravamo così scoordinati che dopo un'ora eravamo ancora al punto iniziale.»

> «Adesso che ci penso, la cosa che mi è piaciuta di più dei giochi matematici è stato scrivere la riflessione, che mi ha permesso di guardare meglio quello che abbiamo fatto. Ora manca una sola cosa da fare, per cui ci siamo impegnati fino all'ultimo: giocare!»

> «All'inizio avevamo idee un po' diverse, ma poi, piano piano, abbiamo cominciato ad avere un'idea precisa. Io e M. eravamo quelli che lavoravamo di più, J.

> meno di tutti. J. magari faceva poco perché facevo quasi tutto io e non la lasciavo fare. Io sono fatta così, cercherò di migliorare.»

> «Quando la maestra ha letto i gruppi e ho sentito che ero da sola con tre maschi, ho detto che noia, proprio io da sola con tre maschi. Però alla fine è stato abbastanza bello stare con loro, a parte quando facevano gli schifosi. È stato divertente, ho imparato a stare da sola con i maschi, prima mi preoccupava stare da sola con loro perché sono un po' timida. Io all'inizio non collaboravo molto, però dopo un po' ho incominciato a collaborare. N. e M. non ci facevano fare quasi niente, poi abbiamo trovato il sistema per collaborare tutti insieme e il nostro gioco è riuscito bene, secondo me. Sono contenta e soddisfatta di questa esperienza.»

> «L'attività mi è piaciuta, perché era divertente lavorare in gruppo, era un tema interessante, c'era lavoro pratico e la cosa più bella era: dopo tante ore di lavoro finalmente abbiamo provato il nostro gioco.»

> «Il gioco mi è piaciuto, sia l'invenzione che la costruzione… tutto mi è piaciuto.»

> «… era molto divertente e bello lavorare a gruppi e costruire dei giochi che comunque sono utili per la materia.»

> «Secondo me, questi giochi sono serviti sia per il gruppo, sia per la matematica; per il gruppo perché abbiamo dovuto mettere insieme le nostre idee e trovarne una in comune per tutti, per la matematica per le carte che ci hanno impegnato nella riflessione dei calcoli.»

> «Secondo me, l'attività si potrebbe riproporre, è una cosa in cui fai matematica ma non ti accorgi, perché non è come fare teoria e ricevere schede. È una matematica un po' diversa da quella di sempre, e secondo me agli allievi piace molto.»

Dagli scritti si evince che il progetto, partendo dalla situazione problema proposta, ha permesso di mobilitare e sviluppare competenze di diversa natura, sociali e matematiche. L'attività ha coinvolto gli allievi e tutti hanno partecipato con grande entusiasmo e impegno, mostrando grande soddisfazione nel lavoro. Sicuramente hanno lavorato molto sulle competenze matematiche divertendosi.

A distanza di due anni, il ricordo dei giochi matematici è ancora vivo. Sapere che questi sono ben custoditi e che sono stati anche mostrati a docenti di altre scuole nel corso di una giornata di formazione, ha reso i ragazzi ancora più orgogliosi delle loro produzioni. In un momento di scambio hanno ricordato alcuni aneddoti legati alla produzione dei giochi, concentrandosi sugli aspetti di criticità del percorso. Li riportiamo di seguito.

Discussioni iniziali all'interno del gruppo per decidere a quale gioco ispirarsi e quale titolo dare al proprio progetto:

> «Con il mio gruppo avevamo tutti la stessa idea di fare il gioco dell'oca con qualche modifica. Per il nome ci sono stati un po' di problemi, perché una persona diceva un nome, un'altra un nome diverso. Poi avevamo proposto il gioco dell'oca con gli occhiali, ma io ero contraria e poi abbiamo fatto la votazione e alla fine ho ceduto.»

«Il gioco era, appunto, il gioco dell'oca con ovviamente diversi cambiamenti per renderlo il nostro gioco dell'oca con gli occhiali. L'abbiamo chiamato così, perché abbiamo deciso di utilizzare quel luogo comune che dice "Chi è intelligente porta gli occhiali."»

«Io mi sono ritrovata abbastanza bene nel gruppo, però c'è stato qualche problema nello scegliere il gioco. All'inizio volevamo fare il gioco dell'oca, ma poi abbiamo pensato che quel gioco lo facevano tanti, quindi volevamo scegliere un gioco un po' speciale che è il labirinto. Un compagno, però, faceva di testa sua e non ascoltava quello che gli diceva il gruppo, ma alla fine l'abbiamo convinto a partecipare con noi e un po' ha funzionato.»

Difficoltà riscontrate talvolta nel suddividersi i lavori all'interno del gruppo:

«Quando abbiamo dovuto preparare la traccia per la presentazione, io mi sono offerta di farlo e invece S. dice "Faccio io" e mezz'ora dopo aveva scritto solo il titolo e mi dice "Fai tu". Io gli ho risposto "Hai fatto una scelta e adesso ti impegni a mantenere la parola data"… La seconda parte è andata meglio, e poi siamo riusciti a suddividerci i compiti.»

«Dopo esserci accordati su cosa fare nel gioco, ci siamo suddivisi il lavoro in modo non esattamente equo. D. ha tagliato e misurato i foglietti (le carte) su cui io e S. abbiamo scritto i calcoli: le Facili, le Medie, le Difficili e le Speciali. Che fatica! Tra inventarle e ricopiarle a bella! Alla fine io e S. eravamo distrutte!»

«Ad un certo punto (dopo avere un'idea ben chiara per tutti) abbiamo cominciato a creare il gioco (la grata), poi abbiamo deciso i particolari: come colorare la grata, i calcoli (96), le carte obiettivo ecc. I calcoli li ho fatti io (non era facile), mentre le carte obiettivo e colorare la grata lo hanno fatto loro. I cubetti li abbiamo fatti assieme. Dimenticavo: i materiali li abbiamo decisi già dopo aver avuto l'idea. Ora l'abbiamo finito e penso che sia venuto bene. J. faceva poco perché magari facevo quasi tutto io e non la lasciavo fare.»

Difficoltà emerse durante le discussioni in gruppo:

«Il gruppo lavorava bene insieme, a parte certe situazioni in cui io, S. e S. eravamo d'accordo su un fatto, ma A. era testarda e cominciava a discutere. Credo che io e S. abbiamo discusso troppo per niente, visto che il gioco è uscito bene lo stesso.»

Difficoltà nella costruzione delle diverse parti del gioco:

«Abbiamo fatto un vulcano in 3D. Durante il lavoro andava tutto bene a parte quando S. inizia a prendere le cose e a metterle nel posto sbagliato, però dopo ha rimediato. All'inizio abbiamo pitturato il vulcano e la piattaforma e poi abbiamo incollato il vulcano sulla piattaforma. Col taglierino abbiamo fatto dei taglietti sul vulcano per metterci gli scalini. Abbiamo fatto delle palline e le abbiamo colorate e attaccate alla piattaforma. Dopo io e M. abbiamo fatto le carte: 45 Bonus e 55 Calcolo. A me è piaciuto costruire il vulcano, colorarlo, tagliare il vulcano per attaccare gli scalini e fare le carte. Alcune cose non mi sono piaciute, perché

M. comandava troppo, poi una volta fatta la cosa lui si arrabbia … e quando abbiamo detto a S. di andare giù a prendere il materiale, lei diceva di no, perché si vergognava di andare giù.»

«Per il gioco dovevamo fare le carte e M. e N. si sono proposti per farle. Quando M. aveva già fatto 25 carte, N. non ne aveva neanche fatta una, poi M. gli ha chiesto se le aveva fatte e lui ha risposto di no e M. si è arrabbiato... Poi abbiamo trovato il sistema per collaborare tutti insieme.»

«Il nostro gioco è venuto bene, ma non è venuto come me lo aspettavo. All'inizio ognuno aveva un'idea diversa, ma alla fine tutti avevano le stesse idee. All'inizio per inventare il gioco tutti avevano idee diverse, ma dopo avere scelto un gioco e averlo leggermente progettato… poco prima della fine scopri che le regole per ognuno erano diverse… poi dopo la partita per vedere come funzionava il gioco, le regole erano uguali per tutti. Se avessimo avuto più tempo, il labirinto avrebbe avuto una prospettiva in 3D e sarebbe stato ancora più bello da giocare.»

Le difficoltà emerse nel corso della sperimentazione sono state diverse, ma ogni gruppo ha saputo trovare il sistema per superarle. I ragazzi volevano produrre dei giochi che fossero interessanti, nei calcoli e nelle strategie, oltre che esteticamente belli; questo li ha motivati parecchio nella scelta dei quesiti da proporre (i calcoli avrebbero dovuto mettere alla prova gli avversari) e nella fase di costruzione (le varie parti del gioco dovevano essere curate nei minimi dettagli). Tutti i gruppi si sono impegnati nel lavoro e la gioia è stata grande quando alla fine tutti i ragazzi hanno potuto giocare con il loro gioco e con quelli realizzati dai compagni.

Dal punto di vista del docente, quando si accoglie una richiesta degli allievi e si decide di declinarla in un percorso didattico, ad esempio attraverso un lavoro per progetti, è necessario mettersi in gioco, mostrare flessibilità, continuare a rivedere e correggere il percorso abbozzato in funzione di cosa emerge dal lavoro, delle mutevoli esigenze dei ragazzi e del progetto stesso. In una sperimentazione come questa è importante dare fiducia agli allievi; i ragazzi spesso hanno più risorse di quanto si pensi ed è necessario metterli nella condizione di utilizzarle. La creatività mostrata dai ragazzi nel prendere spunto da giochi a loro noti, nel rielaborarli ed adattarli (sia nella costruzione, sia nelle strategie di gioco) per farli diventare i loro giochi, è a nostro avviso rimarchevole.

6 Conclusioni e sviluppi futuri

La totale libertà di ideazione dei giochi lasciata agli allievi nel corso di questa sperimentazione ha permesso di evidenziare le potenzialità del progetto, sia a livello di consolidamento e sviluppo delle competenze disciplinari matematiche, sia a livello di sviluppo delle competenze sociali in genere e, in particolare, della competenza focus scelta: la collaborazione. I ragazzi hanno avuto occasione di alternare attività di progettazione con attività di realizzazione: in molte occasioni, infatti, hanno dovuto apportare delle semplificazioni necessarie al progetto iniziale. Passando per una serie di modelli progettuali successivi, il gioco è stato via via adattato ai vincoli del contesto, quali la mancanza di determinati materiali, di adeguate tecniche di assemblaggio e di luoghi più adatti al lavoro manuale. Infatti, la richiesta dei ragazzi di svolgere delle attività di gioco è arrivata ad anno scolastico già iniziato, verso la fine del primo semestre, e l'intero lavoro è stato svolto durante le lezioni di matematica del secondo semestre (mediamente un'ora di laboratorio settimanale), con un supporto da parte dei colleghi docenti di educazione visiva (fornitura dei materiali d'uso) e di italiano (visione e controllo di alcuni scritti prodotti dagli allievi).

In base alle osservazioni precedenti, il progetto di ideazione e creazione di giochi matematici saranno riproposti quest'anno in tutte le classi di prima media della nostra sede, ma con alcune varianti.

Ad esempio, i ragazzi costruiranno i giochi nel corso delle lezioni di educazione alle arti plastiche. I docenti di educazione alle arti plastiche svolgeranno durante le loro ore lezione delle attività manuali preparatorie, da loro concordate e condivise con i docenti di matematica, prima dell'inizio del progetto. Queste attività introduttive porteranno allo sviluppo di competenze necessarie per la realizzazione pratica dei giochi, competenze che consentiranno di sviluppare delle strutture tridimensionali. Queste strutture, opportunamente assemblate dagli allievi, costituiranno la parte principale del prodotto finale.

Durante le ore di matematica di laboratorio, gli allievi lavoreranno in gruppo per ideare e strutturare il gioco scelto in tutte le sue componenti: dalla scelta dei contenuti matematici che si vogliono trattare, alla struttura e alle regole di gioco. Le presentazioni ai compagni dello stato dei lavori saranno svolte durante le lezioni di matematica.

Il testo delle regole del gioco sarà redatto durante alcune ore di italiano e il prodotto finale sarà un testo scritto al computer e, possibilmente, corredato da immagini. Questa attività, infatti, ben si presta in prima media per allenare e affinare anche alcune competenze sviluppate durante il primo semestre dai corsi di alfabetizzazione informatica.

Per monitorare i progressi nella competenza trasversale della collaborazione, oltre agli scritti di riflessione degli allievi, è certamente necessario elaborare e utilizzare altri strumenti, come schede di osservazione per l'insegnante, schede strutturate di autovalutazione e di valutazione tra pari. Questi strumenti di valutazione formativa sono utili per fare acquisire ai ragazzi consapevolezza di sé, del proprio agire e per guidarli all'autocorrezione. Alcuni esempi di tabelle di autovalutazione, di valutazione tra pari e di osservazione per l'insegnante sono proposti negli Allegati 2 e 3; esse sono strutturate in modo tale da consentire, attraverso la declinazione di comportamenti specifici, di valutare, in modo il più possibile oggettivo, il grado di acquisizione o i progressi nell'acquisizione della competenza focus collaborazione. Ovviamente, queste tabelle rappresentano degli esempi e si prestano ad essere modificati e adattati alle diverse situazioni ed alle necessità di ciascun docente.

È importante che gli allievi siano consapevoli della competenza che si vuole promuovere e monitorare, e conoscano in anticipo i comportamenti che saranno oggetto di attenzione durante e alla fine del percorso. Gli allievi saranno così più consapevoli del loro modo di interagire e collaborare con gli altri e saranno più motivati a mettersi in discussione e a progredire.

Inoltre, saranno valutati anche le presentazioni degli allievi e i prodotti finali: i giochi e le documentazioni allegate. A seguito di ogni presentazione, il docente indicherà ad ogni gruppo quali sono stati i punti di forza e quali sono invece gli aspetti da migliorare. La presentazione finale sarà valutata da tutti i docenti coinvolti nel progetto. Alcuni possibili aspetti valutabili sono enunciati nell'Allegato 4. Essi sono la qualità dei testi elaborati dagli allievi (ad esempio, descrizioni del gioco, regole del gioco, disegni e immagini inserite negli scritti, ecc.), la qualità dei giochi prodotti e la cura nella loro realizzazione, che saranno valutati da tutti i docenti coinvolti nel progetto, secondo i criteri di valutazione specifici delle discipline coinvolte.

A seconda del tempo disponibile e del numero di docenti coinvolti, si può immaginare di ricorrere al *digital storytelling* per documentare il percorso di ideazione e realizzazione dei giochi. Questa attività dovrebbe essere svolta in parte nelle aule di informatica e richiederebbe l'uso di macchine fotografiche/telecamere e di software audio/video. In alternativa, si potrebbe produrre un podcast da pubblicare sul sito della propria scuola. Anche in questo caso, sarebbe richiesto l'uso di macchine fotografiche/telecamere e l'uso di software audio/video.

A fine anno scolastico, saranno organizzate alcune giornate di porte aperte per consentire ai genitori degli allievi di visionare i giochi prodotti e di testarli con mano, magari lasciandosi sfidare dai propri figli. Inoltre, anche gli allievi delle altre classi e i loro docenti potranno testare i prototipi di gioco prodotti dai compagni di prima media durante un'ora lezione, previa iscrizione a un calendario di sede.

L'esperienza condotta propone, anche per gli insegnanti, una sfida di ordine didattico: invita a programmare percorsi che al loro interno promuovano, accanto alle competenze disciplinari specifiche, anche lo sviluppo di competenze trasversali, in un contesto interdisciplinare. In questo modo, si potrebbe dare ancora più senso al proprio insegnamento. Inoltre si educherebbero gli allievi ad affrontare situazioni complesse, analizzandole da diversi punti di vista, e a utilizzare le conoscenze e le abilità sviluppate nell'ambito delle singole discipline anche in contesti differenti.

Bibliografia

Bruner, J. S., Olver, R., & Greenfield, P. (1968). *Studi sullo sviluppo cognitivo*. Roma: Armando Editore.

Bruner, J. S., Jolly, A., & Sylva, K. (1981). *Il gioco. Il gioco in un mondo di simboli (Vol. 4)*. Roma: Armando Editore.

Bruner, J. S. (2003). *La mente a più dimensioni*. Bari: Laterza.

Castoldi, M. (2011). *Progettare per competenze*. Roma: Carocci.

Meirieu, P. (1997). *Apprendre… oui, mais comment*. Paris: éd. ESF.

Piaget, J. (1955). *Il linguaggio e il pensiero del fanciullo*. Firenze: Editrice Universitaria.

Piaget, J. (1972a). *La formazione del simbolo nel bambino. Imitazione, gioco e sogno. Immagine e rappresentazione*. Firenze: La nuova Italia.

Piaget, J. (1972b). *Il giudizio morale nel fanciullo*. Firenze: Giunti-Barbera.

Perrenoud, P. (1995). Des savoirs aux compétences: les incidences sur le métier d'enseignant et sur le métier d'élève. *Pédagogie collégiale, 9*(2), 6-10.

DECS (2015). *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese*. Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport, Divisione della scuola: Bellinzona.

Vygotskij, L. S. (1981). Il ruolo del gioco nello sviluppo mentale del bambino. In J. S. Bruner, A. Jolly, & K. Sylva (a cura di), *Il gioco. Il gioco in un mondo di simboli (Vol. 4)*, Roma: Armando Editore, pp. 657-678.

Vygotskij, L. S. (1990a). *Immaginazione e creatività nell'età infantile*. Roma: Editori Riuniti.

Vygotskij, L. S. (1990b). *Pensiero e linguaggio*. Bari: Laterza.

Allegati

1. Discipline coinvolte e traguardi di apprendimento.
2. Tabella di osservazione a cura del/dei docente/docenti coinvolti nel progetto.
3. Tabella di autovalutazione e tabella di valutazione tra pari.
4. Valutazione delle presentazioni.
5. I cinque giochi realizzati.

Autore: **Sara Cataldi Spinola**
Scuola media di Minusio
sara.cataldi@edu.ti.ch

Doremat

La musica della matematica

Rachele Vagni, Denise Lentini
Gruppo di Ricerca e Sperimentazione in Didattica e Divulgazione della Matematica, Enfap

ESPERIENZA DIDATTICA

Sunto / I laboratori Doremat sono dedicati a scoprire la matematica che c'è nella musica e a suonare e ascoltare la "musica della matematica". Due scienze, solo apparentemente lontane, si uniscono in un intreccio disciplinare che vuole coinvolgere i ragazzi e renderli consapevoli del fatto che si può leggere la musica con occhi matematici.

Parole chiave: matematica; musica; motivazione; significato; cittadinanza.

Abstract / Doremat laboratories are aimed at discovering Mathematics in music and at playing and listening to the "music of Mathematics". These two branches of knowledge, just apparently distant, come together in an dialogue of disciplines. The objective is to engage students and let them experience how to read music through the eyes of Maths.

Keywords: Mathematics; music; motivation; meaning; citizenship.

1 Doremat: obiettivi educativi e aspetti didattici [1]

Doremat - La musica della matematica è un metodo di insegnamento-apprendimento della matematica attraverso la musica. Nasce da un'intuizione di Denise Lentini, dirigente di una scuola di Istruzione e Formazione Professionale, che vede nell'innovazione della didattica una risorsa per motivare i ragazzi all'apprendimento della matematica e che ha avviato una sperimentazione a partire dal 2007, coinvolgendo quasi 2000 allievi tra scuola media e scuola media superiore in tutta Italia. Tale metodo è nato per contrastare la dispersione scolastica, fenomeno spesso correlato alla demotivazione all'apprendimento e all'insuccesso scolastico. Doremat ha visto il proprio sviluppo attraverso un'attività di ricerca che ha permesso di ripercorrere e mettere in evidenza le analogie che intercorrono tra matematica e musica, compiendo un sistematico lavoro di declinazione in chiave musicale delle conoscenze e delle competenze matematiche dei curricula dalla scuola media fino alla terza classe della scuola media superiore. Ciò è stato reso possibile dalla stessa natura delle due discipline che usano simboli (pressoché) universali per esprimere dei significati e possiedono una comune matrice culturale. Da queste riflessioni, dallo studio delle analogie e delle differenze, dal successo riscontrato nell'esperienza e dal lavoro di ricerca e sperimentazione [2] è nato il metodo didattico che vede la sua naturale applicazione in ambito laboratoriale.

1. Per un approfondimento di questo metodo si veda Bianchi, Cuomo, Curti, Lentini, Magnani & Vagni (2015).
2. Per alcuni aspetti connessi alla ricerca e alla sperimentazione del metodo si possono consultare: DO.RE.MAT. (2014) e Bolondi, Vagni, Lentini (2014). Più in generale, è possibile consultare il sito http://www.doremat.it/.

Riteniamo opportuno chiarire i principali capisaldi concernenti le motivazioni educative che caratterizzano Doremat e proporre alcune osservazioni di natura didattica, al fine di una migliore comprensione di questa pratica didattica.

1.1 I capisaldi educativi

Se si considera il processo formativo di un individuo nell'arco della sua istruzione dalla scuola elementare alla scuola media superiore, la matematica è la sola materia scientifica che viene trattata con continuità. Pertanto, rappresenta un particolare paradosso: da un lato, è la materia considerata "difficile" per eccellenza e, come sottolineano alcune ricerche[3], l'insuccesso in tale disciplina è tra le cause della dispersione scolastica; dall'altro, è l'unica materia curriculare su cui l'allievo può progressivamente maturare un pensiero scientifico. Un pensiero scientifico che risulta fondamentale per la crescita consapevole dei giovani, poiché consolida l'atteggiamento del chiedersi il perché delle cose che, attraverso la matematizzazione e la modellizzazione, forma al sapere individuare ed esaminare quei legami complessi che caratterizzano le realtà, i diversi mondi che viviamo, le nostre società contemporanee. Anche l'educazione musicale, come afferma La Face Bianconi (2008, pp. 13-25), risulta una componente fondamentale dell'apprendimento:

> «[…] è disciplina essenziale alla formazione del cittadino, ossia a quel processo del formare/formarsi, dare/darsi forma che, com'è noto, è dinamico, autoregolativo, fatto di ristrutturazioni e aggiustamenti continui. In quanto disciplina, l'Educazione musicale chiede perciò che se ne definiscano lo statuto, i linguaggi, gli oggetti e i metodi, che se ne segnino i paradigmi di confine.»
>
> (La Face Bianconi, 2008, 14)

L'educazione musicale si connota quindi come una disciplina articolata, con un suo proprio modello disciplinare, e, soprattutto, in grado di fornire strumenti cognitivi e metacognitivi di interpretazione e comprensione. L'educazione musicale può configurarsi come quello strumento di risposta alle necessità evolutive del sistema educativo-formativo. Questo perché:

> «La musica è essenzialmente cultura, sapere reticolare, interdisciplinare, capace d'illuminare gli altri saperi, dai quali, a sua volta riceve continuamente luce.»
>
> (La Face Bianconi, 2008, p. 14)

Doremat, nel favorire lo sviluppo delle competenze matematiche, recupera l'orizzonte culturale della musica e persegue anche l'importante obiettivo di rimotivare i giovani allo studio. Quindi, è fondamentale sviluppare percorsi in grado di supportare i giovani esposti all'insuccesso scolastico, alle problematiche di socializzazione e considerati "deboli" sotto il profilo delle basi culturali.

3. In ISFOL (2012) si osserva che l'OCSE e la UE, nel monitoraggio della dispersione, prendono in considerazione come indicatore la qualità degli esiti scolastici, ovvero i punteggi medi dei quindicenni in matematica e lettura rilevati attraverso l'indagine campionaria PISA, oltre che il tasso di partecipazione scolastica o tasso di scolarità. Risultati forniti da PISA (2015), ma anche dall'Indagini IEA PIRLS e TIMSS (2011), mostrano che la performance degli studenti è correlata positivamente col loro background socio-economico.

Percorsi che li accompagnino nella costruzione del loro sistema di competenze, attitudini, motivazioni e capacità di apprendimento. La metodologa adottata da Doremat è il *laboratorio*:

> «Una scuola di laboratorio è un ambiente formativo che fa ricerca. Impegnato a qualificare e a innovare costantemente i propri percorsi di insegnamento-apprendimento attraverso modelli didattici a nuovo indirizzo [...] [Il laboratorio] accumula una doppia risorsa didattica. La prima è quella di offrirsi da spazio paradigmatico per imparare ad imparare (obiettivo metacognitivo); la seconda risorsa è quella di essere il luogo deputato a ricostruire, a re-inventare e, se necessario, a trasgredire le conoscenze facendo largo uso di codici immaginari, inusuali, originali (obiettivo fantacognitivo).»
>
> (Frabboni, 2009, p. 5)

Appare quindi evidente come il laboratorio, per le proprie intrinseche virtù, sia un ambiente in cui diventa possibile dare strumenti cognitivi, interpretativi e sociali ai giovani allievi, aiutando a ricostruirne un'identità – individuale e sociale – più matura e integrata in un contesto di cittadinanza consapevole. È proprio per questo motivo che il cuore del metodo Doremat è l'attività laboratoriale. Per loro stessa natura, inoltre, la matematica e la musica si connotano come discipline particolarmente adatte alla didattica laboratoriale.

Doremat prevede per ogni argomento matematico un vero e proprio laboratorio matematico-musicale, nel quale gli studenti ascoltano, apprendono, si esprimono, si esercitano e inventano. Il laboratorio è luogo di interazione, dove l'allievo può mettere alla prova sé stesso, le proprie capacità e il proprio modo di esperire la realtà.

1.2 L'intreccio delle discipline alla luce dei costrutti della didattica

Nell'ampio ambito dell'educazione permanente, della cittadinanza e della democrazia, ci si può (ci si deve) chiedere, se e in che misura i ragazzi che terminano l'istruzione obbligatoria abbiano acquisito le competenze essenziali per la loro vita futura, come cittadini responsabili. Ma cosa s'intende per competenza? In modo semplicistico, ma chiarificatore per ciò che concerne il discorso che andremo a sviluppare, potremmo affermare che le competenze sono dipendenti da quanto un ragazzo è in grado di trasferire nei diversi contesti in cui si troverà ad operare dell'insieme delle conoscenze e abilità apprese a scuola.

È l'OCSE-PISA che valuta a livello internazionale l'acquisizione di tali competenze e riconosce tra gli ambiti di competenza quella matematica (*mathematical literacy*).

L'indagine del 2012 ha avuto come focus la competenza in matematica e in problem solving. Queste competenze sono state riformulate, rispetto alle precedenti edizioni, nel seguente modo:

> «La *literacy* matematica è la capacità di una persona di formulare, utilizzare e interpretare la matematica in svariati contesti. Tale competenza comprende la capacità di ragionare in modo matematico e di utilizzare concetti, procedure, dati e strumenti di carattere matematico per descrivere, spiegare e prevedere

> fenomeni. Aiuta gli individui a riconoscere il ruolo che la matematica gioca nel mondo, a operare valutazioni e a prendere decisioni fondate che consentano loro di essere cittadini impegnati, riflessivi e con un ruolo costruttivo»
>
> (OCSE-PISA, 2012, p. 25).

Evidenziamo l'enfasi posta sull'idea di competenza come capacità di mobilitare conoscenze e abilità e sviluppare atteggiamenti, nelle situazioni che lo studente incontrerà come cittadino. La visione della matematica che emerge non è ridotta alla pura esecuzione di procedure o calcoli, nella quale l'argomentazione è un esercizio logico fine a sé stesso o, peggio ancora, in cui si enunciano teoremi senza capirne il significato e senza dimostrazione. È invece una matematica ricca, legata a contesti significativi, centrata all'attività di risoluzione dei problemi. La matematica è, per la sua duttilità, un potente strumento per comprendere e rappresentare la realtà; apprenderla implica lo sviluppo di capacità quali, ad esempio, intuire, inventare, analizzare, sintetizzare e interpretare. Si comprende quindi l'importanza di tale disciplina nel perseguimento di un'educazione permanente.

Ma quale è il livello delle competenze matematiche dei ragazzi italiani? Confrontando i risultati dell'indagine OSCE-PISA nel corso delle varie somministrazioni emerge un lievissimo miglioramento, seppure non si sono registrati cambiamenti statisticamente significativi.[4] Queste indagini hanno fornito risultati preoccupanti, non tanto per ciò che riguarda la capacità di utilizzare e manipolare simboli matematici, ma più per ciò che concerne la matematizzazione orizzontale, ossia per le attività di rappresentazione di una situazione del contesto reale in una forma matematica e nella interpretazione dei risultati matematici trovati nel contesto del problema originale. È naturale e doveroso chiedersi: perché ciò accade? Perché i ragazzi italiani hanno difficoltà in determinate domande delle indagini internazionali, anche relativamente semplici? A questi interrogativi, risposte come, ad esempio, "non studiano" o "non sono portati per la matematica" non possono essere accettate, in quanto troppo semplicistiche, non realistiche (se si sta compiendo una generalizzazione) e infruttuose. Tutt'altro, occorre capire cosa succede ai nostri ragazzi, darsi delle chiavi interpretative: elaborare dei costrutti, delle categorie, attraverso i quali interpretare certi fatti e comportamenti e analizzare le pratiche didattiche delle nostre classi quando affrontano la matematica. È necessario riflettere su cosa succede in classe: ha senso pensare che il problema sia tutto nel "come insegnare la matematica"? O non dobbiamo piuttosto riflettere su cosa significa per il ragazzo cercare di comprendere e apprendere la matematica?

La matematica è una disciplina "dai tempi lunghi", ossia, ogni apprendimento veramente significativo è sempre costruito con un lavoro di medio-lungo termine. Su tutti i principali nuclei fondanti l'allievo vive rivisitazioni, arricchimenti, approfondimenti, estensioni e ampliamenti successivi. Questo apprendimento diventa una conquista profonda del soggetto, in qualche modo contribuisce a plasmarlo e diventa parte di lui. L'apprendimento della matematica dei nostri ragazzi, invece, spesso si dimostra estremamente instabile, volatile, fragile. Instabile: a seconda delle giornate, sembra che abbiano appreso una cosa oppure no. Volatile: argomenti che sembravano conquistati

4. Cambiamenti significativi si sono registrati rispetto ai cicli ancora precedenti: il punteggio medio del ciclo 2015 è risultato superiore di 24 punti in confronto al 2003 e di 28 punti rispetto al 2006 (OCSE-PISA, 2015).

svaniscono quando cambia l'insegnante o il ragazzo passa da una scuola all'altra. Fragile: fatti o situazioni nuove mettono in crisi quello che era stato faticosamente conquistato. Ma ciò è interpretabile con il fatto che tali apprendimenti non sono veramente significativi. Ossia, è il significato dell'oggetto matematico a essere fragile e instabile. Non a caso, nei test internazionali, i nostri allievi sbagliano risposte anche a domande relativamente semplici, in cui, però, occorre avere un certo controllo sul significato di un determinato oggetto matematico. Il controllo del significato è la cosa che più manca nella scuola italiana, nella nostra matematica. Ma come si può fare per dare significato a un oggetto matematico? La costruzione del significato si fa agganciando il significante su cui si sta lavorando a un contesto, a un qualcosa in cui il significato emerga, agganciando le attività, il lavoro dei ragazzi a qualcosa riconosciuto dagli allievi come dotato di un senso. Allora si capisce come un aggancio extradisciplinare, soprattutto con ragazzi che non hanno una forte motivazione intrinseca, è uno dei mezzi possibili con i quali si può costruire il significato degli oggetti matematici con cui si lavora e che sono l'oggetto dell'apprendimento. Il contesto dell'apprendimento, e in particolare gli agganci con altre discipline, diventa fondamentale perché rende gli apprendimenti veramente significativi. Poco sopra abbiamo parlato di motivazione, che è un altro problema fondamentale studiato dalla didattica della matematica. Molte ricerche, nell'ambito degli studi sui cosiddetti fattori affettivi, hanno evidenziato come la motivazione giochi un ruolo fondamentale nelle attività matematiche, in particolare nel problem solving. La musica diventa in Doremat un contesto per la costruzione del significato e, al tempo stesso, una cornice motivante per il lavoro degli allievi.

2 La pratica didattica attraverso il racconto dei laboratori

Entriamo ora nel vivo della pratica didattica, ossia nei laboratori Doremat, presentando nei paragrafi che seguono due esempi di laboratori: uno sulle frazioni in musica e un altro sulle simmetrie. Abbiamo fatto questa scelta per fornire un contributo afferente all'ambito aritmetico e uno all'ambito geometrico. Le attività proposte partono sempre da una situazione reale che gli studenti si trovano a esperire, ossia da un contesto di carattere musicale praticato. Dunque, in generale, invece di iniziare la trattazione di un argomento matematico con definizioni, enunciati di teoremi e proposizioni, si parte da una situazione problematica musicale, dalla quale è possibile scoprire, inventare e ricostruire concetti matematici. È l'alunno che compie queste azioni con la guida dei docenti. Le lezioni musicali, quindi, costituiscono l'ambiente da cui attingere situazioni che gli allievi devono poi problematizzare.

2.1 Le frazioni in musica

Le attività qui proposte sono finalizzate all'associazione tra figure (e figurazioni) ritmiche e frazioni e tra il loro succedersi nel tempo e l'operazione di addizione. Ciò avviene a partire da esperienze musicali, durante le quali gli studenti familiarizzano con le strutture ritmiche, dapprima interiorizzandole attraverso l'esperienza pratica, poi imparando a scriverle e leggerle con la simbologia musicale, e infine ragionando sul concetto di tempo in musica.

Per iniziare, facciamo riflettere gli studenti sui gesti e i movimenti che naturalmente ci vengono spontanei quando ascoltiamo una canzone che ci piace: battiamo il piede, schiocchiamo le dita o, anche, balliamo; osserviamo che tutti questi gesti non avvengono in maniera disorganizzata o irregolare ma, anzi, sono cadenzati, regolari… sembra proprio che stiano seguendo un ritmo. Ciò che accade, infatti, è conseguenza del fatto che il nostro cervello sta eseguendo delle vere e proprie operazioni matematiche. Vogliamo capire e approfondire proprio questo aspetto. Prendiamo in esame i rapporti tra le varie figure ritmiche: a tal fine, per avere un'idea di che cosa sia in musica un valore doppio o pari alla metà, proponiamo agli allievi un'attività idonea che usa le mani o altre parti del corpo come strumenti. La descrizione è quella che segue. Facciamo battere agli studenti con la mano destra su un piano dei colpi regolari, cioè in modo tale che tra uno e l'altro ci sia sempre il medesimo intervallo di tempo; con l'altra mano, la sinistra, facciamo battere nel medesimo intervallo due colpi, uguali tra loro. Prestiamo attenzione a che il primo di questi due colpi coincida con il primo colpo della mano destra, e che poi la mano sinistra batta il secondo colpo da sola. In tal modo otterremo immediatamente una maggiore precisione. Questa operazione è controllata dal nostro cervello che generalmente è in grado di "calcolare" il tempo in modo preciso, senza utilizzare altri strumenti. Tale facoltà di prevedere gli accenti e di misurare i movimenti, ad esempio battendo le mani o con i passi, in sincronia tra loro, è una delle facoltà del nostro sistema nervoso centrale, le cui manifestazioni si possono notare fin dalle prime settimane di vita. Con un po' di esercizio tutti possono arrivare a una coordinazione soddisfacente, e così i movimenti delle nostre mani ci forniscono un'idea chiara di che cosa siano il doppio e la metà l'uno dell'altro; vale a dire che il concetto di doppio e di metà viene veicolato da un supporto di natura motoria e rinforzato da un segnale sonoro (il colpo della mano sul piano). Differenziando il suono prodotto delle due mani (ad esempio con due strumenti di timbro differente) questi concetti risulteranno ancora più chiari e l'attività ancora più gradevole. Cliccando [in questo video] potrete vedere e ascoltare questa attività. Cerchiamo in seguito di rappresentare graficamente questa attività motoria; a tale fine, disegniamo alla lavagna due semirette parallele, intese come linee del tempo, e chiediamo agli studenti di rappresentare su una semiretta ciò che fa la mano destra e sull'altra ciò che fa la mano sinistra. Il risultato potrebbe essere schematizzato come nella **Figura 1**:

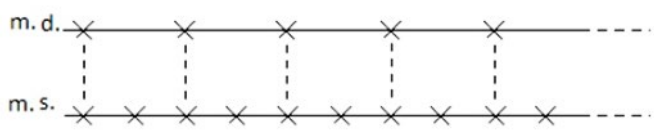


Figura 1
Rappresentazione dell'attività motoria descritta.

Nel grafico sono rappresentati i colpi delle mani tramite le "x", equidistanti, una per la mano destra ogni due della sinistra e allineate quando le mani battono insieme un colpo. Nell'esperienza, quando gli studenti non hanno colto l'equidistanza dei colpi, il rapporto o l'allineamento, li abbiamo stimolati con delle domande del tipo: "Come abbiamo battuto la mano sinistra? Questo vuol dire che abbiamo diviso il tempo in parti uguali oppure no? Ogni quanti colpi della mano sinistra la mano destra batte un colpo?".

Facciamo notare agli studenti che, se utilizziamo la simbologia musicale, possiamo scrivere il risultato della nostra attività motoria nel modo (**Figura 2**):

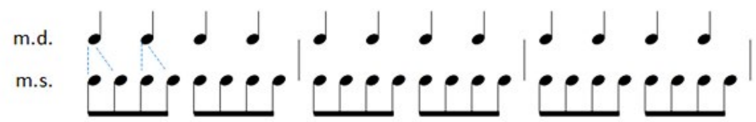


Figura 2
Scrittura musicale dell'attività descritta.

In relazione alla **Figura 2**, cerchiamo di mettere in evidenza il rapporto di uno a due (e viceversa) tra i suoni prodotti dalle due mani utilizzando un linguaggio che richiama quello delle frazioni e spieghiamo le notazioni musicali: la semiminima (ossia, la figura ritmica che compare più in alto) equivale a due crome. La croma è una figura musicale che si può trovare in raggruppamenti di due o più figure o anche separatamente. Una semiminima equivale a 2 crome e, viceversa, una croma equivale a metà semiminima (o è un mezzo di una semiminima). Volendo arricchire il linguaggio, proponiamo di parlare di durata delle figure ritmiche, così possiamo affermare anche che una semiminima ha durata che è il *doppio* di una croma. Cerchiamo ora di passare dalla rappresentazione grafica, sonora, motoria e proposizionale (linguaggio naturale) a una rappresentazione nel registro aritmetico, giungendo alla scrittura in **Figura 3**:

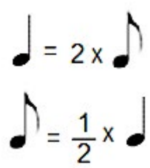


Figura 3
Rappresentazione nel registro aritmetico.

Possiamo procedere generalizzando l'esempio proposto in precedenza, osservando che possiamo costruire altre figure ritmiche raddoppiando o dimezzando la durata di quelle appena viste. In breve, giungiamo alla tabella in **Figura 4**:

Figura 4
Tabella con alcune figure ritmiche.

Per ritmare le figure musicali della **Figura 4** è necessario evidenziare i rapporti tra le durate delle varie figure ritmiche: ad esempio, se vogliamo suonare delle semicrome (ossia le note compaiono nella riga più in basso) dovremo battere quattro colpi nel tempo di una semiminima. Nell'esecuzione ritmica possiamo battere tra di loro le mani, o battere con delle penne sul banco, o ancora utilizzando delle bacchette; possiamo dividere la classe in gruppi e assegnare ai vari gruppi l'esecuzione di figure ritmiche diverse (un gruppo può scandire, ad esempio, delle semiminime, mentre un altro delle semicrome, o delle crome).

Tutte queste attività utilizzano vari registri semiotici: ad esempio, si passa da una rappresentazione semiotica espressa nel registro grafico a una espressa nel registro aritmetico e viceversa.

L'introduzione del concetto di battuta musicale ci consente, infine, di assegnare a ciascuna figura ritmica una frazione. Sempre a partire dalla musica, iniziando con l'ascolto di un brano, scopriamo che alcune frazioni sono usate per identificare proprio delle figure ritmiche, e anche il metro di battuta. Il tempo in cui si svolge la vicenda musicale, infatti, è suddiviso in porzioni di tempo (battute); ciascuna porzione è a sua volta divisa in altre piccole porzioni di tempo di uguale durata e il modo in cui può avvenire quest'ultima suddivisione non è unico e identifica il *metro* della battuta. Ad esempio, possiamo avere battute di metro 4/4, oppure 3/4, o ancora, 2/8, ecc. Nella nostra pratica didattica usiamo il metro 4/4, sia perché è il più comune (moltissime canzoni che ascoltiamo sono in 4/4) e il più semplice da eseguire, sia per un motivo di carattere aritmetico, che sarà chiaro a breve. Se una battuta è di metro 4/4, vuol dire che tale porzione di tempo è suddivisa in 4 porzioni di tempo, ciascuna della durata di un quarto. Nella teoria musicale la frazione 1/4 è proprio il valore assegnato alla semiminima. Nella pratica didattica presentiamo agli studenti la battuta rappresentando una porzione di tempo attraverso un segmento orientato (che si assume come l'intero), chiediamo di dividerlo in quattro parti di uguale lunghezza, di assegnare a ciascun segmento così ottenuto una frazione e diciamo che quello è il valore frazionario con cui, nella teoria musicale, si indica la semiminima (**Figura 5**):

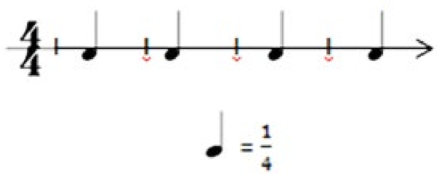


Figura 5
Una battuta di metro 4/4.

Per assegnare alle figure ritmiche le rispettive frazioni si richiamano agli studenti le esperienze e le osservazioni descritte poco sopra: ad esempio, se la croma è la metà della semiminima, ciascuna porzione da 1/4 dovrà essere divisa in due parti di uguale lunghezza e avremo il segmento suddiviso in otto parti, o, ugualmente, si può osservare che in una battuta ci stanno otto crome… e così il valore frazionario della croma è proprio 1/8. Naturalmente, lasciamo che siano gli studenti a dedurre e ottenere il valore frazionario delle figure ritmiche, esortandoli a tentare, manipolare le rappresentazioni, facendoli riflettere sulle esperienze condotte prima. Otteniamo quindi la seguente tabella:

nomi	Note	simbolo di pausa	valore
Semibreve	𝅝	𝄻	Un intero (4/4)
Minima	𝅗𝅥	𝄼	Un mezzo (2/4)
Semiminima	♩	𝄽 𝄽	Un quarto (1/4)
Croma	♪	𝄾	Un ottavo (1/8)
Semicroma	𝅘𝅥𝅯	𝄿	Un sedicesimo (1/16)
Biscroma	𝅘𝅥𝅰	𝅀	Un trentaduesimo (1/32)
Semibiscroma	𝅘𝅥𝅱	𝅁	Un sessantaquatresimo (1/64)

Figura 6
Valore delle figure musicali.

Possiamo commentare nuovamente i rapporti tra le figure ritmiche, usando però, questa volta, i loro valori frazionari: ad esempio, possiamo dire che 1/4 è la metà di 1/2 o, scrivere anche, che $1/2 \div 2 = 1/4$ (**Figura 6**).

A questo punto abbiamo tutti gli strumenti per poter inventare sequenze ritmiche ed espressioni aritmetiche. Invitiamo gli studenti a comporre delle sequenze ritmiche mischiando le varie figure e figurazioni ritmiche, come fossero mattoncini di un lego.

Possiamo partire con la richiesta di inventare una sola battuta oppure due o tre battute (sempre di metro 4/4). Questa attività non è immediatamente semplice o banale: per comporre correttamente le battute si devono scegliere tra varie figure e figurazioni ritmiche avendo bene presente il loro valore, contando in quarti per avere in ciascuna battuta esattamente il valore di 4/4. A titolo esemplificativo, la **Figura 7** mostra tre battute inventate dagli allievi:

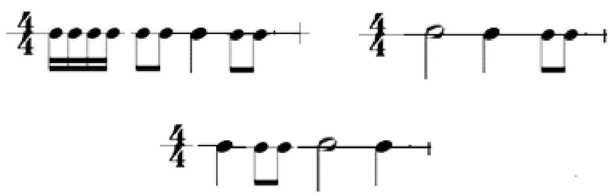


Figura 7
Prodotti degli allievi.

Osserviamo che la scrittura più in basso non è una battuta di metro 4/4, infatti essa è composta esattamente da 5/4. Queste attività, se svolte nella modalità di lavoro in gruppo, risultano certamente più fruttuose e ricche.

Osserviamo che agli studenti viene naturale applicare un'addizione tra frazioni; è opportuno farli riflettere esplicitamente sull'associazione che hanno compiuto: il succedersi nel tempo di figure ritmiche con l'operazione di addizione tra le frazioni che le identificano.

Così la musica si intreccia con la matematica: inventare una sequenza ritmica è come inventare un'espressione aritmetica; da qui in poi ci può sbizzarrire con le possibilità che ci offre questo splendido intreccio di discipline.

Un'ulteriore considerazione che si può condividere con gli studenti è che le frazioni sembrano proprio adatte a rappresentare delle figure ritmiche. Tornando, infatti, alla Figura 6, possiamo "leggerla" in vari modi. Ad esempio, assumendo le figure musicali come grandezze variabili, se consideriamo una figura e la sua successiva (leggendo dall'alto verso il basso) esse hanno rapporto 2:1. Essendo questo rapporto costante, possiamo dire che sono grandezze proporzionali. Il che significa che scorrendo le frazioni in tabella dall'alto in basso, la successiva indica un valore che è sempre la metà di quella precedente; compiendo il percorso in senso contrario, cioè dal basso in alto, il valore raddoppia. Si potrà affermare ad esempio che la semibreve ha una durata, o un valore, doppio della minima; che la minima a sua volta ha un valore, o una durata doppia della semiminima, e via dicendo. Se scorriamo verso l'alto diremo altresì che la semiminima dura, o vale, la metà, della minima e che questa a sua volta vale, o dura, la metà della semibreve. Tuttavia, ciò che non è possibile stabilire (e forse non è neppure utile farlo) è di quanto sia questa durata, quale sia la sua misura. Quello che importa è invece la proporzione tra le durate delle note e dei suoni da queste raffigurati, vale a dire la loro durata relativa, indipendentemente da quella assoluta. Ai fini dell'esecuzione musicale non interessa tanto la misurazione quantitativa dei suoni, quanto sapere che mentre un musicista esegue un suono (ad esempio una semibreve) il collega che sta suonando insieme a lui deve eseguirne due, tre o quattro. Principalmente per questo motivo le durate delle note si esprimono in termini relativi e vengono fissate le proporzioni tra di esse attraverso l'impiego delle frazioni. Non esistono note che durano 1, 2, 3 o 4 secondi, ma note che durano la metà o il doppio (e anche un terzo, un quarto ecc.) di altre note che vengono prese come riferimento di volta in volta.

Al termine di queste attività e laboratori abbiamo in definitiva associato alle varie figure ritmiche una frazione e associato al loro succedersi nel tempo l'operazione di addizione. Abbiamo sempre cercato di ricorrere a diverse rappresentazioni in vari registri semiotici del concetto di frazione (grafico, proposizionale, aritmetico, sonoro e motorio) e ne abbiamo evidenziato aspetti del significato, come rapporto tra grandezze e come parte di un uno-tutto.[5] Abbiamo usato la musica come contesto al quale agganciare un possibile senso delle frazioni e dell'equivalenza tra queste, usandolo come significante. Abbiamo impegnato gli studenti in significative attività di matematizzazione di contesti musicali, che li ha condotti a una interpretazione di simboli usati in due linguaggi diversi: aritmetico e ritmico, mettendo in relazione parti di strutture, ad esempio le frazioni con le figure ritmiche. Sul concetto di *struttura* torneremo alla fine di questo articolo.

2.2 Invenzione di forme simmetriche

La musica offre la possibilità anche di parlare di trasformazioni geometriche: sovente si sente parlare, ad esempio, della forma simmetrica di un brano, o della omoritmia tra

5. Sull'importanza di presentare diversi significati del concetto di frazione, si veda ad esempio Fandiño Pinilla (2005), in cui si trattano anche gli aspetti didattico e storico delle frazioni.

due (o più) parti o voci (che consiste nell'avere il medesimo profilo ritmico) che possiamo interpretare come una congruenza tra figure piane. I laboratori che possiamo svolgere sono numerosi, tuttavia, più che l'analisi di un brano, ci interessa l'invenzione di forme simmetriche.
Dividiamo la classe in almeno due gruppi (in genere, tre o quattro), dotati di strumenti melodici (come ad esempio strumenti a barre) o anche solo strumenti ritmici (come ad esempio legnetti, tamburelli) con la seguente consegna:

«Inventare una sequenza musicale di lunghezza predefinita (ad esempio, 4 battute di metro 4/4), utilizzando determinate note/altezze». Nella consegna espressa in questo modo, si fa attenzione che, in ogni caso, le produzioni dei vari gruppi risultino differenti, per profilo ritmico, per profilo melodico o per carattere tonale/modale, assegnando appunto differenti gruppi di note/altezze (per esempio, suoni diatonici o suoni cromatici, differenti insiemi di note corrispondenti a scale differenti), come quelli mostrati nella **Figura 8**:

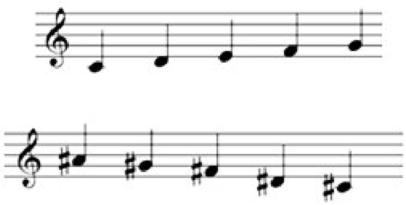


Figura 8
Differenti insiemi di note.

Una volta ottenute le sequenze inventate, scegliamone due, ad esempio, quelle riportate nella **Figura 9**; scriviamole e quindi suoniamole separatamente.
La prima viene indicata con la lettera A e la seconda con la B per evidenziarne il carattere reciprocamente contrastante (A è costruita su una porzione di scala diatonica, B sulla scala pentatonica).

Figura 9
Due sequenze ritmiche inventate dagli studenti.

Volendo comporre un brano, utilizzando le due sequenze inventate dagli studenti, ci accordiamo in questo modo: A rappresenta l'inizio cui segue un episodio di contrasto B; per concludere a maggioranza si ripropone A (**Figura 10**).

Figura 10
Brano A-B-A.

Commentiamo il brano, condividendo con gli studenti alcune differenze e analogie tra le due sequenze che lo compongono.

Per sintetizzare il percorso musicale, possiamo dire di avere composto una forma ternaria, fatta cioè di tre parti A-B-A, in cui A è il segmento iniziale che ci serve anche come chiusura del brano e B il segmento di carattere contrastante con A, che quindi si troverà in mezzo alla composizione (cosa ben visibile anche in partitura).

Condividiamo con gli studenti che molti brani musicali, canzoni, danze sono costruiti in questo modo, cioè alternando un episodio contrastante a una idea iniziale che ritorna subito dopo terminato il contrasto. Indipendentemente dalla complessità, dalla lunghezza o dalla forza con cui si impone la parte contrastante, sintetizziamo la loro forma in questo modo: A-B-A, aggiungendo che si tratta di una forma simmetrica.

Parlare di forma o di simmetria a proposito di un brano musicale significa usare termini che, pur aiutando a costruire un'immagine mentale di ciò che ascoltiamo, non provengono dal contesto "sonoro"; frequentemente utilizziamo termini che non cadono sotto il dominio sensoriale dell'udito per descrivere i suoni, dicendo ad esempio che quel suono è "ruvido" o "dolce", non possedendo termini migliori per restituircene l'aspetto. Se ad alcuni questa potrebbe sembrare una carenza lessicale, e non senza ragione, da un altro lato le sinestesie, gli ibridi che si creano, ci potrebbero consentire di stabilire degli intrecci tra ambiti esperienziali anche assai lontani e, per ciò che a noi interessa, tra discipline che grazie a questi collegamenti si scoprono condividere contenuti e processi di pensiero. In ogni caso, se utilizziamo la parola "simmetria" in musica, non lo facciamo senza ragione, lo facciamo perché questa parola ci restituisce un'immagine complessiva di ciò che abbiamo ascoltato. Nella dimensione in cui avviene l'esperienza musicale (quella dell'ascolto come quella della pratica o dell'invenzione) si può sempre ravvisare un prima e un dopo (oltre che un durante), collegati da relazioni dotate di senso (ad esempio una melodia e un ritmo che l'accompagna, la ripetizione di una frase in momenti successivi, la variazione di idee sentite prima, ecc.). Osserviamo che l'udito, se non supportato, non può dare una visione di insieme di un brano, non potendo controllare in un unico istante ciò che accade in momenti successivi, a differenza di ciò che restituisce la vista di fronte alla facciata di un palazzo neoclassico, che permette di osservarla nel suo insieme. Riusciamo, però, a ricomporre ciò che ascoltiamo in un oggetto dotato di senso descrivendone la struttura musicale con i termini che ne suggeriscono un'immagine il più fedele possibile, sia pure per analogia.

Tornando al brano composto, possiamo realmente dire che presenta un qualche tipo di simmetria? Cosa vuol dire che un oggetto è simmetrico? E rispetto a cosa lo è? Con queste domande possiamo stimolare gli studenti a spiegare cosa è secondo loro una simmetria, quando possiamo dire che due oggetti sono simmetrici (rispetto a qualcosa). Gli studenti, in genere, rispondono facendo riferimento a oggetti concreti, ad esempio, "le mani (poste sullo stesso piano e con i palmi rivolti nello stesso verso) perché sono uguali e alla stessa distanza" o a esperienze vissute, ad esempio, "lo specchio che produce un'immagine speculare"; in ogni caso, gran parte degli studenti alludono a una simmetria assiale.

Tornando alla composizione, verifichiamo assieme agli studenti attraverso un'analisi della partitura ottenuta, che la simmetria che abbiamo realizzato è di natura analogica (non certo una perfetta simmetria), per via del segmento di partitura che abbiamo indicato con "B".

Sarebbe possibile, intervenendo sulla partitura e quindi rielaborando le idee dei ragazzi, ottenere una simmetria vera, che sia tale almeno sulla carta? Esortiamo quindi gli studenti a modificare il brano realizzato in precedenza; a titolo esemplificativo, riportiamo nella **Figura 11** alcuni dei risultati delle nostre esperienze:

Figura 11
Brano A-B-A'.

Qui i ragazzi hanno manipolato soltanto il segmento A che, dopo B, è riscritto partendo dall'ultima nota fino alla prima. Il primo e il terzo sono, quindi, simmetrici rispetto al segmento B.

Figura 12
Brano A-B'-A'.

Nella Figura 12, invece, gli studenti hanno lavorato su tutti i segmenti musicali, ottenendo una simmetria rispetto all'asse "temporale" che delimita la sesta e la settima battuta.

Lavorando in gruppo gli studenti possono così manipolare un brano musicale e costruire una simmetria, attività significativa in quanto implica l'utilizzo e lo sviluppo di competenze e abilità, quali ad esempio riconoscere gli elementi costitutivi di oggetti, porre in relazione parti di strutture e manipolarle al fine di costruire un nuovo oggetto con determinate caratteristiche.

Non è detto però che la correzione apportata al nostro brano, al fine di ottenere una simmetria precisa della sequenza delle altezze o del profilo ritmico, determini nell'ascoltatore una percezione più chiara della presenza di una struttura simmetrica nella musica. Non è detto perché le regole che determinano la chiarezza nella comprensione di un elaborato sonoro non sono quelle della geometria; parlare di simmetria musicale serve a dare significato all'esperienza musicale, che si tratti di ascolto o di invenzione o di pratica.

La presenza nella musica di strutture simili a quelle della geometria, tanto che è possibile prendere a prestito da questa le parole per descrivere quelle, ci fornisce l'occasione per cercare di creare degli intrecci didattici fecondi, delle vie per apprendere meglio.

Anche in questo ambito torna il concetto di *struttura*, citato nel precedente paragrafo. Il concetto di *struttura* è trasversale a molte discipline, in particolare alla matematica e alla musica. Esso è indipendente dagli elementi usati e con elementi diversi si possono costruire strutture identiche; per cui, non sono tanto i segni usati, ma le relazioni che intercorrono tra essi a produrre significato. Per poter leggere la realtà, interpretarla, modellizzarla, agire su di essa, lo studente deve saper padroneggiare le strutture matematiche. Analogamente, il concetto di struttura è presente anche nella musica, sia nella dimensione ritmica che in quella che riguarda l'altezza dei suoni; è per questo motivo che la musica aiuta a comprendere il concetto di struttura. Nei laboratori Doremat gli studenti operano associazioni tra alcuni concetti di musica e alcuni di matematica, scoprendo delle corrispondenze (tra parti di strutture); come sostiene Hofstadter:

> «la percezione di isomorfismi è ciò che crea i significati nella mente umana».
> (Hofstadter, 1984, p. 54).

Per concludere vi proponiamo un'attività che abbiamo realizzato con degli studenti: una rielaborazione dell'Inno alla gioia, brano tratto dalla celeberrima Nona Sinfonia di Ludwig Van Beethoven. Siamo partiti dall'ascolto del brano, cercando di commentarne i movimenti; gli studenti hanno poi riconosciuto delle linee melodiche inizialmente "salire", poi "scendere". Partendo da queste osservazioni, abbiamo scritto su un pentagramma una prima linea melodica; successivamente con gli studenti abbiamo stabilito di raddoppiare la melodia in moto retto all'intervallo di un'ottava, che è sembrato quello più gradevole. Infine, abbiamo inventato un accompagnamento che, in Figura 13, è rappresentato in notazione geometrica dal terzo rigo e in notazione aritmetica dal quarto rigo, eseguito al tamburo; il primo rigo, invece, è scritto in notazione tradizionale. Ecco: Video dell'Inno alla gioia.

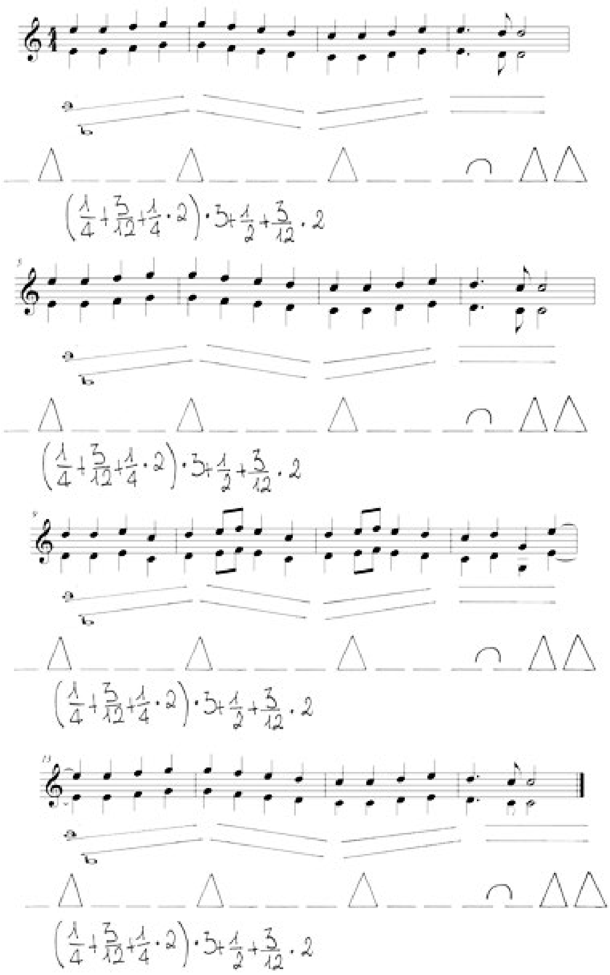


Figura 13
Una rappresentazione dell'Inno alla gioia.

Bibliografia

Azzaroni, L. (1997). *Canone infinito: lineamenti di teoria della musica*. Bologna: Clueb.

Bianchi, A., Cuomo, C., Curti, G., Lentini, D., Magnani, N., & Vagni, R. (2015). *Doremat - La Musica della Matematica. Il Testo. Insegnare e imparare la Matematica con la Musica*. Modena: Digital Index [collana diretta da Silvia Sbaragli].

Bolondi, G., Vagni, R., & Lentini, D. (2014). Doremat, la Musica della Matematica, In B. D'Amore, & S. Sbaragli, (a cura di). *Parliamo tanto e spesso di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora, 159-162.

Borzacchini, L. (2005). *Il computer di Platone. Alle origini del pensiero logico e matematico*. Bari: Dedalo.

Camici, C., Cini, A., Cottino, L., Dal Corso, E., D'Amore, B., Ferrini, A., Francini, M., Maraldi, A. M., Michelini, C., Nobis, G., Ponti, A., Ricci, M., & Stella, C. (2002). Uguale è un segno di relazione o un indicatore di procedura? *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 25*(3), 255-270.

Cazzago, P. (1984). *Psicomotricità e spazio-tempo: strutture e ritmi*. Brescia: La Scuola.

Dahlhaus, C. (1990). *Beethoven e il suo tempo*. Torino: EDT.

ESPERIENZA DIDATTICA

DO.RE.MAT. (2014). *Decrease Obstacles Related to Mathematics Teaching – La Musica della Matematica - Trasferimento di metodologie innovative per l'insegnamento della matematica attraverso la musica*. [Rapporto finale di valutazione del progetto 2012-1-IT1LEO05-02810]. Disponibile in http://dorematleonardo.eu/index.php/it/prodottiita (consultato il 2.04.2017).

Fandiño Pinilla, M. I. (2005). *Frazioni, aspetti concettuali e didattici*. Bologna: Pitagora.

Frabboni, F. (2009). *Lo spazio Laboratorio. Progetto LAIV* (Laboratorio delle arti interpretative dal vivo). Disponibile in http://www.progettolaiv.it/resources/laiv/PDF/Frabboni%20-%20spazio%20laboratorio.pdf (consultato il 2.04.2017).

Ghione, F., & Catastini, L. (a cura di)(2011). *Matematica e Arte. Forme del pensiero artistico*. Milano: Springer.

Hofstadter, D. R. (2003). *Gödel, Escher, Bach: un'Eterna Ghirlanda Brillante*. Milano: Adelphi.

IEA PIRLS e TIMSS (2011). *I risultati degli studenti italiani in scienze, matematica e lettura.* Disponibile in: http://www.invalsi.it/invalsi/ri/timss2011/documenti/Rapporto_PIRLS_TIMSS.pdf (consultato il 2.04.2017).

Del Cimmuto, A., Fiacca, F., Palomba, L., & Senatore, A. M. (2012). *Le azioni del pon "competenze per lo sviluppo" di contrasto alla dispersione scolastica un'indagine valutativa*. ISFOL. Disponibile in http://isfoloa.isfol.it/bitstream/handle/123456789/134/Del%20Cimmuto_Fiacco_Lupo_Palomba_Senatore_Rapporto%20dispersione%20scolastica.pdf;jsessionid=E7D57602593D266C0722AE865248C84D?sequence=3 (consultato il 2.04.2017).

La Face Bianconi, G. (2008), Il cammino dell'Educazione musicale: vicoli chiusi e strade maestre. In G. La Face Bianconi & F. Frabboni (a cura di). *Educazione musicale e Formazione,* Milano: FrancoAngeli.

OCSE-PISA (2012). Pisa 2012. *Quadro di riferimento per la Matematica*. Disponibile in http://www.invalsi.it/invalsi/ri/pisa2012/documenti/Matematica.pdf (consultato il 03.04.2017).

OCSE-PISA (2015). *I risultati degli studenti italiani in scienze, matematica e lettura*. Disponibile in: http://www.invalsi.it/invalsi/ri/pisa2015/doc/rapporto_PISA_2015.pdf (consultato il 2.04.2017).

PISA (2015). *Result in focus*. Disponibile in http://www.oecd.org/pisa/pisa-2015-results-in-focus.pdf (consultato il 2.04.2017).

Radford, L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational studies in mathematics, 42*(3), 237-268.

Zan, R. (2007). *Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire*. Milano: Springer.

Allegati

1. Video 1 - https://www.youtube.com/watch?v=lfJxiqNJJhw&feature=youtu.be
2. Video 2- Inno alla gioia - https://www.youtube.com/watch?v=Chw6u1m1kzs&feature=youtu.be

Autori: **Rachele Vagni, Denise Lentini**
Gruppo di Ricerca e Sperimentazione in Didattica e Divulgazione della Matematica, Enfap, Bologna.
rachele.vagni@gmail.com, lentini.denise@gmail.com

ESPERIENZA DIDATTICA

La robotica educativa per l'apprendimento della matematica
Un'esperienza nella scuola elementare

♦Marco Beltrametti, °Lorella Campolucci, °Danila Maori, *Lucio Negrini e *Silvia Sbaragli
♦Pedagogista,
°I.C. Corinaldo (AN, Italia) - RSDDM Bologna,
*Dipartimento formazione e apprendimento, SUPSI

Sunto / I robot sono sempre più presenti attorno a noi e sono entrati anche nelle scuole grazie alla robotica educativa. In questo articolo si introducono i riferimenti teorici a cui si rifà la robotica educativa e si discute sul perché portarla a scuola. Con le attività di robotica educativa si perseguono diverse finalità: da una parte i robot vengono usati per avvicinare i giovani alle tecnologie e al pensiero informatico, dall'altra possono fungere da supporto per sviluppare competenze sia disciplinari che trasversali. Alcuni studi in quest'ambito vengono passati in rassegna. L'articolo presenta anche alcuni robot utilizzabili in classe e una sperimentazione avvenuta in prima e quarta elementare a Corinaldo (AN) effettuata con il BeeBot.

Parole chiave: robotica educativa; matematica; STEM; pensiero informatico; competenze trasversali.

Abstract / Robots are more and more present around us and have also entered schools thanks to educational robotics. This article introduces the theoretical references to educational robotics and discusses the reasons for introducing it into school curricula. The activities of educational robotics permit to pursue different goals: on one hand robots are used to familiarize pupils to technology and computational thinking, on the other they can serve as a support to develop disciplinary and transversal skills. Some studies in this field are reviewed. The article, eventually, presents robots that can be used in school classes along with an experimentation realized in the 3rd and 6th grade using BeeBot.

Keywords: educational robotics; mathematics; STEM; computational thinking; transversal skills.

1 Introduzione

I robot possono essere definiti come «macchine dotate di sensori (di contatto, di distanza, di colore, di forza ecc.) che gli permettono di percepire l'ambiente, di motori che gli permettono di muoversi e di agire sull'ambiente e di un sistema che controlla ciò che il robot esegue in funzione di ciò che percepisce» (Calmet, Hirtzig & Wilgenbus, 2016, p. 27, traduzione dell'autore). Il termine robot deriva dal ceco "robota" che significa "lavoro faticoso" e fu usato la prima volta dallo scrittore K. Čapek per definire gli automi che lavoravano al posto degli operai nella sua opera teatrale fantascientifica del 1920. Il primo robot industriale entrò in funzione nel 1954 nella catena di montaggio della General Motors. Da allora l'importanza scientifica, sociale ed economica dei robot è aumentata considerevolmente. Oggi i robot sono presenti ovunque attorno a noi: assemblano automobili nelle fabbriche, tagliano l'erba nei giardini, preparano il pane nelle cucine, operano negli ospedali e sempre più spesso li vediamo anche in strada (automobili che si guidano da sole) o in cielo intenti a trasportare pacchi da un punto all'altro (per esempio i droni di Amazon). I robot sono presenti anche nel campo dell'educazione. Nelle università sono oggetto di studio dove si cerca di perfezionarne i comportamenti così da riprodurre le movenze umane e, grazie all'intelligenza artificiale, di fargli risolvere tipi di problemi riservati per ora solo agli esseri umani. Non sono però presenti solo nelle università ma anche nelle scuole di tutti gli ordini: dalla scuola dell'infanzia ai licei dove vengono usati come artefatti cognitivi (Papert, 1984; Norman, 1993), ossia oggetti che possono facilitare lo sviluppo di specifici apprendimenti e allo stesso tempo permettono di avvicinare i giovani alle tecnologie. In questo senso si parla anche di robotica educativa.

2 Cos'è la robotica educativa

Benché la presenza dei robot citati precedentemente sia visibile soprattutto a partire dagli ultimi anni, la robotica educativa nasce già verso la fine degli anni '60 grazie a Seymour Papert, professore al Massachusetts Institute of Technology (MIT), che fu uno dei primi a intuire che i robot avrebbero potuto favorire l'apprendimento (Moro, Menegatti, Sella & Perona, 2011). Papert e i suoi collaboratori svilupparono diverse tecnologie che poi testarono nelle scuole. Uno dei più famosi robot è conosciuto come la tartaruga LOGO, una grossa semisfera programmabile con delle ruote per muoversi e dei pennarelli sulla parte inferiore per disegnare. Utilizzando il linguaggio LOGO (pure creato da Papert) gli allievi potevano far eseguire alla semisfera diverse operazioni, come per esempio disegnare delle figure geometriche. Il LOGO si diffuse nelle scuole, ma poi fu abbandonato. Dallo sviluppo dei prodotti creati da Papert e colleghi nascerà il primo kit robotico ancora oggi molto diffuso nelle scuole, ossia il LEGO Mindstorms (Moro et al., 2011). Grazie a questi kit è possibile eseguire delle attività che, oltre a favorire l'aspetto ludico, possono stimolare una serie di capacità e abilità, ovviamente se proposte e gestite con criticità e sensibilità da parte dei docenti. Non è in effetti solo perché vi è un artefatto in classe, come ad esempio un robot, che si crea automaticamente apprendimento negli allievi, come hanno dimostrato la didattica della matematica negli ultimi trent'anni (D'Amore, & Fandiño Pinilla, 2016) o gli studi sull'uso delle tecnologie in classe (per esempio OECD, 2015). Come affermano D'Amore & Fandiño Pinilla (2014): «(…) è necessario conoscere bene vantaggi e svantaggi, per usare quello strumento, qualsiasi strumento, con acutezza e capacità critica. Occorre dominare lo strumento e non esserne dominati» (p. 99).

La storia della didattica della matematica mostra come spesso ci siano degli innamoramenti per strumenti e materiali che sembrano panacee, che poi vengono dimenticati dai docenti stessi (D'Amore, 1999). Non è intenzione mettere in discussione il ruolo che gli artefatti e i diversi materiali possono avere nel processo di insegnamento-apprendimento, ma in questi spesso si ripone troppa fiducia, così come alle attività che attorno ad essi ruotano, mentre si sottovaluta il fondamentale rapporto docente-allievi e sapere in gioco. Se il docente riflette con sensibilità e criticità sul processo di insegnamento-apprendimento, i robot possono quindi diventare "oggetti con cui ragionare", come avevano auspicato Papert (1991) e Resnick e colleghi (1998).

Alla base delle attività di robotica educativa, si può classicamente ritrovare un modo di considerare l'apprendimento come la costruzione attiva del sapere in interazione con il mondo e quindi tramite la manipolazione degli oggetti, come evidenziato storicamente dal costruttivismo di Piaget (1954). Papert, avendo lavorato con Piaget su studi sull'apprendimento della matematica (Catlin & Wollard, 2014), riprende i principi fondamentali della teoria di Piaget e basandosi su di essi conia il termine *costruzionismo* che sta alla base delle attività di robotica educativa. L'idea di fondo è che la costruzione e la manipolazione di oggetti fisici giocano un ruolo fondamentale nel processo di apprendimento in un'ottica di *learning by doing* (Moro et al., 2011). Per risolvere un problema gli studenti devono utilizzare il loro sapere per progettare e pianificare una soluzione e poi manipolare degli oggetti come i robot per testare se la soluzione pensata funziona (Holmquist, 2014). Per esemplificare questo passaggio, si riporta un esempio tratto da Moro et al.:

> «Ad esempio uno studente potrebbe ragionare su quale sia il modo migliore di sfruttare il suo kit di pezzi per realizzare una piccola gru in grado di alzare oggetti il più pesanti possibile. Inizialmente l'alunno sfrutterà le sue conoscenze sulla realtà fisica per immaginare la gru con le migliori caratteristiche che le permettano di sollevare il maggior carico possibile. Successivamente, realizzerà il robot assemblando e programmandolo nei movimenti. Infine, testerà le proprie congetture relative al massimo carico di peso che la gru potrà sopportare ed eventualmente potrà pensare alle future modifiche. Si innescherà così un circolo che, partendo dalla mente e dalla cognizione del soggetto, passa per la realtà fisica attraverso la manipolazione degli oggetti e torna alla sfera del ragionamento».
>
> (2011, p.20)

Damiani (2015) sottolinea l'importanza della manipolazione e il ruolo del corpo nell'apprendimento affermando che «il nostro corpo non solo svolge una funzione di mediazione sensoriale ed esecutiva tra cervello e mondo esterno, ma costituisce il dispositivo principale attraverso il quale, realizzando esperienze, sviluppiamo apprendimento e produciamo conoscenza» (p. 119). La manipolazione degli oggetti permette inoltre di rendere visualizzabile l'apprendimento e di favorire la verbalizzazione dei propri ragionamenti e la condivisione delle proprie scoperte. In tutto ciò non va infatti dimenticato il ruolo sociale dell'apprendimento, che permette lo sviluppo di competenze trasversali tramite il confronto con gli altri.

Gli aspetti fondamentali del costruzionismo e quindi dell'inquadramento classico della attività di robotica educativa possono quindi essere riassunte in a) apprendimento situato e legato all'esperienza diretta, b) costruzione attiva del sapere da parte dell'individuo, c) manipolazione di artefatti cognitivi che possono facilitare l'apprendimento e la sua condivisione (Moro et al., 2011). Tale classico punto di partenza della robotica educativa, può essere ampliato e attualizzato tramite la prospettiva della *mediazione semiotica*, che rinvia al quadro teorico vygotskiano, ripreso da Bartolini Bussi e Mariotti (2009) o dall'approccio semiotico culturale proposto da Luis Radford a partire dagli anni 2000 che attribuisce un ruolo centrale alla semiotica inserita in una visione antropologica del pensiero, degli oggetti matematici e dell'apprendimento. Il pensiero viene quindi considerato come *un'unità* dinamica *di componenti materiali e ideali* – una pratica sociale tangibile materializzata nel corpo (per esempio attraverso azioni cinestetiche, gesti, percezione, visualizzazione), nell'uso di segni (per esempio: simboli matematici, grafici, lingua scritta e parlata) e di artefatti di vari tipi (righelli, calcolatrici, robot e così via). In questa prospettiva teorica si ritiene che lo sviluppo delle competenze matematiche, ma non solo, sia essenzialmente culturale e dipenda dalle condizioni contestuali, quindi anche dalle situazioni che vengono proposte e favorite in classe (Radford, 2005, 2006).

3 Perché portare la robotica educativa a scuola

Negli ultimi anni sono nate diverse iniziative con l'intento di diffondere la robotica educativa sia nel tempo libero con i vari tornei di robotica (per esempio la First Lego League pensata per i ragazzi fra i 9 e i 16 anni con l'uso dei robot della Lego Mindstorms) sia nella scuola con corsi di robotica (in Ticino possiamo citare il corso di opzione tecnologica nella scuola media o le attività del progetto PReSO nella scuola dell'obbligo). Gli obiettivi perseguiti da queste iniziative sono per esempio l'orientare i giovani alle tecnologie e al pensiero informatico (anche chiamato pensiero computazionale), il favorire le competenze trasversali o lo sviluppare competenze specifiche legate alle varie discipline. Di seguito una breve descrizione degli obiettivi citati.

Orientare i giovani alle tecnologie e alle discipline MINT

La diffusione della robotica educativa è stata sostenuta anche dalle varie iniziative volte a favorire le discipline MINT (matematica, informatica, scienze naturali e tecniche). Infatti nonostante la crescita, in termini assoluti, di giovani interessati alle scienze e che intraprendono carriere in questo ambito, il mercato del lavoro e della ricerca in tutti i paesi industrializzati conosce una carenza conclamata di personale specializzato nelle scienze naturali e tecniche, soprattutto di sesso femminile e nell'ambito dell'informatica (Holmquist, 2014; Consiglio federale, 2010). Le iniziative di robotica educativa vengono quindi sostenute con l'intento di coinvolgere più giovani nel campo delle MINT e interessarli a queste discipline. La robotica educativa permette infatti di proporre attività legate alle discipline MINT, che spesso vengono percepite da alcuni allievi come troppo astratte e noiose, in modo concreto e accattivante, aumentando la loro motivazione e il loro interesse per quest'ambito e avvicinandoli così alle tecnologie.

Sviluppare il pensiero informatico (o pensiero computazionale)

Oltre ad avvicinare i giovani alle tecnologie, la robotica educativa permette di sviluppare il pensiero informatico, che si può definire come «un processo mentale per far risolvere problemi a un agente, sia esso persona o macchina, fornendogli una serie di istruzioni che deve eseguire in autonomia» (Nardelli, 2017, I par.). Questo processo mentale si basa sui concetti fondamentali dell'informatica che includono per esempio la capacità di formulare problemi, organizzare logicamente e analizzare i dati, rappresentare i dati tramite astrazioni, modelli e simulazioni, automatizzare la risoluzione dei problemi tramite il pensiero algoritmico, testare e migliorare le possibili soluzioni (Lodi, 2013).

Con la robotica educativa si lavora soprattutto su tre concetti fondamentali dell'informatica:

1. la sequenza, che permette di eseguire dei comandi in un ordine dato;
2. la condizione, che permette di eseguire un comando oppure un altro a seconda della condizione (se…allora);
3. l'iterazione, che permette di ripetere più volte una sequenza di comandi.

La combinazione di questi elementi permette di ottenere dei primi algoritmi che poi vengono testati immediatamente e, in caso di errore, perfezionati. Il pensiero informatico lo possiamo trovare in qualsiasi ambito scolastico e in varie situazioni della vita di tutti i giorni; può essere considerato un modo di pensare che può permettere di «risolvere problemi, progettare sistemi, comprendere il comportamento umano basandosi sui concetti fondamentali dell'informatica» (Wing, 2006, p. 33, traduzione dell'autore). Tale pensiero non è però assimilabile "solo" al risolvere problemi: descrivere il pensiero computazionale unicamente come la competenza che permette di risolvere problemi (problem solving) è erroneo, «I matematici hanno risolto problemi per anni, ma solo quando hanno iniziato a riflettere sulla possibilità e sulle implicazioni di "far risolvere" i problemi a qualcun altro, si è messa in moto un'evoluzione che ha portato alla nascita della nuova disciplina scientifica, l'informatica» (Nardelli, 2017, IV par.). Quindi non "problem solving" in prima persona, ma per qualcuno che deve agire al tuo posto per risolvere un problema. In altre parole, il pensiero computazionale è un processo mentale che conduce a specificare procedure che un esecutore può realizzare autonomamente. Va però considerato che il far risolvere i problemi a qualcun altro, rappresenta un aspetto specifico che non sminuisce l'importanza di far acquisire agli allievi la competenza di risolvere problemi in prima persona, eventualmente con il contributo degli altri. Risolvere problemi rappresenta infatti una delle attività più significative del genere umano, così come sosteneva Polya (1967), e per questo vanno favoriti da parte del docente una grande ricchezza di proposte, situazioni e contesti diversi che mobilitino una moltitudine di strategie risolutive. È importante che non avvenga anche per le proposte di robotica educativa ciò che è accaduto per il pensiero insiemistico nel periodo della Matematica moderna o Nuova Matematica. La teoria insiemistica basata su classificazioni, sequenze, successioni logiche, diagrammi di flusso, ecc., fu considerata per anni la panacea dell'insegnamento, diffondendosi con forza in tutte le scuole e diventando una proposta in certi casi univoca, ma successivamente fu abbandonata (D'Amore, 1999). La pluralità di esperienze, strumenti e metodi rimane fondamentale e le attività di robotica educativa possono rappresentare una ricca proposta tra le tante possibili.

Sviluppare competenze trasversali

La robotica educativa, così come altre proposte didattiche, può permettere di sviluppare una serie di competenze fondamentali per la società moderna. Ad oggi la ricerca empirica ci fornisce ancora poche risposte su quali siano gli effetti dell'utilizzo di robot sulle competenze degli allievi (Benitti, 2012), ma esistono alcune esperienze pratiche che ci elencano quali sono i processi cognitivi e le competenze maggiormente stimolate dalla robotica educativa: fra queste troviamo competenze trasversali come per esempio il problem solving (nelle attività di robotica gli allievi devono prima capire qual è il problema, rappresentarsi una soluzione, pianificare l'azione costruendo e programmando il robot, testarla e in caso migliorarla); (Moro et al., 2011), il lavoro collaborativo (spesso le attività di robotica avvengono in piccoli gruppi con una didattica per progetti); (Nugent, Barker, Grandgenett & Adamchuk, 2009; Grimaldi, 2015), la creatività (per esempio nella costruzione dei robot o nell'ideazione di una soluzione); (Beltrametti, 2014), la pianificazione (per programmare il robot bisogna pianificare la sequenza d'ordini da impartire); (Moro et al., 2011; Sullivan, 2008) o lo sviluppo di strategie di comunicazione (il linguaggio di programmazione è una forma di comunicazione); (Johnson et al., 2016). Le attività di robotica educativa vengono utilizzate anche con bambini con bisogni educativi speciali o con disturbi dello spettro autistico ottenendo risultati incoraggianti (Owens, Granader, Humphrey & Baron-Cohen, 2008; Grimaldi, 2015).

Sviluppare competenze disciplinari: il caso della matematica

Molte delle attività di robotica educativa sono state sviluppate per permettere l'apprendimento di competenze trasversali o competenze affini con la robotica e l'informatica, come per esempio la programmazione, la meccanica (costruzione di robot) o l'elettronica (Benitti, 2012). Alcuni educatori hanno però ampliato le possibili applicazioni della robotica nella scuola creando delle attività che vanno a coinvolgere altre discipline come la matematica, così come discipline apparentemente più lontane dalla robotica come le lingue o le arti. È proprio nel campo della matematica che la robotica educativa si è sviluppata maggiormente. Benitti (2012), in un review sugli studi di robotica, afferma che circa l'80% delle esperienze di robotica educativa avviene nel campo della matematica o della fisica. Negli ultimi anni sono infatti apparsi diversi itinerari didattici che fanno uso di robot per sviluppare competenze matematiche. Fra le attività più comuni troviamo quelle per sviluppare competenze legate per esempio al concetto di distanza (Mitnik, Nussbaum & Soto, 2008) o di angolo (Mitnik et al., 2008; Grimaldi, 2015), e a concetti di relazione spazio-temporale (Grimaldi, 2015; Julià & Antolí, 2016). Per esempio Mitnik et al. (2008) nel loro studio condotto con 70 allievi divisi in due gruppi (uno che ha fatto uso di robot educativi per le attività legate ai concetti di angolo e distanza e uno che ha svolto le attività senza l'utilizzo di robot), dichiarano che gli allievi che hanno utilizzato i robot raggiungono risultati migliori nei due argomenti trattati. Inoltre, hanno osservato come nel gruppo che ha utilizzato i robot ci fosse più collaborazione e fossero più motivati a svolgere le attività, mentre nel secondo gruppo gli allievi si annoiassero con più facilità. Anche Grimaldi (2015) arriva alle stesse conclusioni sempre per il concetto di angolo e di relazioni spazio-temporale. L'autore osserva anche come gli studenti con più difficoltà abbiano ottenuto risultati più soddisfacenti con l'utilizzo dei robot. Alle stesse conclusioni sono giunti anche Julià e Antolí (2016) per l'apprendimento di alcuni concetti spaziali, sempre mettendo a confronto corsi tenuti in modo tradizionale con corsi che facevano uso di robot educativi. I risultati di tali esperienze non sono certamente generalizzabili, ma mettono in evidenza le sperimentazioni che si stanno svolgendo attualmente in questo campo.

4 Come, quando e quali robot utilizzare?

Negli ultimi anni sono apparsi diversi robot educativi espressamente costruiti per i bambini e i ragazzi, che possono permettere al docente di progettare percorsi didattici stimolanti. Nel primo ciclo della scuola dell'obbligo (scuola dell'infanzia e primi due anni della scuola elementare) viene spesso usato BeeBot e la sua versione aggiornata

BlueBot, che permette anche una connessione al tablet tramite bluetooth (in realtà BeeBot e BlueBot non sono dei robot perché privi di sensori). Il suo aspetto simpatico attira subito l'attenzione dei bambini che maneggiandolo imparano i comandi per programmarlo e si avvicinano così alle basi della programmazione sequenziale. Per il secondo ciclo della scuola elementare si può utilizzare il robot della lego WeDo 2.0, un robot da costruire coi mattoncini Lego e programmabile con linguaggi procedurali iconici. Sempre della Lego, ma per allievi di scuola media, ha molto successo il robot Mindstorm EV3. Per finire si sta diffondendo come robot educativo versatile e utilizzabile da una fascia d'età ampia che va dai 4 ai 14 anni il robot Thymio II, creato al politecnico di Losanna e programmabile con un linguaggio iconico per eventi.

Il referente pedagogico storico dell'uso scolastico di questi robot è rintracciabile, come già anticipato, nei lavori di Papert e nel costruzionismo. Le idee di Papert, che promuoveva l'apprendimento in un'ottica di *learning by doing* attraverso la costruzione e la manipolazione di oggetti fisici, possono essere considerate in parte ancora attuali, ma è utile ricordare che l'attuazione di queste idee richiede un profondo cambiamento della didattica scolastica da trasmissiva a laboratoriale, strutturata per progetti, che incentivi la collaborazione e la discussione tra gli allievi. Nelle attività di robotica educativa, condotte con un approccio di tipo sperimentale, gli alunni acquisiscono competenze provando ed esplorando le possibili soluzioni scaturite da una situazione, seguendo strategie diverse. In questo caso, i possibili errori dovuti a strategie inadeguate, non devono essere concepiti come fallimentari, ma devono essere visti in modo positivo da docenti e allievi. L'errore diventa fonte di apprendimento e gli studenti devono essere motivati a riprovare altre strategie per trovare la soluzione corretta (Moro et al., 2011). Per illustrare quanto descritto riportiamo di seguito un'esperienza di robotica educativa realizzata in una scuola italiana con l'uso del BeeBot; altre esperienze avvenute nelle scuole ticinesi saranno presentate nei prossimi numeri di questa rivista.

5 Percorsi didattici con BeeBot

Nella scuola elementare di Corinaldo (AN), in Italia, sono state realizzate delle esperienze di robotica educativa che hanno coinvolto due classi prime, costituite da 43 allievi in totale, e due quarte costituite da 41 allievi. I percorsi sono stati progettati in modo congiunto da tutto il team dei docenti, essendo basati su un progetto multidisciplinare che coinvolge la matematica, le scienze, la tecnologia, la lingua italiana e l'arte.

Tramite queste sperimentazioni, si è potuto constatare come le esperienze di robotica educativa possano avere una indubbia ricaduta sullo sviluppo cognitivo e personale dell'individuo, permettendo di favorire competenze trasversali, considerate oggi essenziali per la formazione del futuro cittadino, le cosiddette *soft skills*, tra le quali emergono la collaborazione e la capacità di lavorare in gruppo, l'attitudine ad affrontare situazioni-problema, la valorizzazione delle differenze, lo sviluppo della curiosità, dell'attenzione e della motivazione, l'efficacia relazionale e la comunicazione. Allo stesso tempo, queste esperienze sono risultate di supporto alle diverse discipline curricolari, in particolare alla matematica, tramite una didattica per progetti.

Di seguito si riportano le principali competenze mobilitate dai percorsi realizzati tratte da diversi documenti italiani; è possibile rintracciare analoghe competenze nel Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese (DECS, 2015) (vedi link).

DOCUMENTI DI RIFERIMENTO
Competenze Chiave Europee esplicitate in EU (2006); Competenze di Cittadinanza specificate in MIUR (2007); Traguardi di competenza presenti in MIUR (2012); MIUR (2015).
COMPETENZE TRASVERSALI
Spirito di iniziativa e imprenditorialità: risolvere i problemi che si incontrano nella vita e nel lavoro e proporre soluzioni; valutare rischi e opportunità; scegliere tra opzioni diverse; prendere decisioni; agire con flessibilità; progettare e pianificare; valutare i vincoli e le possibilità esistenti, definendo strategie di azione e verificando i risultati raggiunti.
Imparare a imparare: perseverare nell'apprendimento, organizzare il proprio apprendimento attraverso una gestione efficace del tempo e delle informazioni.
Competenze sociali e civiche: collaborare e partecipare, interagire in gruppo, comprendendo i diversi punti di vista, valorizzando le proprie e le altrui capacità, gestendo la conflittualità, contribuendo all'apprendimento comune e alla realizzazione delle attività collettive, nel riconoscimento dei diritti fondamentali degli altri.
Competenze digitali: saper utilizzare con dimestichezza e spirito critico le tecnologie.
TRAGUARDI DI COMPETENZA DISCIPLINARI
Matematica L'alunno/a – Riesce a risolvere facili problemi in tutti gli ambiti di contenuto, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati. Descrive il procedimento seguito e riconosce strategie di soluzione diverse dalla propria. – Costruisce ragionamenti formulando ipotesi, sostenendo le proprie idee e confrontandosi con il punto di vista degli altri. – Riconosce e utilizza rappresentazioni diverse di oggetti matematici. – Utilizza strumenti per il disegno geometrico e i più comuni strumenti di misura. – Sviluppa un atteggiamento positivo rispetto alla matematica, attraverso esperienze significative che gli hanno fatto intuire come gli strumenti matematici che ha imparato a utilizzare siano utili per operare nella realtà.
Tecnologia – Produce semplici modelli o rappresentazioni grafiche del proprio operato utilizzando elementi del disegno tecnico o strumenti multimediali.
Scienze – L'alunno sviluppa atteggiamenti di curiosità e modi di guardare il mondo che lo stimolano a cercare spiegazioni di quello che vede succedere.
Italiano – Partecipa a scambi comunicativi con i compagni e insegnanti rispettando il proprio turno e formulando messaggi chiari e pertinenti, in un registro il più possibile adeguato alla situazione.
Arte – Utilizza le conoscenze e le abilità relative al linguaggio visivo per produrre varie tipologie di testi visivi e rielaborare in modo creativo le immagini.

6 L'approccio metodologico

L'approccio metodologico scelto è legato alla didattica laboratoriale, al lavoro di gruppo e alla didattica ludica che rappresentano potenti mezzi di apprendimento, di sviluppo del pensiero critico e delle competenze rivolte alla risoluzione di problemi.

Il laboratorio didattico è il luogo (e il tempo) in cui si impara insieme, progettando, facendo, costruendo, esplorando, scoprendo, rivedendo le proprie scelte, aggiustandole per migliorare i prodotti; si lavora contemporaneamente alla costruzione di oggetti, di processi di pensiero e di ragionamenti; si impara attraverso il fare (*learning by doing*) consapevole (*learning by thinking*) e collaborativo (*cooperative learning*).

Le allieve e gli allievi sono al centro del processo educativo, sono protagonisti del loro apprendimento, si confrontano e discutono, comunicano e condividono le loro idee. Il ruolo dei docenti cambia e, differentemente da quello che avviene in una lezione frontale, gli insegnanti svolgono il ruolo di "mediatori culturali", supportando, consigliando e aiutando gli allievi nel processo di apprendimento. Anche l'approccio all'errore si modifica: nelle attività presentate l'errore diventa una "risorsa" per migliorare e per migliorarsi.

7 Racconto del percorso con BeeBot nelle classi prime

Prima fase: l'esplorazione e la scoperta

Una mattina, gli allievi sono stati condotti in un ambiente predisposto per svolgere esperienze di laboratorio (una classe alla volta), dove era stato allestito un villaggio delle api con delle casette di cartone (costruite dagli allievi di un'altra classe), contenenti sei api BeeBot.

Figura 1
Le casette delle api BeeBot.

Gli alunni, con l'insegnante di scienze, attraverso brevi video e immagini tratte da internet, avevano precedentemente conosciuto il meraviglioso mondo delle api: i loro comportamenti e l'ambiente di vita, l'importanza della società delle api, la bontà e l'effetto benefico dei loro prodotti; pertanto, disposti in cerchio, si sono subito mostrati incuriositi e si sono avvicinati alle casette per scoprire cosa c'era dentro. Inizialmente, sono stati lasciati completamente liberi di prendere in mano le apine-robot per osservarle e giocarci e, man mano che venivano manipolate, l'interesse di tutti aumentava.

Qualcuno cercava di far camminare l'apina facendola strisciare sul pavimento, altri erano rimasti timorosi e non osavano premere i comandi sul dorso delle apine, altri invece scoprivano le potenzialità dell'artefatto agendo sui tasti comando: *avanti, indietro, gira a destra, gira a sinistra* e *"Go"*. Ogni scoperta era una conquista e orgogliosamente veniva condivisa con i compagni. Ben presto tutti i bambini si sono organizzati e, in modo autonomo, si sono suddivisi in gruppi per sbizzarrirsi in percorsi sempre più complessi: sul pavimento, sotto le gambe, nel "tunnel" dei tavoli, ecc., e, mentre giocavano, si confrontavano, scambiavano idee e scoperte, ipotizzavano percorsi e li sperimentavano, verificando immediatamente la correttezza delle loro programmazioni. Talvolta la verifica immediata li metteva in crisi perché non capivano il motivo per cui l'ape sembrava non rispettare i comandi impartiti, quando per esempio programmavano un certo percorso e poi ne aggiungevano un altro senza cancellare il precedente. Giocando sulle superfici libere, però, era talmente forte il desiderio di veder muovere le apine, che nessuno dei bambini si è preoccupato troppo di questo aspetto.

Operando per tentativi ed errori, gli allievi hanno potuto scoprire personalmente il funzionamento delle apine-robot per poi condividere con gli altri gruppi le proprie intuizioni, argomentandole e, in alcuni casi, accettando di cambiare il proprio punto di vista. In questa fase non era ancora chiaro il significato dei tasti "clear" e "pause".

Figura 2
Esplorazione libera del robot.

Successivamente, i bambini sono stati suddivisi in sei gruppi e, a ciascuno, sono stati consegnati un'ape e un tappeto già predisposto, in modo che tutti potessero ideare diversi tipi di percorsi.

Su alcuni tappeti di tessuto erano stampati ambienti e percorsi stradali, su altri vi erano riprodotte varie figure geometriche disposte in una quadrettatura di lato 15 cm, pari alla lunghezza del passo dell'ape-robot. I bambini che avevano i tappeti non quadrettati hanno cercato personalmente di trovare un modo per misurare la lunghezza di un passo dell'ape, usando le loro mani o altri riferimenti, così da capire quanti comandi si dovevano dare all'ape per farla arrivare in un determinato punto.

Figura 3
Alla scoperta del passo dell'ape robot.

Altri bambini hanno individuato intuitivamente l'ampiezza dell'angolo di rotazione a destra e a sinistra (90 gradi) e, dopo diversi tentativi, hanno fatto l'importante scoperta che l'apina può mantenere in memoria più comandi, fino a quaranta, e che per programmare nuovi percorsi esiste un tasto, "clear", che annulla la programmazione precedente. Hanno inoltre verificato che attraverso il tasto "pause" potevano rallentare il percorso delle apine, programmando dei "riposini" sulle caselle da loro scelte.

Figura 4
I tappeti geometrici.

Alternandosi sui vari tappeti, i bambini hanno fatto eseguire all'ape vari percorsi sulla base dei comandi ipotizzati da loro stessi, ricercando percorsi diversi per complessità (ad esempio facendo camminare l'ape sia in avanti sia indietro), scambiandosi idee e opinioni, così da imparare l'uno dall'altro. I robot sono così diventati per gli allievi "oggetti con cui ragionare" (Papert, 1991; Resnick et al., 1998). Gli insegnanti si sono limitati al ruolo di osservatori, lasciando i bambini liberi di provare e di riflettere su eventuali errori.

Seconda fase: inventiamo le storie

Trascinati dall'entusiasmo, gli alunni di ogni classe, insieme all'insegnante di lingua italiana, hanno inventato, come lavoro collettivo, due storie i cui protagonisti erano le api.

"Amici speciali" è la storia di alcune api che, per ritrovare la strada di casa, che avevano smarrito, vengono aiutate da un orso di nome Pop. Per ringraziare l'orso, organizzano una festa da ballo, ma in questa occasione lui prende freddo e si ammala gravemente. Le api allora, per curare l'influenza del loro amico orso, decidono di andare a recuperare del miele in sei ambienti differenti: in città, in campagna, in montagna, al fiume, al parco giochi e al mare. Trovati i sei contenitori col miele, le api si dirigono verso la grotta, dove vive il loro amico; "riempiono" la pancia dell'orso di miele e lui pian piano riprende le forze e guarisce.

La seconda storia "Super Gelsomina" racconta di un'ape regina che, un giorno, incarica le api operaie di andare a raccogliere polline in sei prati con i fiori di diversi colori: il prato dei fiori bianchi, quello dei fiori rosa, gialli, viola, blu e infine quello dei fiori arancioni. Purtroppo tutte le api che erano partite per la loro missione vengono catturate dal malvagio insetto Cervo Volante. Solo Gelsomina, l'ape meno laboriosa, ma anche la più furba, con uno stratagemma riuscirà a liberare le sue amiche.

Dopo l'invenzione delle storie, si è proposto agli allievi di predisporre gli ambienti per giocare con le apine-robot. Si sono nuovamente formati sei gruppi di lavoro, diversi dai precedenti, ai quali sono stati consegnati dei cartoncini che dovevano fungere da tappeti, sui quali era già disegnata la quadrettatura di lato 15 cm.

I bambini sono stati condotti nel laboratorio creativo, dove erano stati predisposti gli spazi per i lavori di gruppo e diversi materiali: cannucce, cartoncini colorati, spugna da fioraio, vasetti e sassolini (Gelsomina); cartoncini, scatole, glitter, carte di vario genere, pesci costruiti con l'origami, rane (Amici speciali) e piccoli oggetti (conchiglie, macchinine ecc.) che potevano essere utili per realizzare gli elementi adatti a caratterizzare ciascun ambiente.

L'assegnazione degli ambienti (città, campagna, montagna, fiume, parco giochi e mare; diversi tipi di fiori) ai gruppi è stata fatta in base alle scelte dei bambini e il tutto è avvenuto in totale accordo.

Ogni gruppo, progettando, ritagliando, incollando, condividendo e discutendo sulle scelte da fare, ha realizzato l'ambiente in cui l'ape doveva muoversi, in base al contesto specifico della storia.

Per rendere ancora più belli gli ambienti realizzati e per arricchire l'animazione delle storie, alcuni oggetti, come ad esempio l'orsacchiotto e la sua culla, sono stati portati da casa dai bambini stessi.

Il bosco

Il mare

Il parco giochi

La città

Costruzione dei fiori di diversi colori

Figura 5
La costruzione dei diversi ambienti delle storie.

Terza fase: animiamo le storie

Quando tutti i materiali erano pronti, in un ambiente piuttosto ampio, si è predisposto tutto quanto il necessario per animare i momenti in cui le api si adoperano per risolvere il "problema" che si presenta in ogni storia.

Nella storia "Amici speciali", per esempio, le api che devono andare alla ricerca del miele si dividono i compiti: «Molly si dirige verso il bosco, incontra tanti alberi e saluta i suoi amici uccellini; Pinzer lungo il fiume vede tanti cespugli colorati, svolazza con le farfalle e incontra tante rane saltellanti; Friz, attraversa le montagne, saluta gli uccellini, la grande mucca e ronza vicino ai cespugli fioriti; Zip in città, deve fare attenzione alle macchine e alle case che incontra lungo il suo viaggio; Zappy al mare saluta i pescatori sulle barchette e guarda le bellissime conchiglie e i sassi della spiaggia; Flappy al parco giochi incontra i bambini che si divertono sullo scivolo e si dondolano sull'altalena». I bambini, attraverso l'ape-robot rappresentano i vari percorsi vissuti dall'ape della storia.

In modo analogo, nella storia "Super Gelsomina", la protagonista deve andare a liberare le sue amiche api, catturate dal malvagio Cervo Volante attraversando i sei prati caratterizzati dai fiori di diversi colori. In questo caso l'ape-robot rappresenta sempre Super Gelsomina che deve liberare le sue amiche.

Inizialmente ogni classe ha lavorato con la sua storia. I bambini erano sempre suddivisi in sei gruppi, seduti a terra in cerchio, ogni gruppo ha lavorato sul piano quadrettato dell'ambiente che aveva rappresentato, in modo autonomo, accordandosi sul percorso da compiere e sperimentando la programmazione dell'ape-robot. In seguito ogni gruppo, a rotazione, ha mostrato agli altri la soluzione trovata.

Figura 6
Accordi per la preparazione dell'animazione della storia "Amici speciali".

Figura 7
Il gruppo classe pronto per animare la storia "Super Gelsomina".

Tenendo conto del compito che doveva assolvere l'ape-robot (trovare il miele nella prima storia e liberare le api nella seconda), ciascun gruppo ha stabilito il punto di partenza e il punto di arrivo nel proprio tappeto e poi ha programmato il percorso digitando i comandi sull'ape-robot, secondo gli spostamenti necessari. A turno, i vari membri del gruppo facevano muovere l'ape, a volte variando il punto di partenza o quello di arrivo. Nella storia di Super Gelsomina, ad esempio, i fiori erano mobili, quindi potevano essere modificati il punto di partenza, quello di arrivo e la posizione di eventuali ostacoli, determinando la completa variazione della programmazione.

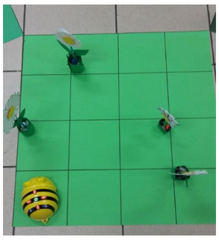
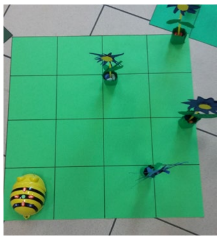



Figura 8
Gli oggetti mobili della storia di Super Gelsomina.

Quando tutti i bambini del gruppo avevano eseguito e verificato la loro programmazione, i vari gruppi, all'interno della classe, si sono scambiati gli ambienti, per sperimentare i diversi percorsi compiuti dalla protagonista della storia.
Quest'attività ha indotto i bambini di ogni gruppo a operare scelte condivise sul tipo e sulla lunghezza del percorso, sul numero degli spostamenti da compiere, sui movimenti che l'ape doveva fare e sui comandi da effettuare.
Nella fase di programmazione sono molto stimolate le capacità di previsione e di ragionamento e l'impatto emotivo è molto forte. Infatti, ogni volta che il robot, eseguendo i comandi impartiti, raggiungeva l'obiettivo prefissato, c'era un'esplosione di gioia, spesso accompagnata da applausi. Ma anche quando questo non accadeva, gli allievi non si sono mai sentiti frustrati; insieme, aiutandosi reciprocamente, riprendevano i robottini e ricominciavano tutto dall'inizio, senza perdere l'entusiasmo.


Figura 9
Le animazioni delle storie.

In seguito le storie sono state condivise: gli alunni delle due classi si sono ritrovati tutti insieme, due bambini avevano il compito di raccontare la storia inventata dalla propria classe, poi ogni gruppo aveva il compito di presentare il proprio lavoro agli altri compagni: la soluzione adottata dall'apina sul tappeto/ambiente. Dopo che tutti avevano illustrato il proprio lavoro, le classi si sono scambiate i tappeti di gioco per sperimentare i percorsi proposti dai compagni.

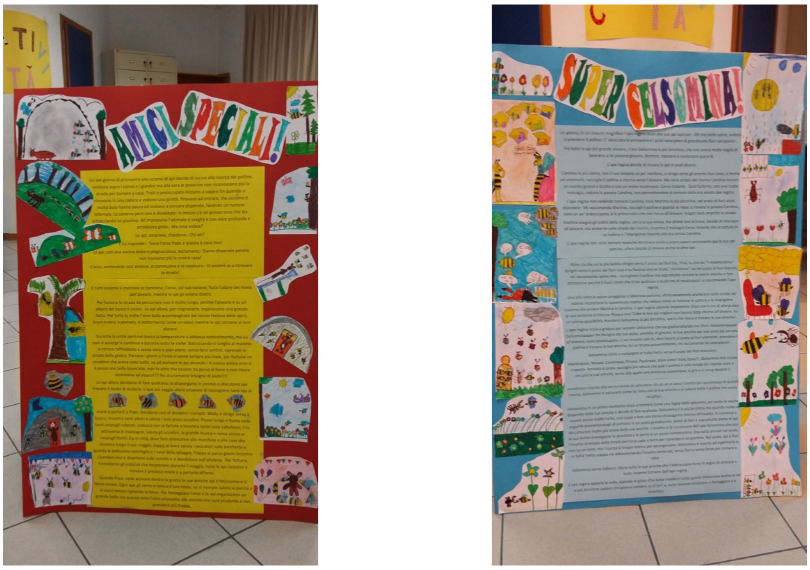


Figura 10
Espositori con il testo delle storie per la condivisione tra le classi.

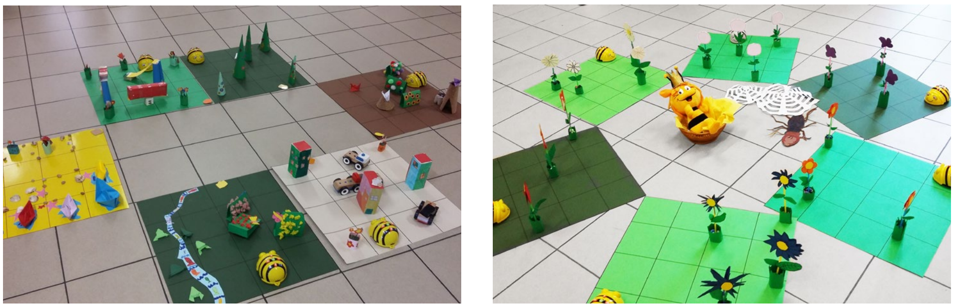


Figura 11
I sei ambienti della storia “Amici speciali” e i sei prati fioriti della storia “Super Gelsomina”.

Quarta fase: rappresentiamo i percorsi

In questa fase sono stati consegnati a ciascun allievo dei fogli, nei quali era rappresentata la stessa quadrettatura dei tappeti/ambienti, e si è chiesto a ciascun bambino di rappresentare sulla griglia gli elementi presenti nel tappeto che avevano realizzato e il percorso compiuto dall’ape-robot, favorendo così il passaggio dallo spazio al piano (Arrigo, Sbaragli, 2004).

Figura 12
La riproduzione degli elementi degli ambienti sulla griglia.

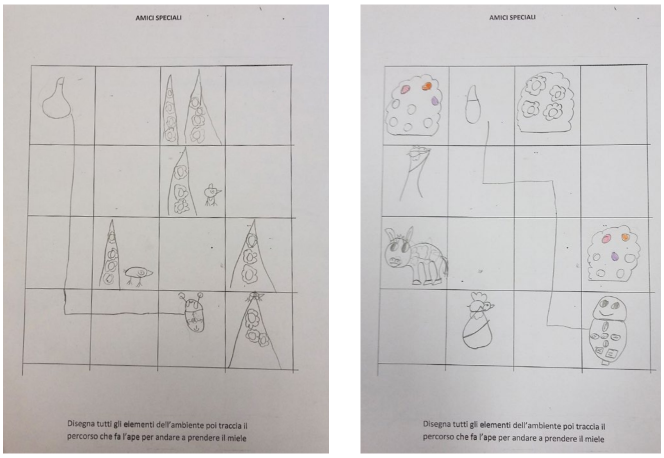


Figura 13
Esempi di rappresentazioni del percorso.

In seguito, è stata messa a disposizione di tutti gli allievi una notevole quantità di cartoncini che rappresentavano i tasti comando di BeeBot: freccia avanti, freccia indietro, freccia a destra, freccia a sinistra e "Go", con i quali dovevano riprodurre la sequenza dei comandi forniti all'apina per compiere il percorso. I cartoncini/comando relativi alla sequenza scelta venivano attaccati sul foglio (**Figura 14**).

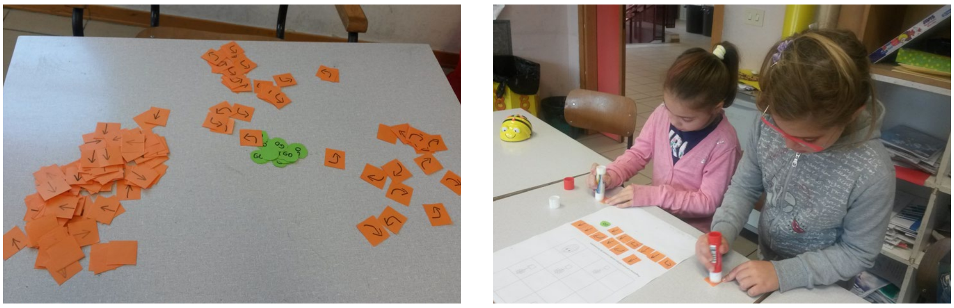


Figura 14
Riproduzione con cartoncini/comandi del percorso dell'ape-robot.

La programmazione descritta è stata poi verificata digitando sul dorso dell'apina-robot la sequenza rappresentata sul foglio (**Figura 15**).

Figura 15
Giochi di percorsi.

Quinta fase: inventiamo nuovi percorsi

In una fase successiva, si è proposto agli alunni di inventare e scrivere il "codice" di nuovi percorsi,

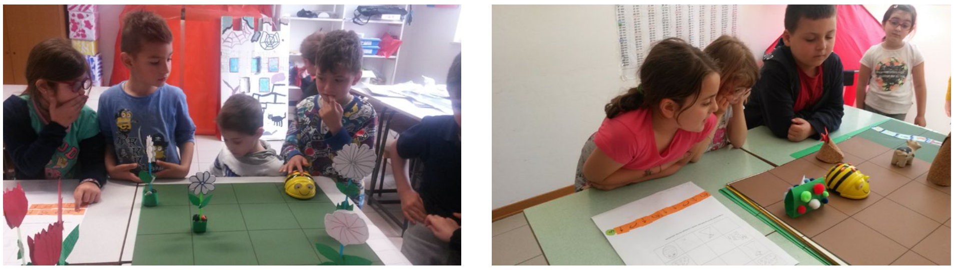


Figura 16
Dal "codice" ai percorsi e viceversa.

oppure di riprodurre percorsi in base a una sequenza di comandi assegnata dall'insegnante.

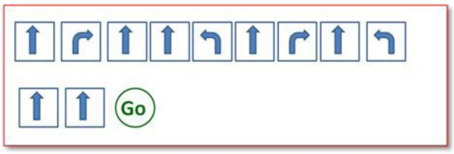


Figura 17
Esempio di sequenza di comandi fornita dalla docente.

8 Racconto del percorso nelle classi quarte: inventiamo dei tappeti gioco

Gli alunni delle due classi quarte della scuola elementare di Corinaldo, incuriositi dai robot apine che circolavano nella scuola, hanno vissuto anche loro un interessante percorso. Il BeeBot è indubbiamente un artefatto particolarmente adatto al primo ciclo della scuola dell'obbligo, ma un nuovo oggetto suscita sempre curiosità, a tutti i livelli, anche tra gli insegnanti. Inoltre, queste due classi non avevano mai svolto esperienze di robotica educativa. Anche per loro, quindi, è stato interessante scoprire il funzionamento delle apine-robot.
La fase iniziale, di esplorazione e scoperta, è stata proposta in modo analogo alle classi prime: gli allievi hanno trovato in aula dei pacchetti contenenti le apine e hanno subito cercato di capire il loro funzionamento. Le prime esplorazioni sono state svolte sui tavoli o sul pavimento, quindi su superfici libere, scoprendo ben presto le possibilità di movimento delle apine-robot. In seguito, sono stati forniti anche a loro i tappeti con le figure geometriche.
I ragazzi hanno lavorato in gruppi di tre o quattro allievi: uno del gruppo stabiliva la partenza e il percorso da seguire e un altro eseguiva la programmazione, il terzo (o gli altri due) controllava che il percorso si svolgesse in modo corretto.

Le insegnanti delle classi quarte avevano pensato di utilizzare BeeBot per proporre agli alunni la creazione dei percorsi su contenuti disciplinari, quindi, dopo le prime esplorazioni, prendendo spunto dal piano con le figure geometriche è stato proposto agli allievi di inventare dei piani quadrettati e dei possibili percorsi utilizzando le loro conoscenze matematiche, scientifiche, linguistiche, storiche, geografiche, ecc.

Sono stati creati sempre sei gruppi, perché sei erano le api a disposizione, ed è stato chiesto di ideare e realizzare vari tappeti in base ai loro interessi; gli allievi sono stati lasciati completamente liberi di progettare e di inserire contenuti disciplinari a piacere.

I ragazzi di ogni gruppo hanno inizialmente progettato il loro tappeto-gioco in formato ridotto sui loro quaderni (**Figura 18**), in seguito hanno discusso sui modi per rappresentare i movimenti dell’ape robot scegliendo spontaneamente i simboli per scrivere la sequenza di comandi.

Figura 18
La fase di progettazione.

In seguito, nell’aula predisposta per svolgere attività di laboratorio, si sono realizzati i tappeti utilizzando dei cartoncini bristol (**Figura 19**) e sono state programmate le api-ne-robot seguendo la sequenza di comandi ipotizzata, verificandone così la correttezza. Le due classi si sono poi scambiate i tappeti-gioco (**Figura 20**). Si riportano alcuni esempi di tappeti realizzati da alcuni gruppi (**Figura 21** e [link]).

Figura 19
La preparazione dei tappeti.

Figura 20
Un momento di gioco.

Figura 21
Alcuni esempi di tappeti realizzati.

9 Conclusioni

I percorsi di robotica educativa hanno contribuito a creare un ambiente di apprendimento innovativo, creativo e divertente e hanno appassionato e coinvolto sia i docenti sia gli allievi. Durante le varie fasi di lavoro, i docenti hanno osservato se e come gli allievi riuscivano a mobilitare le competenze individuate a priori, in particolare: se sapevano organizzarsi, se erano capaci di definire le varie tappe per raggiungere i loro obiettivi, se riuscivano ad analizzare le informazioni a disposizione e a interpretare le situazioni in base alle informazioni possedute, se sapevano operare scelte ragionevoli in base alle risorse a disposizione e ai vincoli dettati dai vari contesti (le storie, la programmazione scritta), se riuscivano a condividere e argomentare le proprie scelte e ad accettare di confrontarle con gli altri del gruppo ed eventualmente rivederle, se erano disposti a collaborare con gli altri. Le osservazioni che i docenti annotavano in ogni fase, sono servite per restituire dei feedback agli allievi e guidarli in modo che potessero regolare le loro azioni nei momenti successivi.

Questi percorsi hanno agito in modo formidabile sulla motivazione degli allievi di entrambe le classi e sulla mobilitazione di varie competenze trasversali: essere nella condizione di poter effettivamente governare una macchina, di compiere scelte che determinano il suo funzionamento e di agire per il raggiungimento di un obiettivo immediatamente verificabile, costituiscono stimoli molto forti alla partecipazione attiva, al lavoro collaborativo, all'impegno e alla perseveranza. Allo stesso tempo, questi percorsi hanno permesso di approfondire aspetti disciplinari in modo ludico e stimolante. Anche gli alunni con bisogni educativi speciali si sono appassionati e hanno trovato in queste esperienze il loro modo di esprimersi e di partecipare in modo attivo con un evidente miglioramento dell'integrazione e della fiducia nelle loro capacità.

Si è inoltre potuto confermare ciò che è sostenuto nel quadro teorico, ossia che le attività di approccio alla programmazione e alla robotica possono consentire ai bambini di pensare in maniera algoritmica alla risoluzione di problemi, ideando e sviluppando procedimenti e soluzioni. Insieme con abilità e strategie di programmazione, i percorsi di robotica educativa hanno consentito di sviluppare le capacità di previsione e di verifica, di analisi, sintesi e in alcuni casi di generalizzazione.

In questi percorsi, l'errore è stato considerato da tutti gli attori coinvolti nella sperimentazione come un atto fondamentale per risolvere la situazione-problema. Nella programmazione, infatti, è molto importante l'attività di riflessione sulla coerenza tra pianificazione ed esecuzione, in base al traguardo da raggiungere, e soprattutto l'attitudine a progettare e a mettere in gioco strade risolutive alternative in caso di incoerenza. I risultati ottenuti in questa sperimentazione non devono però illudere il docente che basti un robot in classe per mobilitare competenze; ciò che rimane fondamentale è la sensibilità didattica dell'insegnante nel gestire la situazione, la criticità nei confronti delle proposte e la relazione umana tra docente e allievo, e questo è indipendente dagli artefatti forniti (D'Amore, Fandiño Pinilla, 2014).

Bibliografia

Arrigo, G., & Sbaragli, S. (2004). *I solidi. Riscopriamo la geometria.* Roma: Carocci.

Bartolini Bussi, M. G., & Mariotti, M. A. (2009). Mediazione semiotica nella didattica della matematica: artefatti e segni nella tradizione di Vygotskij. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 32 A-B*, 270-294.

Beltrametti, M. (2014). La creatività delle tecnologie nella didattica. *Scuola Ticinese, 3*, 25-28.

Benitti, F. B. V. (2012). Exploring the educational potential of robotics in schools: A systematic review. *Computers & Education, 58*(3), 978–988.

Calmet, C., Hirtzig, M., & Wilgenbus, D. (2016). 1,2,3… *Codez! Enseigner l'informatique à l'école et au collège.* Paris: Editions Le Pommier.

Catlin, D., & Woollard, J. (2014). Educational Robots and Computational Thinking. In *Proceedings of 4th International Workshop Teaching Robotics, Teaching with Robotics & 5th International Conference Robotics in Education*, 144-151.

Consiglio Federale (2010). *Carenza di personale specializzato MINT in Svizzera*. Berna: Consiglio Federale.

Cottino, L., Gualandi, C., Nobis C., Ponti, A., Ricci M., Sbaragli, S., & Zola, L. (2011). *Geometria*. Bologna: Pitagora.

D'Amore, B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2014). Illusioni, panacee, miti nell'insegnamento-apprendimento della matematica. *Difficoltà in Matematica, 11*(1), 89-109.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2016). A proposito di "metodi di insegnamento" univoci. Errori pedagogici, epistemologici, didattici e semiotici delle metodologie univoche. La *Vita Scolastica web* [web magazine]. Disponibile in http://www.giuntiscuola.it/lavitascolastica/magazine/articoli/a-proposito-di-metodi-di-insegnamento-univoci/ (consultato il 22.04.2017).

Damiani, P. (2015). TCR e scuola: dallo strumento alla didattica. In R. Grimaldi, (a cura di), *A scuola con i robot: innovazione didattica, sviluppo delle competenze e inclusione sociale*, Bologna: Il Mulino, pp. 95-131.

EU (2006). Raccomandazione del Parlamento europeo e del Consiglio. Disponibile in http://eur--lex.europa.eu/LexUriServ/LexUriServ.do?uri=OJ:L:2006:394:0010:0018:it:PDF (consultato il 8.04.2017).

Grimaldi, R. (2015). *A scuola con i robot: innovazione didattica, sviluppo delle competenze e inclusione sociale.* Bologna: Il Mulino.

Holmquist, S. (2014). *A multi-case study of student interactions with educational robots and impact on Science, Technology, Engineering, and Math (STEM) learning and attitudes*. Graduate Theses and Dissertations, University of South Florida.

Johnson, L., Adams Becker, S., Cummins, M., Estrada, V., Freeman, A., & Hall, C. (2016). *The NMC Horizon Report: 2016 Higher Education Edition.* Austin: The New Media Consortium.

Julià, C., & Antolí, J. Ò. (2016). Spatial ability learning through educational robotics. *International Journal of Technology and Design Education, 26*(2), 185–203.

Lodi, M. (2013). *Imparare il pensiero computazionale, imparare a programmare*. Tesi di dottorato, Università di Bologna.

Martini, B., & Sbaragli, S. (2005). *Insegnare e apprendere la matematica.* Napoli: Tecnodid.

Mitnik, R., Nussbaum, M., & Soto, A. (2008). An autonomous educational mobile robot mediator. *Autonomous Robots, 25*(4), 367–382.

MIUR (2007). *Regolamento sull'obbligo d'istruzione - D.M. 139/2007.* Disponibile in https://archivio.pubblica.istruzione.it/normativa/2007/allegati/all2_dm139new.pdf (consultato il 8.04.2017).

MIUR (2012). Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione. Disponibile in http://www.indicazioninazionali.it/documenti_Indicazioni_nazionali/indicazioni_nazionali_infanzia_primo_ciclo.pdf (consultato il 8.04.2017).

MIUR (2015). *Pagelle più ricche, al via la Certificazione delle competenze*. Disponibile in http://www.istruzione.it/comunicati/focus170215.html (consultato il 8.04.2017).

Moro, M., Menegatti, E., Sella, F., & Perona, M. (2011). *Imparare con la robotica: applicazioni di problem solving.* Trento: Erickson.

Nardelli, E. (2017, 2 febbraio). *Informatica e pensiero computazionale, nuovi linguaggi per descrivere il mondo*. Disponibile in http://www.ilfattoquotidiano.it/2017/01/02/informatica-e-pensiero-computazionale-nuovi-linguaggi-per-descrivere-il-mondo-ii/3288985/

Norman, D.A. (1995). *Le cose che ci fanno intelligenti*. Milano: Feltrinelli.

Nugent, G., Barker, B., Grandgenett, N., & Adamchuk, V. (2009). The use of digital manipulatives in K-12: robotics, GPS/GIS and programming. *Proceedings of the Frontiers in education conference*. San Antonio.

OECD (2015). *Students, Computers and Learning: Making the Connection*. PISA, OECD Publishing.

Owens, G., Granader, Y., Humphrey, A., & Baron-Cohen, S. (2008). LEGO therapy and the social use of language programme: an evaluation of two social skills interventions for children with high functioning autism and Asperger Syndrome. *Journal of Autism and Developmental Disorders, 38*(10), 1944–1957.

Papert, S. (1984). *Mindstorms. Bambini computers e creatività.* Milano: Emme edizioni.

Papert, S. (1991). Situating constructionism. In S. Papert e I. Harel (a cura di). *Constructionsim*. Norwood: Ablex publishing Corporation.

Piaget, J. (1954). *The construction of reality in the child*. New York: Basic books.

Polya, G. (1967). *Come risolvere i problemi di matematica. Logica e euristica nel metodo matematico.* Milano: Feltrinelli. [Ed. orig. 1945, Princeton University Press].

Radford, L. (2005). Body, Tool, and Symbol: Semiotic Reflections on Cognition. In E. Simmt and B. Davis (eds.)(2005). *Proceedings of the 2004 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group*.

Radford, L. (2006). The Anthropology of Meaning. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 39-65.

Resnick, M., Martin, F., Berg, R., Borovoy, R., Colella, V., Kramer, K., & Silverman, B. (1998). Digital manipulatives: new toys to think with. In C.-M. Karat, A. Lund, J. Coutaz, & J. Karat (eds.), *Proceedings of the SIGCHI Conference on Human Factors in Computing Systems* (CHI '98), 281-287.

Sbaragli, S. (2015). I pericoli del "quadretto". *La vita scolastica*, 8, 16-18.

Sullivan, F. R. (2008). Robotics and science literacy: thinking skills, science process skills and systems understanding. *Journal of Research in Science Teaching, 45*(3), 373–394.

Wing, J. (2006). *Computational Thinking. Communications of the ACM, 49*(3), 33-35.

Allegati

1. Competenze tratte dal Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese (DECS, 2015)
2. Storia "Amici speciali"
3. Storia "Super Gelsomina"
4. Alcuni esempi di tappeti realizzati dai gruppi di allievi di quarta

Autori: **♦Marco Beltrametti, °Lorella Campolucci, °Danila Maori,**
***Lucio Negrini e *Silvia Sbaragli.**
♦Pedagogista, °I.C. Corinaldo (AN, Italia) - RSDDM Bologna
*Dipartimento formazione e apprendimento, SUPSI
mbeltrametti@supsi.ch, lorella.campolucci@tiscali.it, danilamaori@libero.it,
lucio.negrini@supsi.ch, silvia.sbaragli@supsi.ch

Recensioni

DdM

Overdeck, L. (2015). *La Matematica della Buonanotte. Una buona scusa per stare alzati fino a tardi*. Illustrazioni di Jim Paillot. Milano: Vallardi.
Una buona scusa per stare alzati fino a tardi: la Matematica. E lo scriviamo con la maiuscola, perché è la Matematica, quella vera, che esce dai racconti di una mamma alla sua bimba, prima di addormentarsi. I racconti partono dal mondo della bimba, un mondo fatto di animali fantastici, di alimenti molto particolari, di mezzi di trasporto, di tutti quegli elementi del mondo degli adulti che la fantasia dei bambini rielabora. A partire da questi racconti, nascono alcune domande. Sono semplici domande sui numeri e sulle forme. Nulla di diverso, apparentemente, dai soliti problemi dei primi anni di scuola primaria. Quello che è diverso è il modo in cui questi problemi arrivano al bambino, il contesto di racconto che diventa gioco e quindi domanda, domanda vera.
Il libro è una raccolta di brevi racconti contrappuntati da illustrazioni, piccole storie da leggere ai bambini prima di addormentarsi, storie che si concludono con alcune domande "matematiche" sui personaggi e le loro caratteristiche.
Il libro mi è piaciuto. Innanzitutto, è ben scritto, e le figure sono simpatiche, attraenti, senza avere quel tratto un po' melenso di molta illustrazione per bambini di oggi. L'idea di far scaturire delle domande di matematica da un racconto funziona: lo stesso pretesto narrativo offre la possibilità di proporre piccole "sfide" di livello diverso, per i "principianti", per gli "apprendisti" e per i "provetti. Il momento della buonanotte è un momento di intimità, con un forte coinvolgimento emotivo, un momento in cui tutte le cose si sfumano in un quadro di serenità… una serenità che forse il bambino si porterà dietro, anche quando il contesto della scuola tenderà a caricare di ansia e tensione l'incontro con la matematica.
Questo libro suggerisce agli adulti, con semplicità, un modo diverso, ma molto più naturale, per fare incontrare la matematica ai bambini.
Un unico appunto: forse, la stessa fantasia che l'autrice ha nel raccontare storie poteva essere applicata nella scelta delle domande di matematica, che sono talvolta un po' scontate. Anche con i bimbi piccoli si può osare un po' di più. Comunque consigliato a tutti quelli che hanno figli, nipoti, cuginetti tra i 4 e i 7 anni.

Giorgio Bolondi
Libera Università di Bolzano

Odifreddi, P. (2016). *Dizionario della stupidità*. Milano: Rizzoli.
Credo che tutti conoscano la celebre frase di Einstein: *Due cose sono infinite, l'universo e la stupidità umana, ma sull'universo ho ancora dei dubbi*; e il trattato dell'economista Carlo Cipolla del 1976, *Le leggi fondamentali della stupidità umana*, che enuncia i famosi 5 principi sulla stupidità. Ma in questo dizionario queste citazioni sono solo due voci, in una raccolta che ne comprende centinaia, che vanno dalle cravatte a Grillo, dalla monogamia agli OGM, dai vampiri agli Ig Nobel, un repertorio notevole, esilarante e profondo.
C'è di tutto, in tutti i campi possibili, dalla religione alla letteratura, dalla scienza all'arte, dalla politica all'economia. Dietro l'eufemismo della battuta ironica, si nascondono verità etiche e sociali, grazie a un modo di saper vedere e interpretare quel che accade nel mondo, le credenze più banalmente e acriticamente diffuse, i modi d'essere vuoti e insensati. Basti leggere le voci "immigrati", "petrolio", "Maometto", "immacolata", "velo", tanto per fare alcuni esempi.

Alcune posizioni dell'autore sono contro corrente, lo sa lui per primo, irriverente e … impertinente, e lo sanno i lettori; ma sempre profondamente logiche e dannatamente ragionevoli; e ogni voce fornisce una grande quantità di informazioni, in ogni campo, con dettagli preziosi per chi ama la citazione colta. Spesso l'ironia è pungente, insolente e sottile; a volte è violenta, specie nei riguardi di chi si riconosce nel soggetto definito "stupido" e descritto in una voce. Il che capiterà più d'una volta, a qualsiasi lettore. Ma proprio questo è il vantaggio di chi è disposto a leggere con capacità autocritica, evitare d'essere annoverato tra gli stupidi, almeno per qualche ragione che potrebbe essere evitata.

Bruno D'Amore
Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Danese, B. (2015). *Laboratorio in scatola*. Verona: Edizione Reinventore.

Spesso si accusa la matematica di essere una scienza astratta e perciò arida, cioè secca, asciutta, nel senso che si costruisce solo nella mente, nulla a che fare con la realtà, non si possono fare prove di laboratorio; anche se questo non è del tutto vero, come mostrano i tanti "laboratori di matematica" disseminati nelle nostre scuole, indubbiamente la matematica soffre un po' nel confronto ludico con le scienze.

Caspita, qui bastano bottiglie di plastica piene d'acqua messe in frigo la sera prima, pipette, candele, bicchieri capovolti, un po' di colorante alimentare blu, foglietti di carta, sale da cucina, allume, due gocce d'olio, una pompa da bicicletta ecc. insomma cose facili da trovare, a disposizione di chiunque, e si possono fare esperimenti bellissimi alla portata di tutti, esperimenti che sorprendono, conquistano, insegnano, divertono, entusiasmano.

Se poi vieni a sapere che questi apparenti giochi sono stati proposti nella storia da Marie Curie, Galileo Galilei, Marcello Malpighi, Frank Oppenheimer, Alessandro Volta, Robert Boyle, Michael Farady, … beh, allora ti senti un vero scienziato anche tu.

A questa gioiosa attività scientifica, ricca di sorprese e di apprendimenti indimenticabili ci conduce Beniamino Danese, con questo divertente, spiritoso ma colto libro, nel quale raccoglie e descrive con cura un bel po' di esperimenti facili da realizzare, ma tali da lasciare un'impronta scientifica di alto livello.

E poi ci sono le storie, e che storie! Narrate in maniera avvincente; ci riportano all'epoca nella quale ciascuno di questi scienziati visse, e lo fanno con eleganza e semplicità, con una narratività trascinante.

La cosa che colpisce è che questi esperimenti sono pensati per le classi di scuola primaria, dunque con conoscenze scientifiche di base quasi nulle; stanno in piedi da sé, senza bisogno di precedenti fasi di preparazione. Sorprendono proprio perché sono immediatamente comprensibili e realizzabili.

Le compiono insieme insegnanti e allievi, ma le potrebbero senz'altro effettuare da soli gli studenti, in modo opportuno.

Beniamino, l'autore, è dottore di ricerca in fisica ma si delizia a raccontare e far vivere la scienza ai bambini (e agli insegnanti), con sorpresa, come fosse un viaggio affascinante e allegro, come di fatto è. Con il fratello (gemello) Emanuele ha fondato la società Reinventore che non solo pubblica in proprio questo libro piacevolissimo, ma fornisce anche kit già predisposti per rendere più snella la fase di preparazione di questi esperimenti. Si tratta di un libro di poco meno di 100 pagine, pieno di illustrazioni, racconti,

fotografie, immagini, una vera facile guida agli esperimenti in vari campi delle scienze: fisica, chimica, anatomia, biologia, …
Un vero gioiello didattico che raccomandiamo a tutti gli insegnanti di primaria che hanno a cuore l'insegnamento-apprendimento delle scienze.

Bruno D'Amore
Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Nicosia, G. G. (2016). Matematica e scuola in Cina, Corea e Giappone. Elementi culturali estremo - orientali per la didattica della matematica. Bologna: Pitagora.
Al di là delle mille ghiotte notizie su tre mondi che sì, hanno parecchio in comune, ma anche differenze notevoli (che, nella nostra ignoranza occidentale, tendiamo a trascurare), si tratta di un libro colto, avvincente e appassionante che vale la pena leggere con estrema attenzione.
Che cosa sia il pensiero matematico in Cina, Corea e Giappone e come lo si interpreta da un punto di vista scolastico, lascerà di stucco più di un lettore. Perché ci sia questa diffusa convinzione sul fatto che i bambini cinesi siano "più portati" alla matematica dei bambini nostrani, verrà finalmente chiarito. Che legami ci siano o, meglio, non ci sono, fra il nostro modo di intendere la didattica e il loro, è perfettamente messo in luce. Ma quel che più colpisce è l'idea di scuola che emerge, l'idea di che cosa sia l'impegno scolastico in genere, e nella matematica in particolare.
Giovanni Giuseppe ci racconta del suo viaggio di studio in Estremo Oriente, ma anche dei suoi studi così settoriali precisi e profondi. Colpisce molto la scansione dei programmi scolastici che, fin dalla scuola primaria, sono concepiti in modo così profondamente diverso dai nostrani. Come e che cosa si intende per "risolvere un problema", a casa e a scuola. Che cosa sia una vera attività matematica pomeridiana, che relazione vi sia fra la richiesta del docente, quella della scuola, della famiglia, l'impegno personale profuso per avere successo. E poi ci sono i termini matematici, aritmetici e geometrici; la profonda differenza di interpretazione dell'idea stessa di matematica; l'uso di strumenti di calcolo, tra i quali spicca il più famoso, il soroban, che ho visto l'autore GG illustrare a bambini e insegnanti appassionati anche in Italia; che cosa intendere per "dimostrazione"; come la lingua cinese entri a far parte del senso stesso dell'apprendimento della matematica; come l'errore individuale sia compartito e fatto proprio all'interno di un gruppo di lavoro in aula; l'importanza storica, etica, estetica degli algoritmi nei diversi Paesi; se il grande pensatore Confucio debba e possa essere considerato un matematico; fantastici esempi di problemi; come avviene la formazione dei docenti, …
Ci sono insomma mille motivi diversi e tutti significativi per leggere questo libro quale che sia il livello scolastico al quale si insegna matematica; anzi, anche se non si insegna matematica perché l'informazione dotta che se ne trae supera in grande misura la disciplina stessa e si fa discorso generale.
A me, poi, amante dell'etnomatematica, più volte citata dall'Autore, questo libro è piaciuto immensamente anche per il totale rispetto delle differenti civiltà, senza la solita pretesa di confrontarle sempre con la nostra. Un atteggiamento di rispetto colto e significativo che mi ha affascinato.
Altro punto molto interessante e attraente è la differente idea di logica che appartiene a questi mondi, così lontana da quella aristotelica alla quale noi siamo appassionatamente legati in maniera miopicamente univoca. Sembra un punto di distanza banale,

ma non lo è; forse, insieme alle tre diverse lingue (che, poi, in realtà, sono assai di più), è uno dei nodi cruciali adatti a spiegare le differenze.

Bruno D'Amore
Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Laparra, M. & Margolinas, C. (2016). *Les premiers apprentissages scolaires à la loupe. Des liens entre énumération, oralité et littératie*. Louvain-la-Neuve: De Boeck.
Marceline Laparra e Claire Margolinas sono rispettivamente studiose di didattica della lingua francese e della matematica; la seconda è ben nota al pubblico italiano per essere una delle allieve dirette di Guy Brousseau, per aver tenuto conferenze al convegno *Incontri con la Matematica* di Castel San Pietro Terme, per aver più volte pubblicato lavori di ricerca in didattica della matematica in Italia.
Questo libro è un bell'esempio da imitare: un incontro di ricerca e di analisi didattiche che coinvolge due discipline che, invece di essere agli antipodi, come ritengono alcuni ingenui, hanno profondi legami. Basti solo questo: spesso viene considerata mancanza di conoscenza matematica quella che, a rigore, è incapacità di interpretazione del testo scritto. Alcuni insegnanti sono abituati a parafrasare, a interpretare, a disambiguare i testi scritti, per esempio dei problemi di matematica; tanto che, quando il bambino deve affrontare la lettura di essi da solo, non sa interpretarne il testo, non capisce il senso dei dati e della domanda, non sa disambiguare eventuali punti oscuri. Non risolve il problema o non capisce il testo, non per deficienze in matematica, ma per disabitudine all'interpretazione linguistica. Ma questo non è che un esempio.
Si pensi al diffuso uso che si fa della lingua comune in matematica, non solo nel testo dei problemi, ma anche nelle descrizioni, nelle definizioni, nelle narrazioni, nelle illustrazioni delle figure e delle attività, nella spiegazione degli algoritmi.
E viceversa. Come ha mostrato in Italia la collega e amica Maria Luisa Altieri Biagi fin dagli anni '80, far proprio l'apparato logico della lingua italiana (scritta e orale) è fondamentale per poter far uso corretto e soprattutto consapevole della lingua stessa. Non è un caso che, nel corso delle riunioni e discussioni di studio per la redazione dei famosi *Nuovi Programmi* del 1985, Maria Luisa era spesso invitata a far parte del gruppo dei matematici.
Questo libro di Marceline e Claire è dedicato alla scuola dell'infanzia, valore in più, secondo me, perché sono pochi i lavori di ricerca, così brillanti per questo importante segmento scolare che, invece, merita di più. E spero sia un esempio da seguire per chi è disposto a scommettere sull'intersezione fra queste due tipologie di ricerche. Qui enumerazione, oralità e basi letterarie sono considerate come un tutt'uno, come dovrebbe essere e come, spesso, non è.

Bruno D'Amore
Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Bauman, Z. (2016). *Scrivere il futuro*. Roma: Lit.
Per favore, procuratevi questo libro, cercatelo dovunque, leggetelo, rileggetelo, non fatevelo sfuggire. È una delle cose più intelligenti, significative e profonde pubblicate recentemente. D'altra parte, è stato scritto da Zygmunt Bauman, famoso alle masse

per l'idea di *società liquida* che ha fatto il giro del mondo, uno dei motti più famosi degli ultimi decenni. Si tratta di un testo di pochissime pagine che finisce con due citazioni straordinarie, quella della storia personale di Václav Havel e quella di Antonio Gramsci, secondo la quale la storia non va vissuta, subìta, va *fatta* da noi stessi. E comincia con l'analisi critica della posizione di Pierre-Simon Laplace sul determinismo causale. Lo scritto, brevissimo, ripeto, ma infinitamente incisivo, tratta del problema più sentito del nostro periodo, che si può condensare nel dibattito fra mixofobia e mixofilia: il rifiuto del diverso, dello straniero, come atteggiamento di base, e l'atteggiamento contrario, l'accettazione del confronto fra culture. L'argomento è trattato con una logica magica dalla quale scaturisce una posizione di un'intelligenza etica senza pari che ti lascia esterrefatto. Bauman, come suo solito, tratteggia palcoscenici rigorosamente delineati, non basati su sensazioni o atteggiamenti moralistici, ma sull'evidenza storica, quella che ci permette, appunto, di scriverci da noi la storia. La proposta di Bauman si basa sul fatto che il determinismo laplaciano è stato messo in crisi dalla scienza stessa che ha cominciato a riflettere su sé stessa dando al dubbio, all'idea di evoluzione storica, alla casualità rilevanze epistemologiche che le sono mancate per millenni. Un libro dotto, profondo, unico che qualsiasi persona sensibile deve assolutamente conoscere. Si tratta della conferenza che Bauman ha fatto il 1° agosto 2014 a Civitanova Marche, tradotto in modo perfetto da Cristina Guarnieri e prefatto dal linguista Massimo Arcangeli in modo significativo, molto problematico, dando spazio a sua volta all'analisi di termini oggi così pronunciati, spesso a sproposito.
Nulla a che fare con la matematica? La matematica è disciplina umanistica, dato che è creata da esseri umani per bisogni concreti o astratti umani. Dunque, l'essere umano è comunque al centro di tutti gli interessi di tutti gli studiosi. E il matematico, nel creare la matematica, scrive il suo futuro. Proprio come l'atteggiamento suggerito da Bauman.

Bruno D'Amore
Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Zan, R. (2016). I problemi di matematica – difficoltà di comprensione e formulazione del testo. Roma: Carocci Faber.

Il libro tratta un tema complesso, affascinante e cruciale nell'insegnamento della matematica: quello dell'attività di risoluzione di problemi. Attività che non di rado è motivo di difficoltà per gli studenti, e di conseguenza per gli insegnanti che non riescono a incidere su tali difficoltà. Come sua consuetudine, Rosetta Zan è partita da un problema vivo della pratica didattica per iniziare un lungo percorso di ricerca mirato alla costruzione di strumenti per la comprensione del fenomeno e la conseguente ricerca di soluzioni significative dal punto di vista didattico. Percorso di ricerca che si è sviluppato per la scuola e con la scuola: caratteristiche non scontate, che emergono chiaramente anche dalla lettura del libro. Così come emerge, costantemente in tutti i capitoli, la voce degli studenti: le loro emozioni, convinzioni, intelligenze e difficoltà.
Altro aspetto di qualità del libro, marchio di fabbrica dell'autrice, è la capacità di coniugare la profondità di analisi e la considerazione della complessità dei fenomeni didattici (non si corre mai il rischio di vederli banalizzati), alla chiarezza espositiva e alla volontà di favorire riflessioni autonome del lettore sui fenomeni descritti (attraverso diverse attività di riflessione sparse nel testo). Andando ad analizzare più puntualmente i contenuti del libro, scorrendo l'indice troviamo 6 capitoli, ai quali si aggiungono: un'appendice,

all'interno della quale sono raccolti i 54 problemi discussi nel testo; l'indice analitico dei problemi utilizzati; la bibliografia.
In definitiva il libro, sicuramente molto interessante e ben scritto, è potenzialmente di grande interesse sia per chi osserva l'insegnamento della matematica come fenomeno da studiare (il ricercatore) che, soprattutto, per chi lo vive (l'insegnante). Vista la particolare attenzione per i cosiddetti problemi verbali, ci si rivolge in particolare al primo ciclo di insegnamento: la scuola primaria e la scuola secondaria di primo grado.

Pietro Di Martino
Università di Pisa