

XXXIII Convegno UMI-CIIM  
*Criticità per l'insegnamento della matematica nella scuola di oggi*  
Pavia, 7-9 ottobre 2016

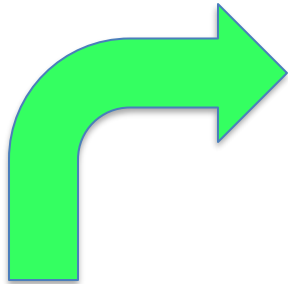
Il testo di un problema:  
*quello è il problema!*

Rosetta Zan  
rosetta.zan@unipi.it

'problema' come etichetta che individua un certo tipo di compito di matematica a scuola

Il testo di un problema:  
*quello* è il problema!

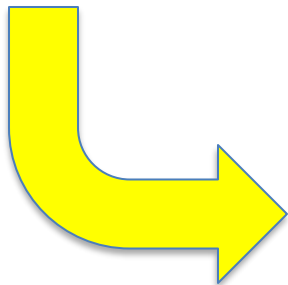
'problema' come situazione difficile da risolvere, fonte di disagio...



'problema' come etichetta che individua un certo tipo di compito di matematica a scuola

Problemi  
realistici

...sto di un problema:  
...ello è il problema!

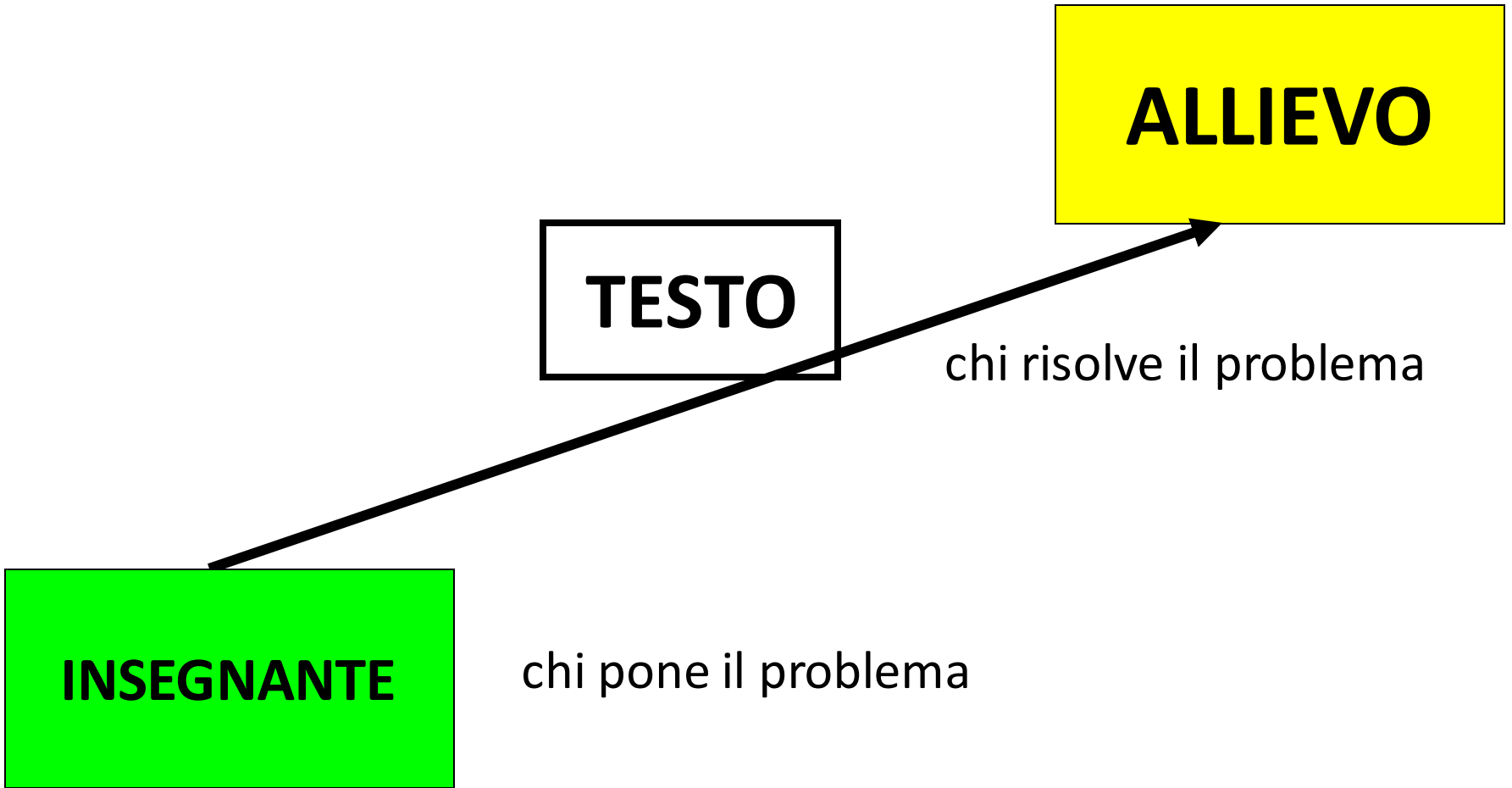


'problema' come situazione difficile da risolvere, fonte di disagio...

Il testo di un problema:  
*quello* è il problema!



problema espresso attraverso un testo (scritto):  
problema verbale (word problem)



problema espresso attraverso un testo (scritto):  
problema verbale (word problem)

# L'attività di risoluzione di problemi

È un'attività cruciale nell'insegnamento della matematica, cui l'insegnante dedica molte risorse

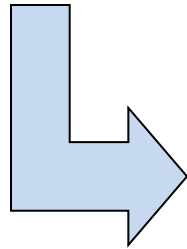
Ma...

... è anche l'attività in cui si riscontrano le maggiori difficoltà degli allievi:

- nella pratica di tutti i giorni
- nelle prove di valutazione esterne: OCSE-PISA, INVALSI...
- testimoniate dalla ricerca internazionale

ISRAELE

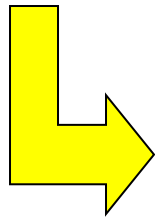
Quale sarà la temperatura dell'acqua in un recipiente se metti insieme una caraffa d'acqua a 10° e una a 40°?



$$10^{\circ} + 40^{\circ} = 50^{\circ}$$

STATI UNITI

Un camion dell'esercito può portare 36 soldati. Se bisogna trasportare 1128 soldati alla loro base, quanti camion servono?



45.000 studenti  
"31 col resto di 12" (29%)  
"31" (18%)

Su un battello ci sono 36 pecore.  
10 muoiono affogate.  
Quanti anni ha il capitano?

FRANCIA



...i bambini 'rispondono' !!!!



# INTERPRETAZIONE

STRUTTURA DEI  
PROBLEMI

- il testo contiene tutti e soli i dati (per lo più numerici) necessari per la soluzione
- c'è una soluzione, ed è unica
- ...

# INTERPRETAZIONE

STRUTTURA DEI  
PROBLEMI

LE NORME IMPLICITE  
ED ESPLICITE CHE  
REGOLANO LA PRATICA  
DIDATTICA

LE CONVINZIONI  
DEGLI ALLIEVI

LE CONVINZIONI DEGLI  
INSEGNANTI

LE EMOZIONI ASSOCIATE  
AI PROBLEMI

- il testo contiene tutti e soli i dati (per lo più numerici) necessari per la soluzione
- c'è una soluzione, ed è unica
- ...

# INTERPRETAZIONE

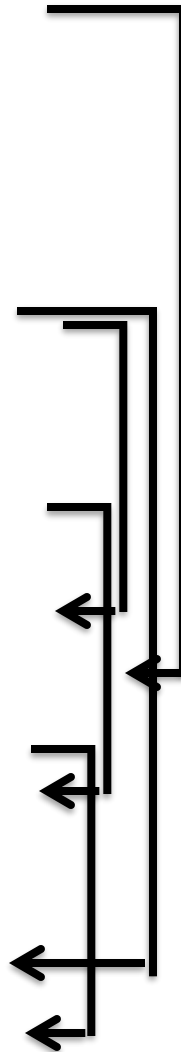
STRUTTURA DEI  
PROBLEMI

LE NORME IMPLICITE  
ED ESPLICITE CHE  
REGOLANO LA PRATICA  
DIDATTICA

LE CONVINZIONI  
DEGLI ALLIEVI

LE CONVINZIONI DEGLI  
INSEGNANTI

LE EMOZIONI ASSOCIATE  
AI PROBLEMI



# INTERPRETAZIONE

Secondo molti ricercatori (e insegnanti) le difficoltà degli allievi sono spesso dovute a difficoltà nella fase iniziale di comprensione.

LA COMPrensIONE DEL  
PROBLEMA

può essere ostacolata

LETTURA SELETTIVA DEL  
TESTO

Alla ricerca di

- dati numerici
- di *parole chiave* o espressioni che suggeriscano come combinare i dati numerici

# INTERPRETAZIONE

Quale sarà la temperatura dell'acqua in un recipiente se metti *insieme* una caraffa d'acqua a 10° e una a 40°?

$$10^{\circ} + 40^{\circ} = 50^{\circ}$$

LA COMPrensIONE DEL  
PROBLEMA

può essere ostacolata

LETTURA SELETTIVA DEL  
TESTO

Alla ricerca di

- dati numerici
- di *parole chiave* o espressioni che suggeriscano come combinare i dati numerici

# Passi

(INVALSI 2008, 5a primaria)

Maria, Renato e Fabio misurano a passi la lunghezza della loro aula.

Maria conta 26 passi, Renata ne conta 30 e Fabio 28.

Chi ha il passo più lungo?

Il 50,5 % del campione nazionale non risponde correttamente.

# INTERPRETAZIONE

Secondo molti ricercatori (e insegnanti) le difficoltà degli allievi sono spesso dovute a difficoltà nella fase iniziale di comprensione.

LA COMPrensIONE DEL  
PROBLEMA

può essere ostacolata

LETTURA SELETTIVA DEL  
TESTO

FORMULAZIONE DEL  
TESTO DEL PROBLEMA

FORMULAZIONE DEL  
TESTO DEL PROBLEMA

Aspetti linguistici generali

- Lessico



# OCSE-PISA: Popolarità del Presidente

In Zedlandia sono stati effettuati alcuni sondaggi di opinione per determinare il livello di popolarità del Presidente in vista delle prossime elezioni.

Quattro editori di giornali hanno svolto sondaggi indipendenti su scala nazionale. I risultati dei quattro sondaggi dei giornali sono i seguenti:

- Giornale 1: 36,5% (sondaggio effettuato il 6 gennaio su un campione di 500 cittadini con diritto di voto, scelti a caso),
- Giornale 2: 41,0% (sondaggio effettuato il 20 gennaio su un campione di 500 cittadini con diritto di voto, scelti a caso),
- Giornale 3: 39,0% (sondaggio effettuato il 20 gennaio su un campione di 1000 cittadini con diritto di voto, scelti a caso),
- Giornale 4: 44,5% (sondaggio effettuato il 20 gennaio su un campione di 1000 lettori che hanno telefonato alla redazione per votare).

Quale giornale è più attendibile per prevedere il livello di popolarità del Presidente, se le elezioni si svolgono il 25 gennaio?

Scrivi due motivi che giustifichino la tua risposta.

# OCSE-PISA: Popolarità del Presidente

In Zedlandia sono stati effettuati  
determinare il livello di popola  
prossime elezioni.

35,6% di risposte corrette  
29,2% di risposte omesse

Cosa vuol dire che una persona  
è *popolare*?

*'Che fa parte del popolo'*

- Giornale 3: 39,0% (sondaggio ef  
1000 cittadini con diritto di voto)
- Giornale 4: 44,5% (sondaggio ef  
1000 lettori che hanno telefonato

Cosa vuol dire che un giornale è  
*attendibile*?

*'Che esce regolarmente'*

Quale giornale è più attendibile per prevedere il livello di  
popolarità del Presidente, se le elezioni si svolgono il 25  
gennaio?

Scrivi due motivi che giustifichino la tua risposta.

## FORMULAZIONE DEL TESTO DEL PROBLEMA

### Aspetti linguistici generali

- Lessico
- Legami fra le varie parti del testo

# La scala (2a)

La strega Pasticcia ordina ai suoi gattini Buffetto e Sandogatt di lucidare tutta la lunga scala che porta alla torre più alta del castello.

Buffetto lucida 20 scalini.

Sandogatt ne lucida solo 3.

La strega ne lucida 7 più di lui.

Quanti scalini ha quella scala?

**ANAFORA**

# Vacanze al campeggio (4a)

Tommaso ha deciso di passare una decina di giorni in campeggio con i suoi amici Alessio, Marco e Giovanni.

Se prenderanno una tenda con 4 posti letto, allora prevedono di spendere 15 euro al giorno per l'affitto della piazzola, 18 euro a testa per i pasti e 8 euro al giorno per l'ombrellone.

Quanto spendono i 4 ragazzi per stare al mare?

## FORMULAZIONE DEL TESTO DEL PROBLEMA

### Aspetti linguistici generali

- Lessico
- Legami fra le varie parti del testo
- Enciclopedia

## Umberto Eco



Un testo è una macchina pigra  
che si attende dal lettore molta  
collaborazione.

# Levinson (1983)

"Giovanni voleva comprare un regalo a Carlo per il suo compleanno, perciò andò a prendere il suo **maialino**; lo agitò ma non udì nessun rumore; avrebbe dovuto fare un regalo a Carlo con le sue mani".





Giovanni voleva comprare un regalo a Carlo per il suo compleanno

perciò andò a prendere il suo maialino;

lo agitò ma non udì nessun rumore;



avrebbe dovuto fare un regalo a Carlo con le sue mani.

?

?

?

# Importanza della conoscenza enciclopedica

- Leggi attentamente il testo del seguente problema e, senza risolverlo, individua i dati mancanti o superflui:
- Un allevatore possiede 47 mucche e 10 cavalli. Una mucca produce in media 15 litri di latte al giorno. Quanto latte viene prodotto ogni giorno nell'allevamento?
- Nel problema c'è un dato:
  - superfluo
  - mancante
- Quale?.....

# V primaria

- Leggi attentamente il testo del seguente problema e, senza risolverlo, individua i dati mancanti o superflui:
- Un allevatore possiede 47 mucche e 10 cavalli. Una mucca produce in media 15 litri di latte al giorno. Quanto latte viene prodotto ogni giorno nell'allevamento?
- Nel problema c'è un dato:
  - superfluo
  - mancante
- Quale?.....

Non sappiamo quanto latte producono i cavalli ogni giorno

## FORMULAZIONE DEL TESTO DEL PROBLEMA

### Aspetti linguistici generali

- Lessico
- Legami fra le varie parti del testo
- Enciclopedia
- Sceneggiature comuni

# Sceneggiature comuni

- La conoscenza enciclopedica è organizzata in schemi più o meno complessi e collegati gli uni agli altri, presenti nella memoria a lungo termine.
- Tali schemi in letteratura sono indicati come *frames, schemata, scripts, plans*.
- Umberto Eco parla di *sceneggiature comuni (frames)*.

# Umberto Eco

[*Lector in fabula*, p. 81]

Riteniamo che la comprensione testuale sia ampiamente dominata dalla applicazione di sceneggiature pertinenti, così come le ipotesi testuali destinate all'insuccesso (...) dipendano dall'applicazione di sceneggiature sbagliate e "infelici".

# La comprensione del testo

- è ostacolata se:
  - il testo fa riferimento a ‘schemi’ sconosciuti

# Vacanze al campeggio (4a)

Tommaso ha deciso di passare una decina di giorni in campeggio con i suoi amici Alessio, Marco e Giovanni.

Se prenderanno una tenda con 4 posti letto, allora prevedono di spendere 15 euro al giorno per l'affitto della piazzola, 18 euro a testa per i pasti e 8 euro al giorno per l'ombrellone.

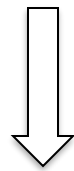
Quanto spendono i 4 ragazzi per stare al mare?

molti hanno moltiplicato la spesa dell'ombrellone per il numero degli amici



# La comprensione del testo

- è ostacolata se:
  - il testo fa riferimento a ‘schemi’ sconosciuti
  - o addirittura a schemi che violano le sceneggiature comuni



in tal caso il testo è percepito come

**ARTIFICIOSO**

# Elementi di artificiosità in un problema

- Artificiosità della situazione

**ARTIFICIOSO**

# Massimo Troisi: dal film *Scusate il ritardo*



"Problema: un contadino si reca al mercato per vendere tre sacchi di farina da chilogrammi settantadue e sei dozzine di uova. Durante l'operazione di scarico, uno dei sacchi cadendo sulle uova ne rompe la metà. Se la farina costa lire quindici al chilogrammo, e le uova lire cinque l'una, e di tutta la merce ne è stata venduta la metà, quanti soldi ha portato a casa il contadino, tenendo conto che dalla tasca bucata ha perduto lire trentacinque?"

# Simulazione prova di matematica 2014-'15

## Problema 2: **Un mappamondo prezioso**

Lavori in un laboratorio d'arte vetraria e il responsabile del museo civico della tua città ti chiede di progettare un espositore avente forma conica che possa contenere un prezioso e antico mappamondo. Il mappamondo ha raggio  $R$  e l'espositore deve essere ermeticamente chiuso, per impedire che il mappamondo prenda polvere.

Il tuo collega Mario dice che, per costruire l'espositore, si potrebbe utilizzare il quarzo ialino ma, data la preziosità del materiale, per risparmiare è necessario determinarne le dimensioni ottimali. Inoltre per proteggere l'espositore dalla polvere decidete di ricoprirlo con una sottile pellicola trasparente di nuova generazione e piuttosto costosa.

1. Trascurando lo spessore dell'espositore e attraverso un'opportuna modellizzazione geometrica, determina l'altezza  $h$  e il raggio di base  $r$  dell'espositore affinché sia minima la sua superficie totale, allo scopo di utilizzare una quantità minima di pellicola<sup>1</sup>.

2. Fornisci una spiegazione adeguata e convincente del procedimento seguito, eventualmente anche con rappresentazioni grafiche.

Ora tu e Mario dovete scegliere la pellicola da sistemare sulla superficie esterna dell'espositore. La scelta va fatta tra due pellicole che hanno lo stesso costo unitario ma diverse proprietà: la prima ogni anno perde il 3% della resistenza all'usura che ha a inizio anno, mentre la seconda ogni anno perde il 2% della resistenza all'usura iniziale.

3. Aiuta Mario nel capire quale pellicola convenga scegliere in funzione della durata, tenendo conto del fatto che entrambe hanno la stessa resistenza di partenza e che una pellicola va cambiata quando la sua resistenza all'usura risulta inferiore al 30% della sua resistenza di partenza.

# Elementi di artificiosità in un problema

- Artificiosità della situazione
- Artificiosità delle informazioni (necessarie per risolvere il problema)

**ARTIFICIOSO**

# Il torneo

(Invalsi 2013, SNV06 D17)

D17. Gianni partecipa a un torneo.

Il regolamento del torneo stabilisce che:

- ogni giocatore gioca 5 partite e parte con un punteggio iniziale di 100 punti;
- a ogni partita vinta, il punteggio raggiunto raddoppia;
- a ogni partita persa, il punteggio raggiunto si dimezza.

Gianni perde la seconda e la quarta partita.

a. Completa la tabella.

	<i>Punteggio</i>
<i>Punteggio iniziale</i>	100
Partita 1	200
Partita 2	400
Partita 3	800
Partita 4	1600
Partita 5	3200
Punteggio	...sommano

b. Se Gianni avesse vinto tutte le partite, quale sarebbe stato il suo punteggio finale?

Risposta: ....

D17a: 74,1% risposte corrette

D17b: 29,4% corrette; 66,8% errate

# Elementi di artificiosità in un problema

- Artificiosità della situazione
- Artificiosità delle informazioni (necessarie per risolvere il problema)
- Artificiosità nel *modo* di dare tali informazioni  
→ autore perverso o reticente

# ARTIFICIOSO

Un agricoltore raccoglie 50 cespi di insalata; ne vende la metà a € 2 cadauno e l'altra metà diminuita di 5 unità a € 1,50 cadauno. Quanto incassa? Quanto guadagna se dovrà pagare un'imposta di € 0,25 per ogni cespo di insalata venduto? [€ 80; € 68,75]





### Strategia di Emma:

- chiamo  $L$  la somma da dare al lattaio e  $F$  la somma per il fornaio;
- la mamma ci dice che:  $L = 3F$  (il lattaio deve avere il triplo);
- allora, in tutto le parti da fare sono 4, cioè 3 per il lattaio e 1 per il fornaio.

## FORMULAZIONE DEL TESTO DEL PROBLEMA

### Aspetti linguistici generali

- Lessico
- Legami fra le varie parti del testo
- Enciclopedia
- Sceneggiature comuni
- Impliciti e non detto

## Umberto Eco



Un testo è una macchina pigra  
che si attende dal lettore molta  
collaborazione.

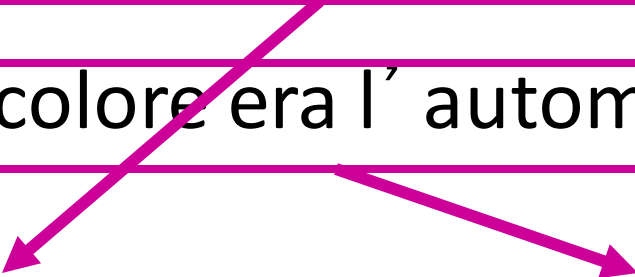
Un testo (...) è intessuto di ***non-detto***.

Marco prese l'automobile e si precipitò all'aeroporto.

Non dice:

- che nell'automobile c'era il motore

- di che colore era l'automobile



Implicito  $\neq$  non detto

Non viene detto:

- che sono stati lucidati TUTTI gli scalini

Ma se non fosse così...

La s...  
...il problema non si potrebbe risolvere

che porta alla torre più alta del castello.

Buffetto lucida 20 scalini.

Sandogatt ne lucida solo 3.

La strega ne lucida 7 più di lui.

Quanti scalini ha quella scala?

Spiega il tuo ragionamento.

Non viene detto:

- che sono stati lucidati TUTTI gli scalini

Ma se non fosse così...

...il problema non si potrebbe risolvere

E' un' interpretazione che deriva:

- *non* direttamente dal testo
- ma dalla situazione di comunicazione (contratto didattico)
- dall' accettare le 'regole del gioco' dei problemi (stereotipi)

**IMPLICATURA**

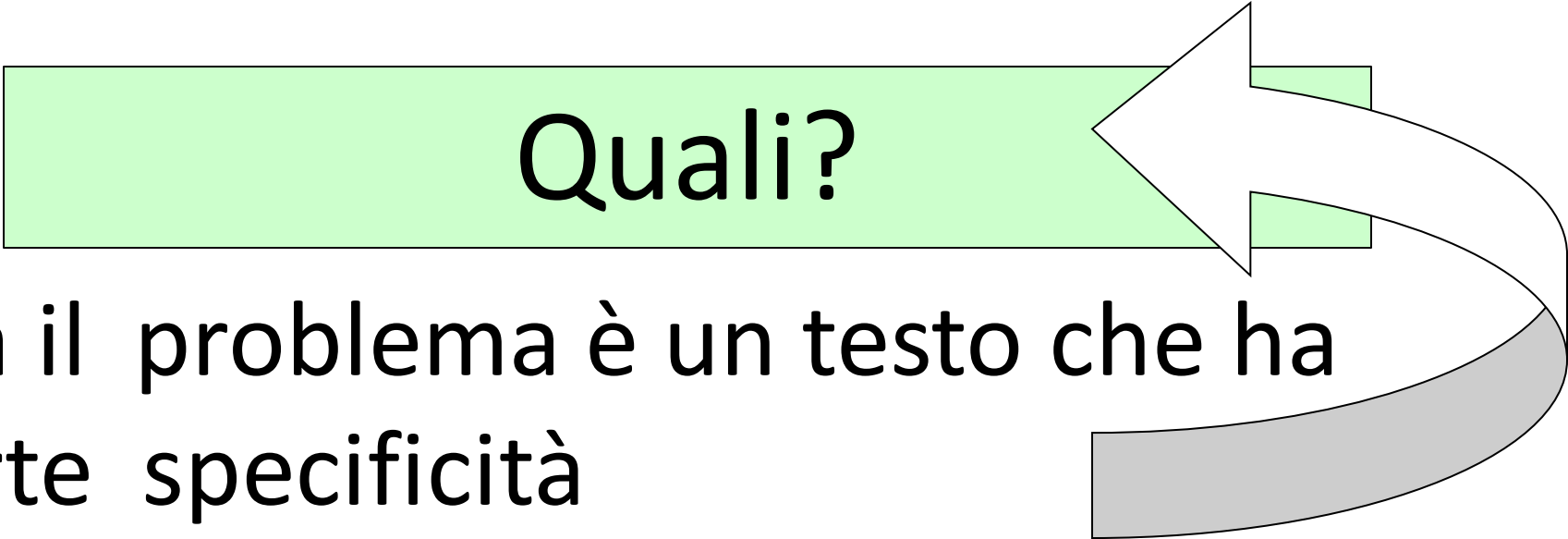
Per allievi non esperti può essere difficile  
fare questo tipo di inferenze

Alla sera Pete ha 6 palline.

Durante il giorno ha perso 2 palline.

La mattina Pete aveva .. ***giocato con le palline***

Per individuare possibili ostacoli alla comprensione di un problema dobbiamo tener conto anche di queste specificità



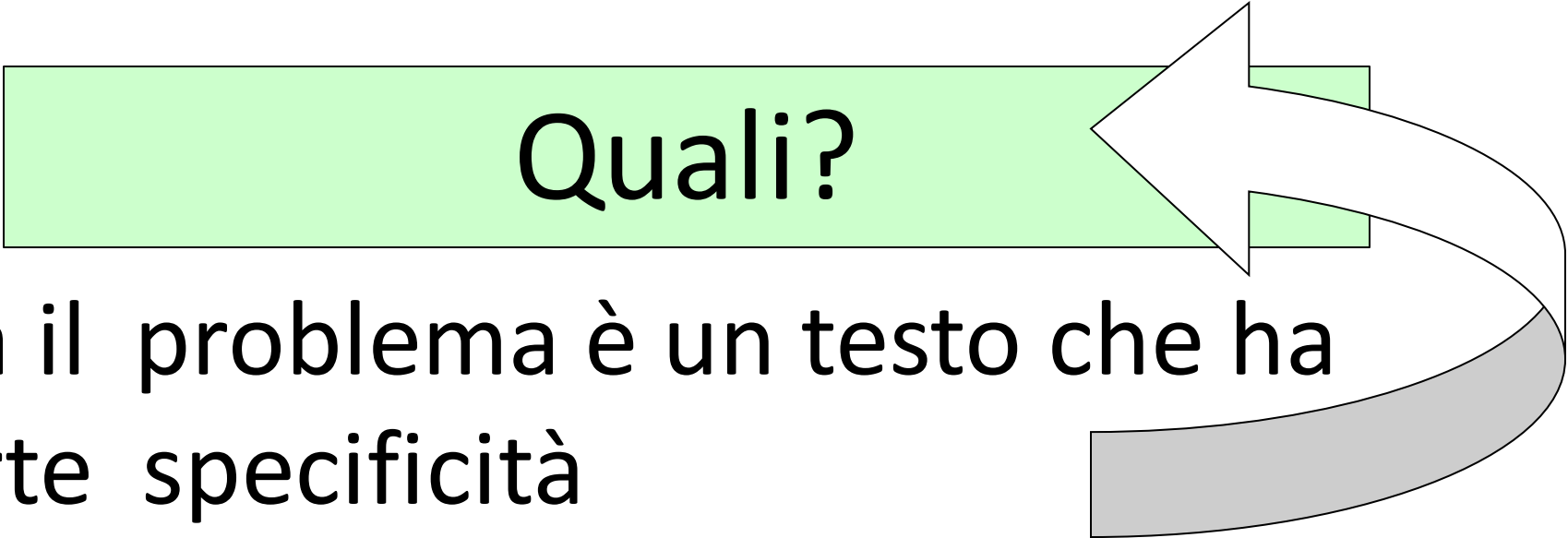
Quali?

Ma il problema è un testo che ha certe specificità

Le osservazioni fatte fin qui valgono per un qualsiasi testo



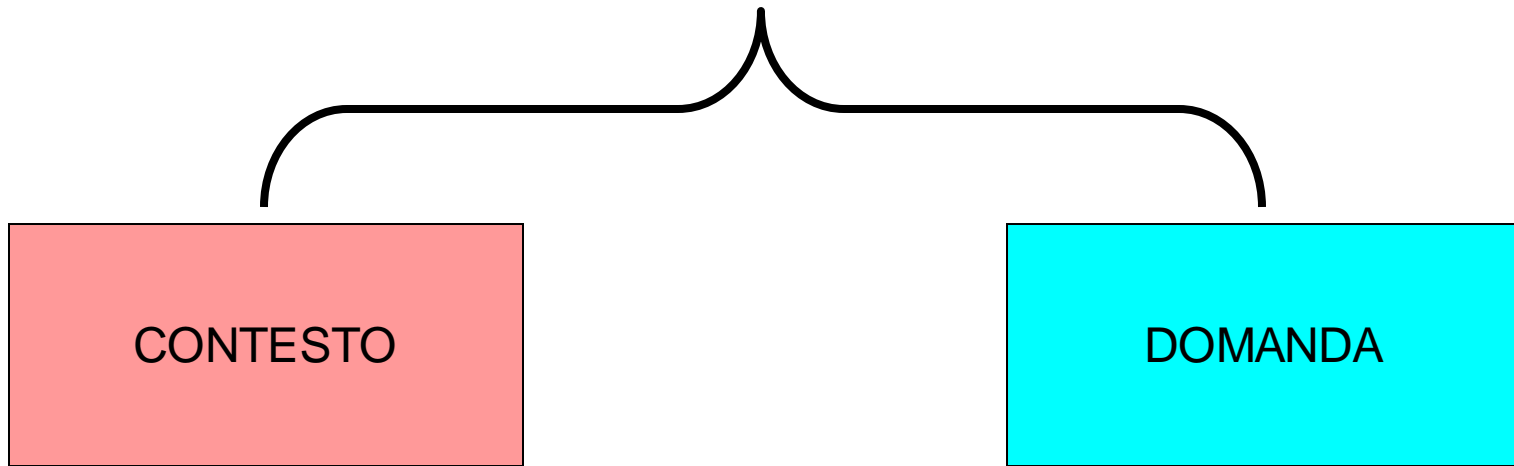
- Il problema è un testo che vuole muovere il lettore a un'azione: la risoluzione del problema
- La funzione di comunicare al lettore quale comportamento ci si attende da lui è in genere svolta dalla DOMANDA (che può assumere diverse forme)



Quali?

Ma il problema è un testo che ha certe specificità

# PROBLEMA VERBALE



# Elementi di artificiosità in un problema

- Artificiosità della situazione
- Artificiosità delle informazioni (necessarie per risolvere il problema)
- Artificiosità nel *modo* di dare tali informazioni  
→ autore perverso o reticente
- Artificiosità della domanda

# ARTIFICIOSO

# I tartufi

In un cesto sono contenuti 1,75 kg di tartufi neri, che devono essere divisi fra tre persone in modo tale che alla seconda spettino 30 g in più della prima e alla terza 40 g in più della seconda. Calcola quanti grammi di quei tartufi riceverà ogni persona.

Quando di un problema viene valutato  
solo il risultato finale...

...si può aggiungere un altro elemento di  
artificialità:

Il rifiuto di risposte non standard ma  
realistiche

# INVALSI, 2<sup>a</sup> primaria, 2012-2013

## La gita

Una classe di 9 maschi e 10 femmine, accompagnati dalla maestra Gianna e dalla maestra Luisa, sale sul pulmino per andare in gita.

Restano due posti liberi.

Quanti sono in tutto i posti a sedere per i viaggiatori sul pulmino?

A: 19

B: 21

C: 23



36,2%



17,3%

# INVALSI, 2<sup>a</sup> primaria, 2012-2013

## La gita

Una classe di 9 maschi e 10 femmine, accompagnati dalla maestra Gianna e dalla maestra Luisa, sale sul pulmino per andare in gita.

Restano due posti liberi.

Quanti sono in tutto i posti a sedere per i viaggiatori sul pulmino?

A: 19

B: 21

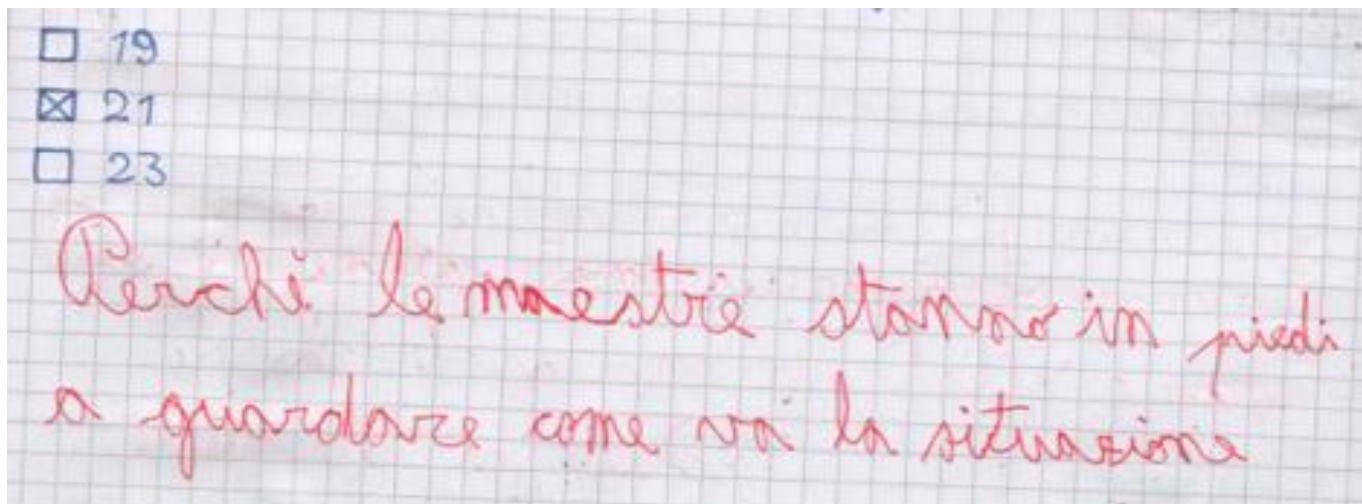
C: 23



36,2%



17,3%



# PISA 2003

## LIBRERIA

### Domanda 1: LIBRERIA

Per costruire una libreria, un falegname ha bisogno del seguente materiale:

4 assi di legno lunghe

6 assi di legno corte

12 ferri ad angolo piccoli

2 ferri ad angolo grandi

14 viti



Il falegname ha a disposizione 26 assi lunghe, 33 assi corte, 200 ferri ad angolo piccoli, 20 ferri ad angolo grandi e 510 viti.

Quante librerie complete può costruire il falegname?

Risposta: .....



Risposta considerata corretta: 5 librerie

ASSI LUNGHE 26

$26:4=6$  col resto di 2

ASSI CORTE 33

$33:6=5$  col resto di 3

→ mancano 3 assi corte per la 6° libreria...

... però posso ricavarle dalle assi lunghe avanzate!

Per costruire una libreria, un falegname ha bisogno del seguente materiale:

4 assi di legno lunghe

6 assi di legno corte

12 ferri ad angolo piccoli

2 ferri ad angolo grandi

14 viti



Il falegname ha a disposizione 26 assi lunghe, 33 assi corte, 200 ferri ad angolo piccoli, 20 ferri ad angolo grandi e 510 viti.

Quante librerie complete può costruire il falegname?

Risposta: .....

# PRIME CONCLUSIONI

- La comprensione di un problema è un processo complesso
- La formulazione del testo spesso costituisce un ostacolo
- I problemi che si definiscono 'realistici' spesso hanno solo un contesto realistico, ma la domanda è artificiosa, così come il modo di dare le informazioni

# Che fare?

- Nella pratica didattica un problema formulato con scarsa attenzione a questi aspetti può essere *comunque* un'occasione di apprendimento
- ...ma se il problema è usato per *valutare* competenze matematiche?

# Le considerazioni fatte fin qui...

- Ci portano a riflettere sulla difficoltà di valutare competenze matematiche attraverso prove che mettono in gioco la comprensione del testo di un problema o in generale di un testo
- Suggestiscono cautela nell'interpretare i risultati ottenuti in prove di questo tipo
- In particolare ci portano a riflettere:
  - sull'interpretazione dei risultati dei 'nostri' studenti in prove quali OCSE PISA
  - ...e a monte sul quadro teorico che è alla base del processo di valutazione di tali prove

“Il riquadro esterno della figura 1.1 mostra che la literacy matematica si esprime nel contesto di una sfida o di un problema che ha origine nel mondo reale.”

• Figura 1.1 •

## L'applicazione pratica del modello di literacy matematica

### Sfida nel contesto del mondo reale

Categorie di contenuto: Quantità, Incertezza, Cambiamento e relazioni, Spazio e forma

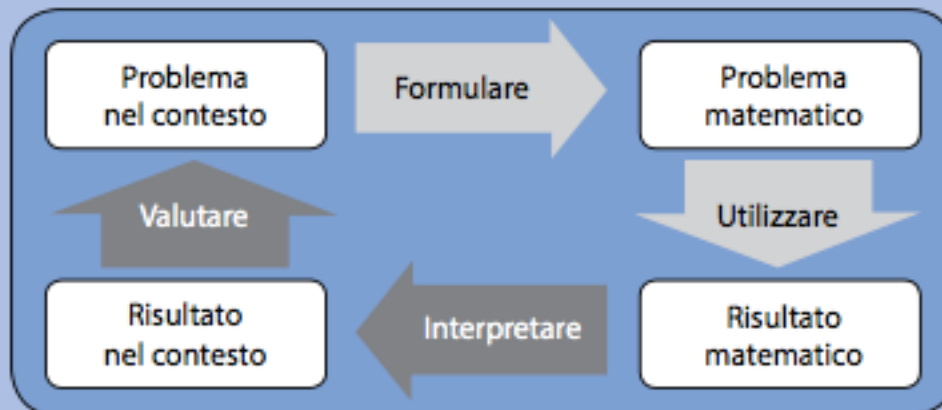
Categorie di contesto: Personale, Sociale, Occupazionale, Scientifico

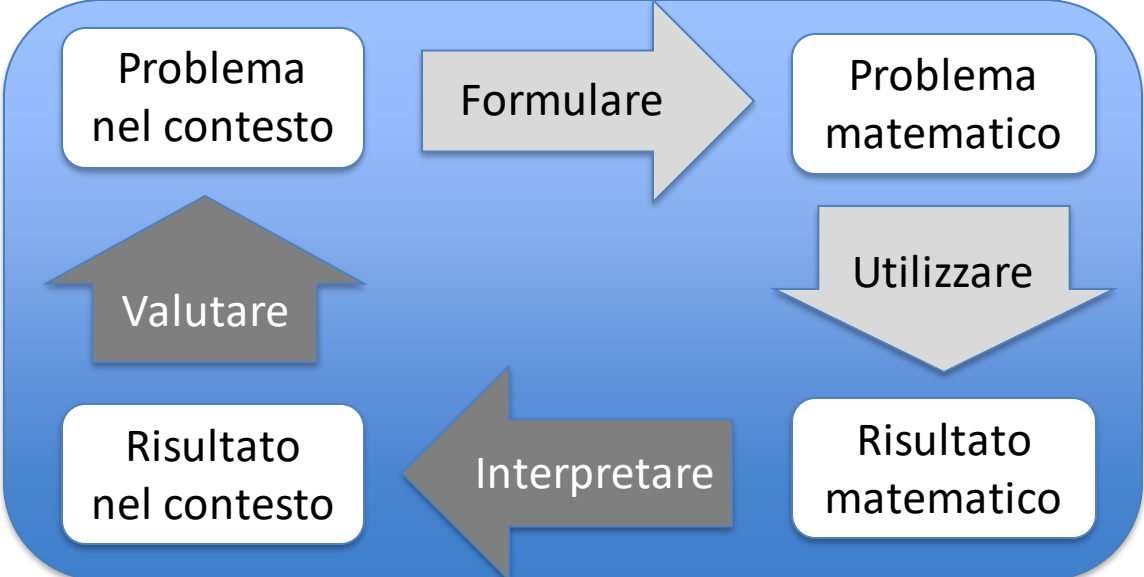
### Pensiero e azione matematica

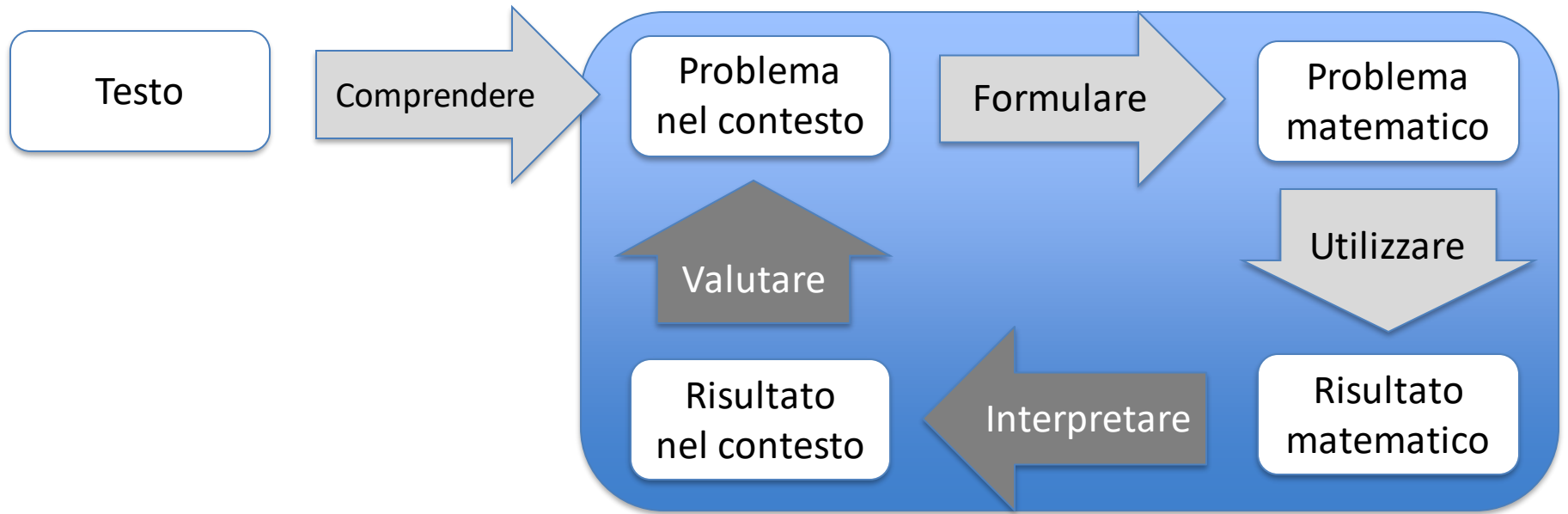
Concetti, conoscenze e abilità matematiche

Capacità matematiche fondamentali: Comunicazione, Rappresentazione, Strategie di soluzione, Matematizzazione, Ragionamento e argomentazione, Uso di linguaggio e operazioni simboliche, formali e tecniche, Uso di strumenti matematici

Processi: Formulare, Impiegare, Interpretare/Valutare







Testo

Comprendere

Problema nel contesto

Formulare

Problema matematico

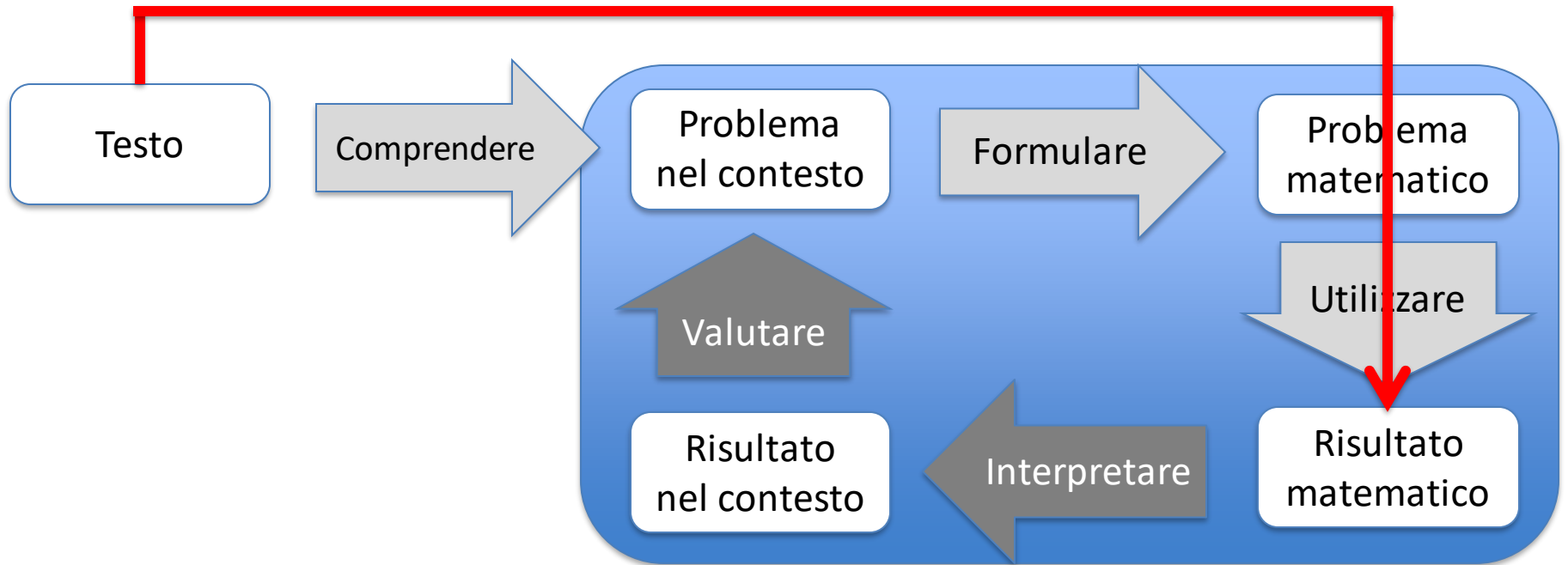
Utilizzare

Risultato matematico

Interpretare

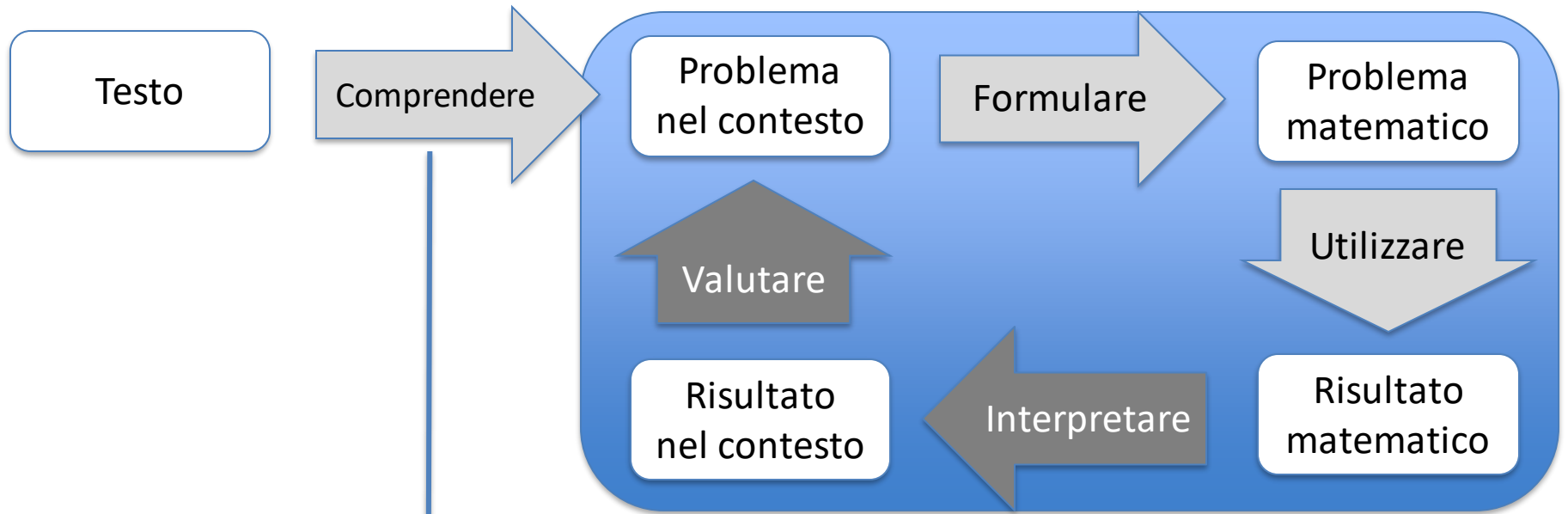
Risultato nel contesto

Valutare



# La lettura selettiva del testo





Testo

Comprendere

Problema nel contesto

Formulare

Problema matematico

Utilizzare

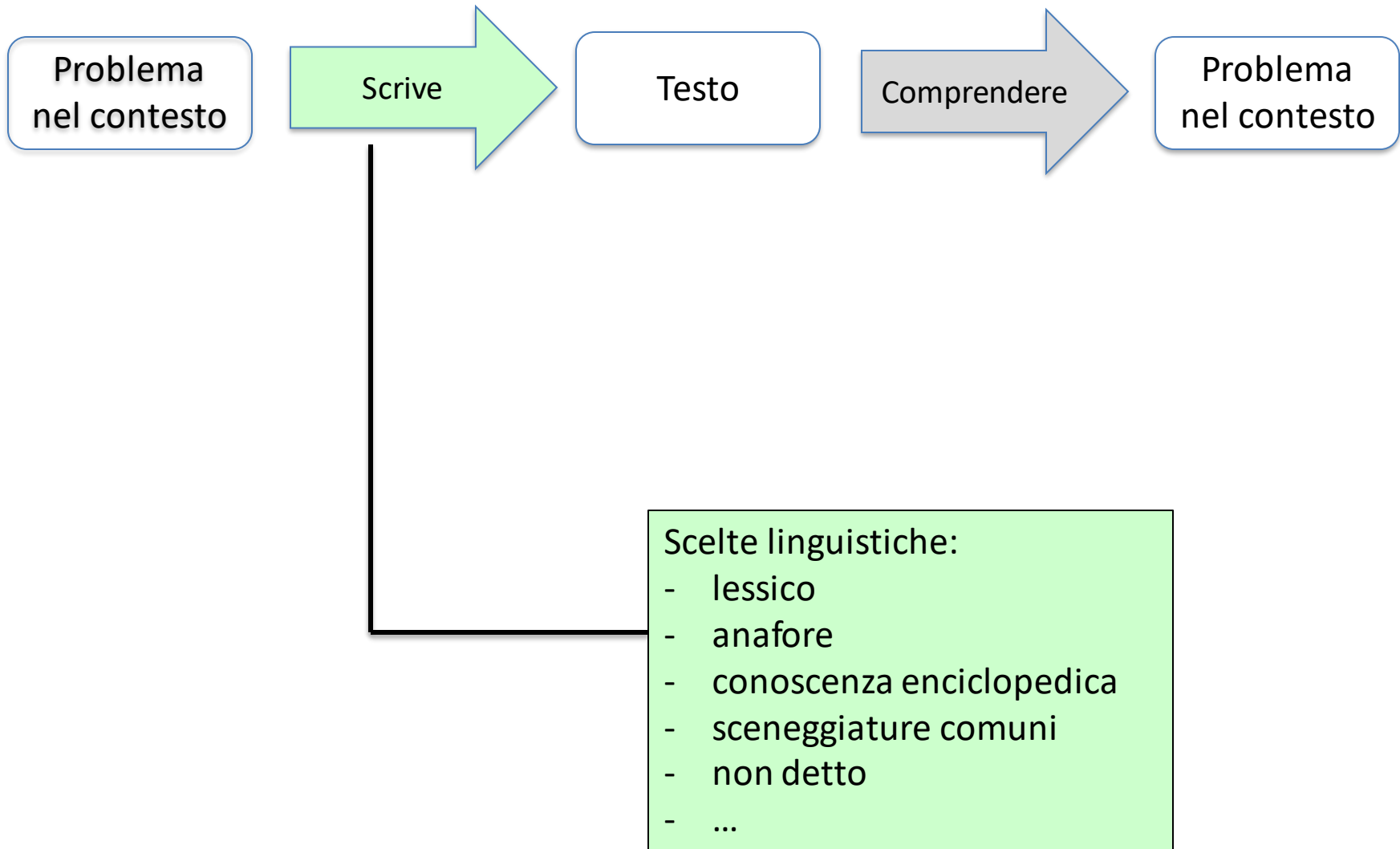
Risultato matematico

Interpretare

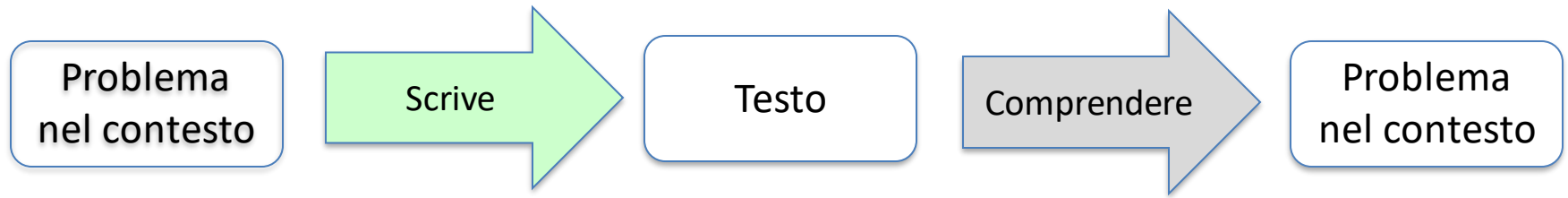
Risultato nel contesto

Valutare

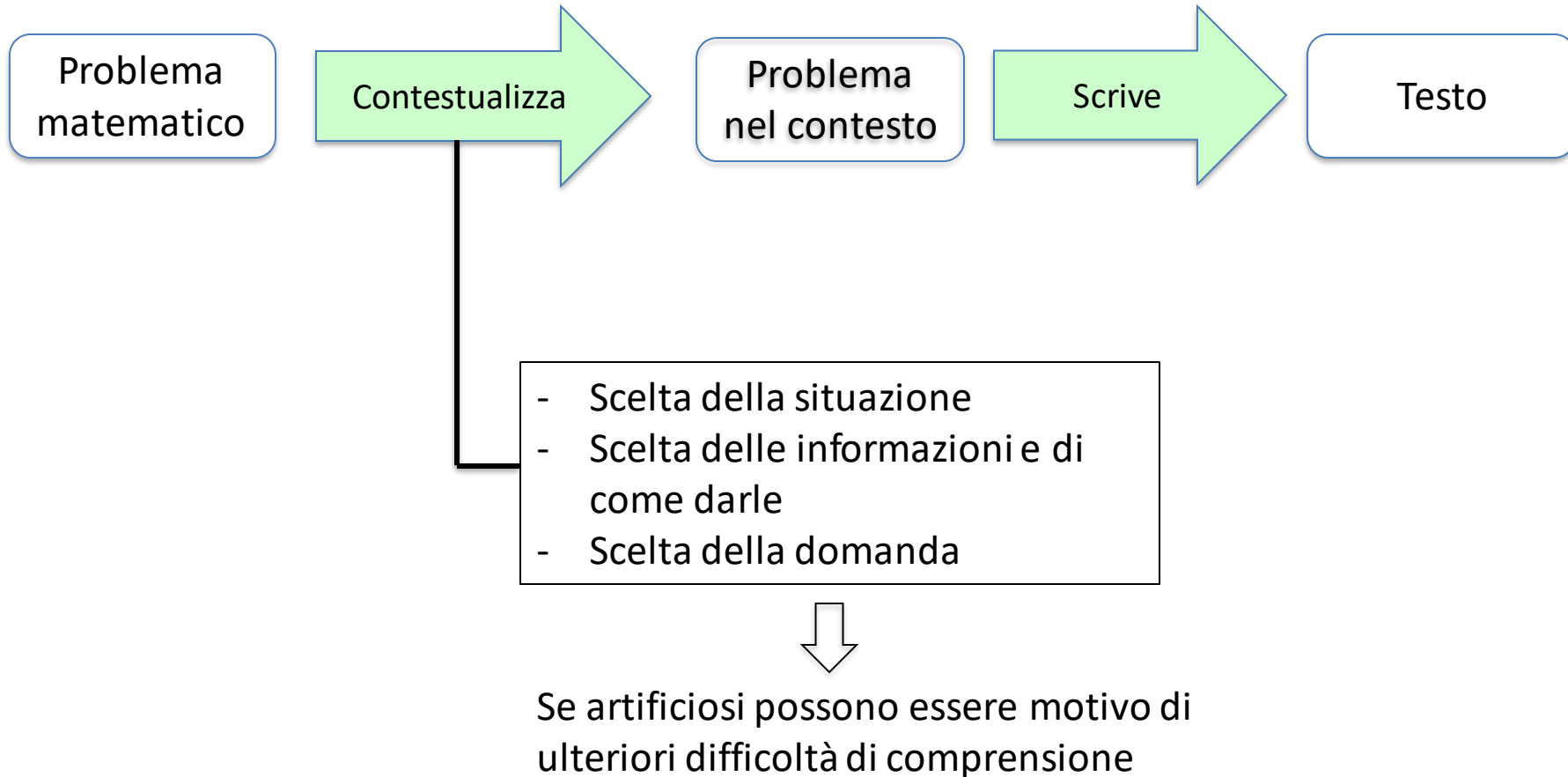
- Ostacoli linguistici:
- lessico
  - anafore
  - conoscenza enciclopedica
  - impliciti e non detto
  - ...



...ma davvero l'autore parte da un problema nel contesto?



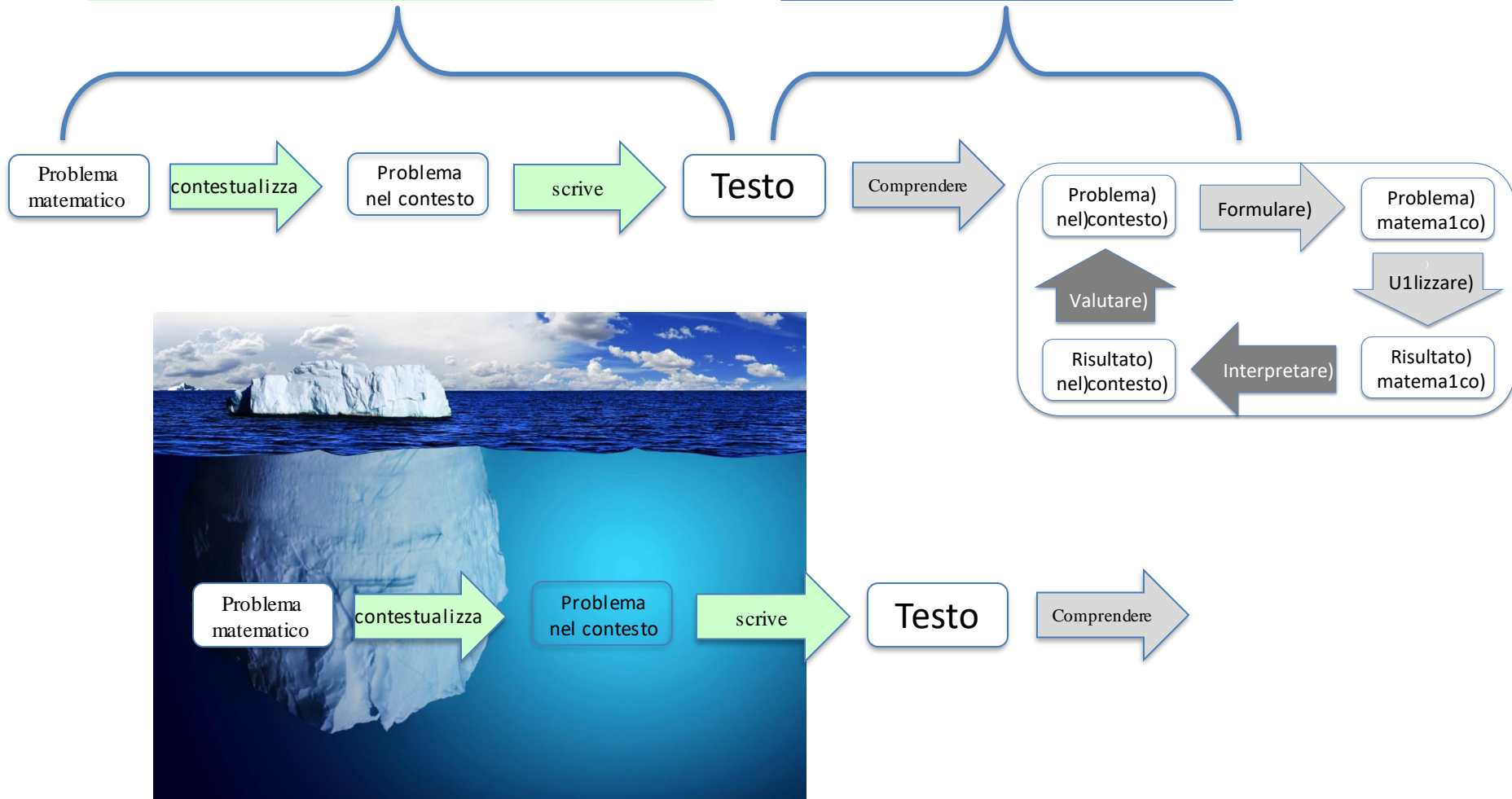
# ...ma davvero l'autore parte da un problema nel contesto?

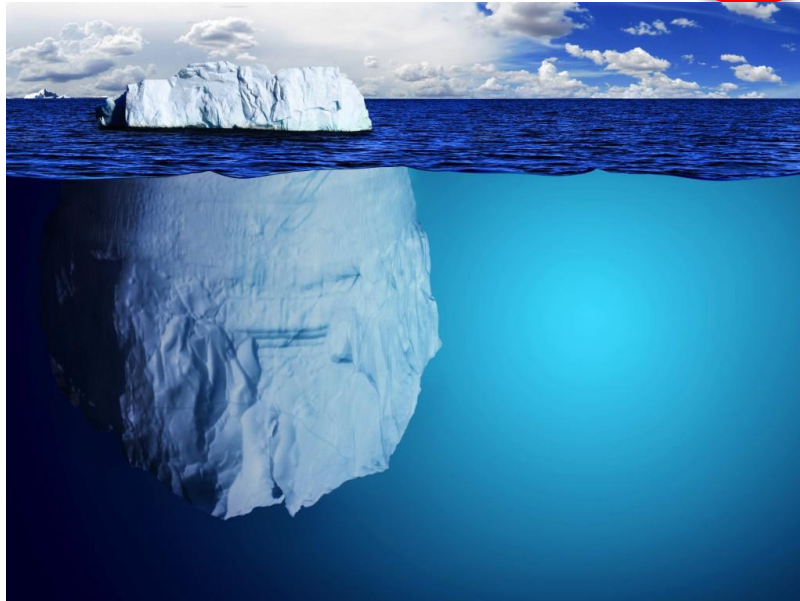
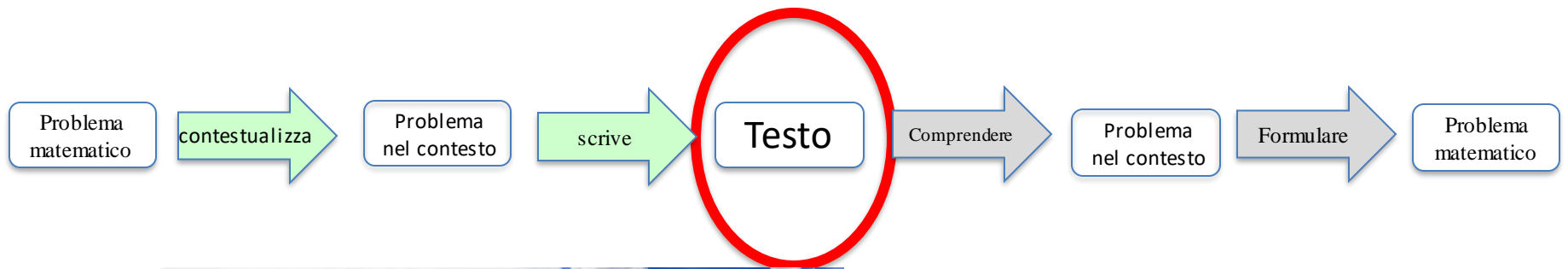


“Il riquadro esterno della figura 1.1 mostra che la literacy matematica si esprime nel contesto di una sfida o di un problema che ha origine nel mondo reale.”

l'autore del 'problema'

lo studente





‘problema’ come etichetta che individua un certo tipo di compito di matematica a scuola

Problemi realistici Questo di un problema: quello è il problema!

‘problema’ reale: situazione difficile da risolvere, fonte di disagio...

Da un problema *realistico* a un problema *reale*...  
...c'è di mezzo un **testo**

Se non teniamo conto della complessità introdotta attraverso un testo

- la frattura fra problemi scolastici e problemi reali non si salda...
- ...oppure si salda, ma in modo fallimentare

*«mi fa venire in mente problema di una storietta corta dove finita la storia bisogna risolverla e quando non riesco a concentrarmi sul problema mi immagino sempre: ecco perché l'hanno chiamata problema.»*  
*[Laura, 4<sup>a</sup> primaria]*

Da un problema *realistico* a un problema *reale*...  
...c'è di mezzo un **testo**



**GRAZIE!**